**Unidad 5: Transformaciones lineales**

**Transformaciones lineales**

Definición

Dados dos espacios vectoriales V y W sobre un mismo cuerpo IR, una función f definida de V en W, se dice que es una transformación, aplicación, función lineal u homomorfismo de espacios vectoriales si para cualesquiera dos vectores u y v de V, y para todo escalar λ de IR, se verifica:

f(u + v) = f(u) + f(v)

f(λu) = λf(u)

En el caso en que V = W se dice que f es un endomorfismo de espacios vectoriales.

Las dos condiciones de la definición anterior se pueden sintetizar en una sola, diciendo que f es una transformación lineal si y solo si para cualesquiera dos vectores u1 y u2 de V, y para los escalares k1 y k2 de IR, se verifica:

f(k1u1 + k2u2) = k1f(u1) + k2f(u2)

Es decir, cuando la imagen de una combinación lineal de vectores de V, sea igual a la combinación lineal de las imágenes de cada uno de ellos.

De modo análogo, dados dos espacios vectoriales V y W sobre un mismo cuerpo IR, si f definida de V en W es una transformación lineal, entonces para u1, u2,…, un vectores de V y k1, k2, …, kn escalares de IR, se verifica:

f(k1u1 + k2u2 +…+ knun) = k1f(u1) + k2f(u2)+ …+ knf(un)

Ejemplos

* Toda función f: IR → IR dada por f(x) = a·x, siendo a ∈ IR, es una transformación lineal.
* La función nula f : V → V definida por f(v) =  es una transformación lineal.
* La función definida de Mnxn(IR) en IR que hace corresponder a cada matriz cuadrada su traza, es una transformación lineal.
* *Sugerencia: realizar los Ejercicios 1 y 2.*

Teorema 1

***Dados dos espacios vectoriales V y W sobre el mismo cuerpo IR, si f de V en W es una transformación lineal, entonces:***

1. ***f() = ***
2. ***f(- v) = - f(v) , para todo v de V***
3. ***f(v - w) = f(v) - f(w), para todo v y w de V***

Demostración

Sea v un vector cualquiera de V, debido a que 0. v = , se tiene:

f() = f(0.v) = 0.f(v) = , lo que prueba a)

también se verifica que: f(-v) = f((-1).v) = (-1).f(v) = -f(v), lo cual prueba b)

por ultimo v - w = v + (-1).w, por lo tanto:

f(v – w) = f(v + (-1).w) = f(v) + (-1).f(w) = f(v) - f(w), y se comprueba c).

Definición

* Si f de V en W es una transformación lineal que es inyectiva, entonces f recibe el nombre de **monomorfismo.**
* Si f de V en W es una transformación lineal que es suryectiva, entonces f recibe el nombre de **epimorfismo**.
* Si f de V en W es una transformación lineal que es biyectiva, entonces f recibe el nombre de **isomorfismo.**
* Si f de V en V es una transformación lineal, entonces f recibe el nombre de **endomorfismo**.
* Si f de V en V es una transformación lineal que es biyectiva, entonces f recibe el nombre de **automorfismo.**

**Núcleo e Imagen de una transformación lineal**

Definición

Si f de V en W es una transformación lineal, entonces el conjunto de vectores de V tales que su imagen por f sea el vector nulo de W, recibe el nombre de conjunto **núcleo** o **kernel** de f.

V f W

N(f)

u 

Al conjunto núcleo o ker de f, se lo puede representar como ker(f) o N(f), es decir:

N(f) = { u / u ϵ V, f(u) = , ϵ W }

Definición

Si f de V en W es una transformación lineal, entonces el conjunto de vectores de W que son imágenes de los vectores de V por f, recibe el nombre de conjunto recorrido o imagen de la transformación.

