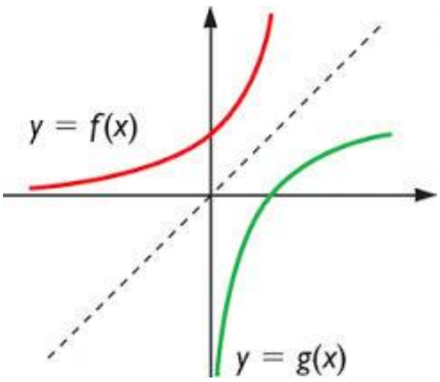
Ingreso 2020
Matemática

UNIDAD N°5 (parte A)
FUNCION EXPONENCIAL



El material que compone estas notas ha sido elaborado por la Prof. Estrellita Sobisch y revisado por las Profesoras Gisela Fitt y Celeste Scatragli, para brindarles a todos los estudiantes que cursen el módulo de Matemática, correspondiente al INGRESO de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Nacional de Cuyo, la posibilidad de revisar conceptos y habilidades de la disciplina adquiridos en el nivel medio, que son necesarios para poder cursar exitosamente las materias del Ciclo Básico.

Para el mismo se utilizaron las notas de clases de los docentes y como bibliografía principal:

- STEWART, J y Otros. (2001). *Precálculo (3ra ed.) México D. F., International Thomson Editores, S.A.*
- LARSON, Ron. (2012) Precálculo (8ª. Ed) México- Cengage Learning Editores, S.A.
- BIANCHINI, Edwaldo y otros-Vol. 1 (Primera ed.)- Brasil -Recife PE, Editora Moderna Ltda.

ÍNDICE

A. LA FUNCIÓN EXPONENCIAL

1. Introducción

Imaginemos que una institución bancaria tiene una tasa de interés fijo e igual a **i**% al mes para una determinada inversión. Supongamos que un inversor inicia con un capital de P pesos, una aplicación en este tipo de inversión. Vamos a analizar mes a mes el comportamiento de su saldo, suponiendo que no hace ninguna retirada de dinero.

Después del 1° mes tenemos:

Capital : $\boldsymbol{P}$

Interés : $\boldsymbol{P \cdot i}$

Saldo S(1) : $P + P \cdot i = \boldsymbol{P(1+i)}$

Después del 2° mes tenemos:

Capital : $\boldsymbol{P(1+i)}$

Interés : $[P(1+i)] \cdot i = \boldsymbol{P(1+i) \cdot i}$

Saldo S(2) : $P(1+i) + P(1+i) \cdot i = P(1+i) \cdot (1+i) = \boldsymbol{P(1+i)^2}$

Procediendo de la misma manera, llegaremos a la conclusión

Después del 3° mes tenemos un: **Saldo (3)** **S(3)=** $\boldsymbol{P(1+i)^3}$

Después del 4° mes tenemos un: **Saldo (4)** **S(4)=** $\boldsymbol{P(1+i)^4}$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Después del *enésimo* mes tenemos un: **Saldo(n)** **S(n)=** $\boldsymbol{P(1+i)^n}$

La fórmula utilizada **S(n)=** $\boldsymbol{P(1+i)^n}$ es una función del tipo exponencial, pues la variable $\boldsymbol{n}$ aparece en el exponente.

Hemos visto funciones del tipo

POLINOMIALES

$f(x) = x$

$f(x) = x^2$

$f(x) = x^3$

RACIONALES

$f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ Con $Q(x) \neq 0$

Variable en el exponente

Veremos ahora funciones con la variable en el exponente $\Rightarrow$ $y = f(x) = a^x$

Con la finalidad de estudiar esta función haremos un **breve repaso** de las propiedades de la potencia.