V f W

Im(f)

u f(u) = v

Al conjunto recorrido o imagen de f, se lo puede representar como R(f) o Im(f), es decir:

Im(f) = { v / v ϵ W, (u)(u ϵ V), f(u) = v}

* *Sugerencia: realizar los Ejercicios 3, 4 y 5.*

Teorema 2

***Dados dos espacios vectoriales V y W sobre el mismo cuerpo IR, si f es una transformación lineal definida de V en W, entonces:***

1. ***El conjunto Núcleo de f es un subespacio de V.***
2. ***El conjunto Imagen de f es un subespacio de W.***

Demostración

Para demostrar que N(f) es un subespacio de V, se debe probar que:

1. N(f) ⊂ V
2. N(f) ≠ ∅
3. Si u1 y u2 son vectores de N(f), entonces (u1 + u2) es un vector de N(f)

Si k es un real y u un vector de N(f), entonces k.u es un vector de N(f)

Por definición del Núcleo, se cumple que N(f) ⊂ V , además como f es una transformación lineal, f() = , lo que indica que por lo menos el vector nulo pertenece al N(f), luego N(f) ≠ ∅.

Si u1 y u2 son dos vectores de N(f), f(u1) =  y f(u2) = , entonces f(u1 + u2) = f(u1) + f(u2) = += , luego (u1 + u2) pertenece al N(f).

Si u es un vector de N(f) y k es un escalar de IR, entonces f(k.u) = k.f(u) = k .= , luego k.u pertenece al N(f).

Por lo tanto, el conjunto Núcleo de f es un subespacio de V.

Para demostrar que Im(f) es un subespacio de W, se debe probar que:

1. Im(f) ⊂ W
2. Im(f) ≠ ∅
3. Si v1 y v2 son vectores de Im(f), entonces (v1+v2) es un vector de Im(f)

Si k es un real y v un vector de Im(f), entonces k.v es un vector de Im(f)

Por definición del conjunto Imagen de f, se cumple que Im(f) ⊂ W , además como f es una transformación lineal, f() = , lo que indica que por lo menos el vector nulo pertenece a Im(f), luego Im(f) ≠ ∅.

Si v1 y v2 son dos vectores de Im(f), existen u1 y u2 vectores de V, tal que f(u1) = v1 y f(u2) = v2, entonces f(u1+u2) = f(u1) + f(u2) = v1+v2, como V es un espacio vectorial, (u1+u2) es un elemento de V; luego (v1+v2) pertenece a la Im(f).

Sea k es un escalar de IR y si v es un vector de Im(f), existe un vector u de V, tal que f(u) = v , entonces f(k.u) = k.f(u) = k.v , como V es un espacio vectorial, k.u es un elemento de V; luego k.v pertenece a la Im(f).

Por lo tanto, el conjunto Imagen de f es un subespacio de W.

**Nulidad y rango de una transformación lineal**

Definición

Si f es una transformación lineal definida de V en W, entonces la dimensión del conjunto imagen de f se conoce como **rango de f,** y la dimensión del Núcleo de f se denomina **nulidad de f**.

* *Sugerencia: realizar los Ejercicios 6 ,7, 8 y 9.*

**Composición de transformaciones lineales**

La composición de funciones puede realizarse, en particular, entre dos transformaciones lineales. El resultado es, en este caso, una nueva transformación lineal.

Definición

Sean V, W y U , IR-espacios vectoriales. Sean f : V → W y g : W → U transformaciones lineales, entonces f ◦ g : V → U es una transformación lineal.

* *Sugerencia: realizar el Ejercicio 10.*

**Función inversa de una transformación lineal**

Definición

Sean V y W dos IR-espacios vectoriales y sea f : V → W una transformación lineal. Si f es un isomorfismo, entonces f −1 : W → V es una transformación lineal (que resulta ser un isomorfismo).

* *Sugerencia: realizar el Ejercicio 11.*

Teorema 3

***Dada una transformación lineal f definida de V en W, si S es una familia generatriz de V, entonces el conjunto formado por las imágenes de los vectores de S, es una familia generatriz del conjunto Im(f).***

Demostración

Sea S = {u1, u2,...,ur} es una familia generatriz de V , entonces el conjunto de todas las imágenes de los elementos de S por la transformación lineal f∗(S) = {f(u1),f(u2),...,f(ur)} es una familia de W.

Si v ∈ Im(f), se debe que probar que es posible expresar a v como combinación lineal de los vectores de f∗(S).

Ya que v ∈ Im(f), significa que existe un vector u ∈ V, tal que f(u) = v. Pero por hipótesis, S es una familia generatriz de V, luego se puede suponer que u = λ1u1 + λ2u2 + ... + λrur.

Por la linealidad de f: v = f(u) = f(λ1u1 + λ2u2 + ... + λrur) = λ1f(u1) + λ2f(u2) + ... + λrf(ur),

Luego v = λ1f(u1) + λ2f(u2) + ... + λrf(ur), lo cual indica que f∗(S) genera a Im(f).

Teorema de la dimensión

***Si f es una transformación lineal definida de un espacio vectorial V de dimensión n, en un espacio vectorial W de dimensión m, entonces la suma de la dimensión del conjunto imagen de f y la dimensión del núcleo de f es igual a la dimensión del espacio V, es decir:***

***dim(Im(f)) + dim(N(f)) = dim(V)***

***rango(f) + nulidad(f) = n***

Demostración

Si f es una transformación lineal definida de un espacio vectorial V de dimensión n, en un espacio vectorial W de dimensión m, se debe demostrar que:

dim(Im(f)) + dim(N(f)) = dim(V) = n

Se hará la demostración para el caso en que 1 ≤ dim(N(f)) < n. Los casos en que dim(N(f)) = 0 y dim(N(f)) = n, se dejan como ejercicios.

Suponiendo que dim(N(f)) = r, B= {u1, u2, … ,ur} una base del N(f), y el conjunto ampliado S = {u1, u2, … ,ur, ur+1, ..., un} es una base para V.

Por el teorema anterior, el conjunto f∗(S) = {f(u1), f(u2),...,f(ur), f(ur+1),...,f(un)} = { , f(ur+1),...,f(un)} es un sistema de generadores para Im(f).

Entonces, para demostrar la proposición, simplemente hay que razonar que el conjunto f∗(S) = {f(ur+1),...,f(un)} } es una familia libre (sus vectores son linealmente independientes), y por tanto forman una base para el conjunto Im(f).

Considerando la combinación trivial: kr+1f(ur+1) +...+ knf(un) = , se debe demostrar que kr+1=...= kn = 0

Por la linealidad de f: kr+1f(ur+1) +...+ knf(un) = f(kr+1.ur+1) +...+ f(kn.un) = f(kr+1.ur+1+...+ kn.un) =, con lo cual kr+1.ur+1+...+ kn.un pertenece al N(f), y se puede escribir este vector como combinación lineal de los vectores de la base B, por ejemplo:

kr+1.ur+1+...+ kn.un = k1.u1+...+ kr.ur

Por consiguiente: k1.u1+...+ kr.ur - kr+1.ur+1 -...- kn.un = 

Supuesto que S = {u1, u2,…,ur, ur+1,..., un} es una base para V, sus vectores son linealmente independientes, todos los escalares son nulos, en particular kr+1=...= kn = 0, lo cual completa la demostración.

* *Sugerencia: realizar el Ejercicio 12.*

Teorema 4

***Para toda transformación lineal f definida de un espacio vectorial V, en un espacio vectorial W, son equivalentes las siguientes proposiciones:***

***a) La función f es suryectiva.***

***b) Si S es una familia generatriz de V entonces f∗(S) es una familia generatriz de W.***

Demostración

1. ⇒ b)

Considerando el Teorema que dice que: si S es una familia generatriz de V, entonces el conjunto formado por las imágenes de los vectores de S, es una familia generatriz del conjunto Im(f); y si además la función f es suryectiva, se verifica que Im(f) = W, luego f∗(S) es una familia generatriz de W.

1. ⇒ a)

Ya que todo espacio vectorial V tiene al menos una base B, y por tanto un conjunto de generadores, aplicando la hipótesis resulta que f∗(B) es un conjunto de generadores para W. De nuevo, según el Teorema anterior, f∗(B) es siempre un conjunto de generadores para Im(f). Como conclusion, W = Im(f) y por tanto f es suryectiva.