2. Potencia de exponente entero y exponente racional.

Recordemos que $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$ y $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} - \{0\}$

Resumen de las propiedades

Para $x \in \mathbb{R}^*$ e $y \in \mathbb{R}^*$; $a \in \mathbb{Q}$; $b \in \mathbb{Q}$

a. $x^a \cdot x^b = x^{a+b}$ (*Producto de potencias de igual base*)
b. $x^a \div x^b = x^{a-b}$ (*Cociente de potencias de igual base*)
c. $(x \cdot y)^a = x^a \cdot y^a$ (*Distributiva de la potencia con respecto al producto*)
d. $\left(\frac{x}{y}\right)^a = \frac{x^a}{y^a}$ (*Potencia de una expresión fraccionaria*)
e. $(x^a)^b = x^{a \cdot b}$ (*Potencia de otra potencia*)
f. $x^1 = x$
g. $x^0 = 1$
h. $(x)^{-a} = \left(\frac{1}{x}\right)^a$ (*Exponente negativo*)

Además de estas propriedades, si el exponente es un racional en su expresión fraccionaria, tenemos:

$(x)^{p/q} = \sqrt[q]{x^p}$; donde $p \in \mathbb{Z}$ y $q \in Z^*$ (o sea p es un entero y q es un entero positivo)

Ejemplo 1

Calcular, en caso de que sea posible a una sola potencia

a. $2^3 \cdot 2^4 = 2^{3+4} = 2^7 = 128$
b. $3^{\frac{3}{4}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{3}{4}+\frac{1}{2}} = 3^{\frac{5}{4}}$ o $\sqrt[4]{3^5} = 3\sqrt[4]{3}$
c. $5^4 \div 5^3 = 5^{4-3} = 5^1 = 5$
d. $3^5 \div 3^5 = 3^{5-5} = 3^0 = 1$
e. $2^4 \div 2^5 = 2^{4-5} = 2^{-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}$
f. $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{5}} \div \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{4}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{5}-\frac{3}{4}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{3}{20}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{3}{20}} = \sqrt[20]{\left(\frac{3}{2}\right)^3}$
g. $\left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^3 =$

(como tenemos bases diferentes, nos vemos obligados a hacer las cuentas)

$\left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{9}{16} \cdot \frac{8}{125} = \frac{9}{250}$

h. $\left(\frac{2}{5}\right)^{-2} \div \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{3}{4}} =$

(también tenemos bases diferentes, pero es posible obtener las mismas bases aplicando la propiedad del exponente negativo)

$\left(\frac{2}{5}\right)^{-2} \div \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{3}{4}} = \left(\frac{5}{2}\right)^2 \div \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{3}{4}} = \left(\frac{5}{2}\right)^{2-\frac{3}{4}} = \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{5}{4}} = \sqrt[4]{\left(\frac{5}{2}\right)^5} = \frac{5}{2}\sqrt[4]{\frac{5}{2}}$

Ejemplo 2

Efectuar:

a. $(a^3)^2 = a^{3 \cdot 2} = a^6$
b. $\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{3}{4}} = a^{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}} = a^{\frac{3}{8}} = \sqrt[8]{2^3} = \sqrt[8]{8}$

c. $2\cdot\sqrt[3]{(0{,}5)^2} = 2\cdot\sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}} = 2\cdot(2^{-1})^{\frac{2}{3}} = 2\cdot 2^{-\frac{2}{3}} = 2^{1-\frac{2}{3}} = 2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$

d. $2^{-x}\div 2^{x} = 2^{-x-x} = 2^{-2x}$

e. $3^{\frac{1}{3}}\cdot\sqrt{3} = 3^{\frac{1}{3}}\cdot 3^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}} = 3^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{3^5}$

Ejercicios propuestos

1. Reduzca a una sola potencia:

a. $a^5\cdot a^4\cdot a\cdot a^{-3}$

b. $\left(\frac{1}{2}\right)\div\left(\frac{1}{2}\right)^2$

c. $\left(\frac{2}{5}\right)\div\left(\frac{2}{5}\right)^{-2}$

d. $x\div x^3$

2. Efectúe

a. $\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^0$

b. $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$

c. $3^{x-2}\div 3^{x-3}$

d. $(0{,}2)^4\cdot 5^4\cdot(0{,}2)^{-2}$

3. Potencia de exponente real.

Es importante saber que las propiedades de las potencias para exponentes racionales permanecen válidas para exponentes irracionales.

Recordando que la unión de los números racionales $\mathbb{Q}$, con los irracionales I, o sea $\mathbb{Q}\cup\mathrm{I}$, dá como resultado los números reales $\mathbb{R}$, tenemos:

Las propiedades de las potencias para exponentes racionales permanecen válidas para exponentes reales (si la base es positiva).

Observación:

- En el caso particular de α real y positivo, tenemos $0^{\alpha}=0$
- Sin embargo 0^0 es una indeterminación.