Teorema 5

***Para toda transformación lineal f definida de un espacio vectorial V, en un espacio vectorial W, son equivalentes las siguientes afirmaciones:***

1. ***La función f es inyectiva.***
2. ***N(f) = {}.***
3. ***Para toda familia S libre de V, resulta que f∗(S) es una familia libre de W.***

Demostración

1. ⇒ b)

Si u es un vector que pertenece al N(f) , se cumple que f(u) = . Como f es transformación lineal se cumple que f() = , y como f es inyectiva, f(u) = f() = , luego u = , por lo tanto N(f) = {}.

1. ⇒ c)

Si N(f) = {} y S = {u1, u2, … ,ur, ….} una familia libre de vectores de V, entonces hay que probar que el conjunto f∗(S) = {f(u1), f(u2),...,f(ur),...} es una familia libre de vectores de W.

Dada la combinación trivial de los vectores del conjunto f∗(S):

k1f(u1) +...+ knf(un) =

por linealidad de f: (k1.u1) +...+ f(kn.un) = f(k1.u1+...+ kn.un) = 

es decir que el vector k1.u1+...+ kn.un pertenece al N(f), y ya que N(f) = {}, esto implica que

k1.u1+...+ kn.un = 

Pero los vectores u1, u2, … ,ur son linealmente independientes por hipótesis, luego k1= k2=…=kr =0

Luego el conjunto f∗(S) es una familia libre de W.

1. ⇒ a)

Si para toda familia S libre de V, resulta que f∗(S) es una familia libre de W, entonces hay que probar que la función f es inyectiva, es decir si f(u) = f(v), hay que deducir que u = v.

La hipótesis f(u) = f(v) se puede reescribir de modo equivalente como f(u − v) = . La única posibilidad de que esta hipótesis sea compatible con la proposición c), es que u−v = 0 , pues de lo contrario, la función f transformaría el conjunto linealmente independiente {u − v} formado por un solo vector no nulo, en el conjunto {}, que es linealmente dependiente. Luego u−v = 0, es decir u = v y por tanto la función f es inyectiva.

En el caso particular en el que dim ( V ) = dim (W) = n, se verifica el siguiente Corolario:

***Para dos espacios vectoriales V y W sobre IR, ambos de dimensión n, y una transformación lineal f definida de V en W, son equivalentes las siguientes proposiciones:***

***a) la función f es biyectiva.***

***b) la función f transforma una base para V en una base para W.***

***c) la función f es un isomorfismo de espacios vectoriales.***

Teorema 6

***Toda transformación lineal queda totalmente definida o determinada en cuanto se conocen las imágenes de los vectores de una base del espacio vectorial dominio.***

Demostración

Dados V y W dos espacios vectoriales sobre IR, y B = {v1, v2,...,vn} una base de V . Sea f definida de V en W una función lineal tal que se conoce que: f(v1) = u1, f(v2) = u2 ,…., f(vn) = un.

.

Puesto que B es una base de V, cualquier vector v de V se puede expresar como combinación lineal de los vectores de B. Si las componentes de v en la base B son v = (λ1, λ2,...,λn), es decir, v = λ1v1 + λ2v2 + ... + λnvn .

La imagen de v por la función f es: f(v) = f (λ1v1 + λ2v2 + ... + λnvn )

por la linealidad de f: f(v) = f (λ1v1 ) + f (λ2v2 ) + ... + f (λnvn )

f(v) = λ1 f (v1 ) + λ2 f (v2 ) + ... + λn f (vn )

reemplazando, resulta: f(v) = λ1 u1+ λ2 u2+ ... + λn un

**Matriz asociada a una transformación lineal**

Sea f una transformación lineal definida de V en W, espacios vectoriales finitos de dimensión n y m respectivamente, y B = {e1, e2, ….en} una base de V y B´={e´1, e´2, …em} una base de W, se puede determinar la matriz A asociada a la transformación lineal f, de la siguiente manera:

Se buscan las imágenes de los vectores de la base B por la transformación lineal f, es decir:

f(e1 ) = u1 , f(e2 ) = u2, …….. f(en ) = un

Luego se realiza el cambio de base para cada vector ui  a la base B´, obteniendo así:

u1 = a11 e1+a21 e2+…..+am1 em = (a11, a21,…..,am1) = v1

u2 = a12 e1+a22 e2+…..+am2 em =(a12, a22,…..,am2) = v2

…………………………….

un = a1n e1+a2n e2+…..+amn em = (a1n, a2n,…..,amn) = vn

Se forma la matriz A de orden mxn, asociada a la trasformación lineal f, cuyas columnas son las componentes de los vectores vi.

A B B’ = ****

A es la matriz de f con respecto a las bases B y B’.

Nota

El número de filas (m) de la matriz A coincide con la dimensión del espacio W, y el número de columnas (n) con la dimensión del espacio domino V. La matriz de una transformación lineal f definida de V en W, depende de las bases seleccionadas, si las bases de V y W son las bases canónicas, la matriz A se denomina **matriz estándar** para f.

* *Sugerencia: realizar los Ejercicios 13, 14 y 15.*

El estudio de las transformaciones lineales se reduce al estudio de su matriz asociada, es decir, si se conoce la matriz A asociada a una transformación lineal se puede determinar la función f del siguiente modo:

Sea la matriz A =,asociada a la transformación lineal f, la imagen de cualquier vector X=de V, se obtiene del producto de A.X = = luego f definida de V en W, está dada por f()= 

También se suele escribir como:

[f(x)] B’ = A. [x]B

* *Sugerencia: realizar los Ejercicios 16, 17, 18, 19, 20, 21y 22.*

**Semejanza de matrices asociadas a una transformación lineal**

La matriz de una función lineal f definida de un espacio vectorial V en V, depende de la base seleccionada para V. Uno de los problemas fundamentales del Algebra Lineal es elegir una base para V que haga que la matriz de f sea tan sencilla como se pueda. A menudo este problema se resuelve encontrando primero una matriz de f, con relación a una base sencilla, como la base canónica. Sin embargo, no siempre este camino conduce a la matriz más sencilla de f, de modo que se busca cambiar la base a fin de simplificar la matriz y saber en qué forma un cambio de base afecta a la matriz de f.

Teorema 7

***Sea f una transformación lineal definida de V en V, siendo V un espacio vectorial de dimensión finita. Si A es la matriz de f con respecto a una base B, y A´ es la matriz de f con respecto a la base B´, entonces A´= P-1 A P, en donde P es la matriz de transición de B´ hacia B.***

Como A es la matriz asociada a la función f con respecto a la base B, y A’ es con respecto a la base B’, se cumple para todo X de V:

A. XB = f(x)B  y A’.XB’ = f(x)B’

A fin de ver cómo están relacionadas las matrices A y A’, sea P la matriz de transición de la base B’ hacia la B, de modo que P-1 es la matriz de transición de B haca B’. Así, entonces, utilizando la noción de cambio de base:

P.XB’ = X B y P-1.f(X)B = f(X) B’

Como A’. XB’ = f(X)B’ y P-1 .A. P.X B’ = f(X)B’

Se deduce que: P-1. A. P .X B’ = A’ X B’, para todo X de V, luego: P-1. A. P = A’

Definición

Si A y B son matrices cuadradas, se dice que B es semejante a A si existe una matriz P inversible, tal que B = P-1 . A . P.

Nota

La ecuación B = P-1 . A . P, se puede escribir como A = ( P-1) -1 . B. P -1 = P. B. P -1, lo cual indica que A es semejante a B. Por tanto, B es semejante a A si y solo si A es semejante a B, como consecuencia, simplemente se dice que A y B son semejantes.

Se concluye entonces, que dos matrices que representan la misma transformación lineal f definida de V en V con respecto a bases diferentes, son matrices semejantes.

* *Sugerencia: realizar los Ejercicios 23 y 24.*