Ejemplos

Calcular:

a. $3^{\sqrt{2}}\cdot 3^5 = 3^{\sqrt{2}+5}$

b. $5^{3\pi}\div 5^{2\pi} = 5^{3\pi-2\pi} = 5^{\pi}$

c. $\left(\frac{3}{4}\right)^{\sqrt{5}}\div\left(\frac{3}{4}\right)^{\sqrt{5}} = \left(\frac{3}{4}\right)^{\sqrt{5}-\sqrt{5}} = \left(\frac{3}{4}\right)^0 = 1$

Ejercicios propuestos

3. Calcule:

a. $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$ b. $\left(\sqrt{2}\right)^{-2}$ c. $0^{\frac{3}{5}}$ d. $\left(\frac{2}{3}\right)^{-0{,}1}$

4. Calcule:

a. $\left(\sqrt{5}\right)^{\frac{2}{3}}$ b. $\sqrt{3\cdot\sqrt{2}}$ c. $\pi^{-2}\cdot\pi\cdot\pi^3$ d. $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2$ e. $\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)^2$

f. $3\cdot 3^{\pi}$ g. $2^{\sqrt{2}}\div 2^{\sqrt{2}}$ h. $(2^{\pi})^3$ i. $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)$

4. La Función Exponencial – Definición.

Recordando el ejemplo de la introducción, podemos definir la función exponencial así:

Sea $\boldsymbol{a}$ un número real positivo y diferente de 1 ($a \in \mathbb{R}_+^*$ y $a \neq 1$) definimos la función exponencial con base $\boldsymbol{a}$ a la función

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ definida por $f(x) = a^x$

Son ejemplos de funciones exponenciales:

a. $f(x) = 5^x$ (en este caso la base es 5)
b. $f(x) = (0{,}4)^x$ (en este caso la base es 0,4)
c. $f(x) = \left(\sqrt{5}\right)^x$ (en este caso la base es $\sqrt{5}$)

TRABAJO PRÁCTICO N° 5

Ejercicio 1. En las siguientes funciones definidas, identifique las que son funciones exponenciales.

a) $y = 10^x$ b) $f(x) = x^{10}$ c) $y = 10x$

d) $y = \frac{10}{x}$ e) $f(x) = (0{,}1)^x$ f) $y = \frac{2^x}{3^x}$

Si la base a es 10, la misma se conoce como **base decimal** y la función $f(x) = 10^x$ se conoce como **función exponencial decimal**, haciendo referencia a la base 10.

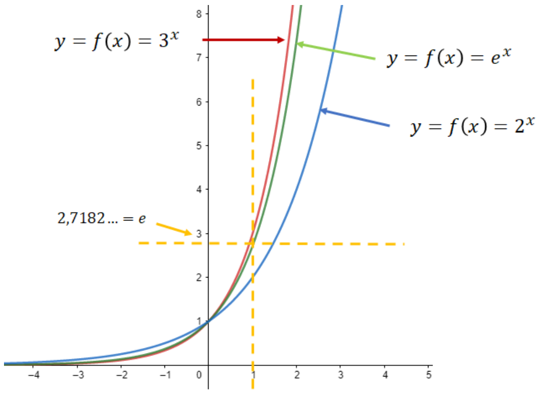
En numerosas aplicaciones, la opción más adecuada para una base es el número irracional

$$e = 2.718281828 \ldots$$

conocido como número *neperiano.*

Recuerde que $2 < e < 3$

Cuando este número es usado como base de la potencia, la función dada por $f(x) = e^x$ recibe el nombre de **función exponencial natural**. Su gráfica se ilustra en la siguiente figura y se compara con las funciones exponenciales de base 2 y 3



Asegúrese de ver que para la función exponencial $f(x) = e^x$, $\boldsymbol{e}$ sea la constante 2.718281828 …, mientras $\boldsymbol{x}$ sea la variable.

Para todos los otros casos es sólo llamada **función exponencial**.

5. Gráfico de la Función Exponencial.

Las gráficas de todas las funciones exponenciales tienen características semejantes.
Analizaremos la imagen de la gráfica de funciones exponenciales a través de algunos ejemplos.

Ejemplo 1

$y = f(x) = 2^x$

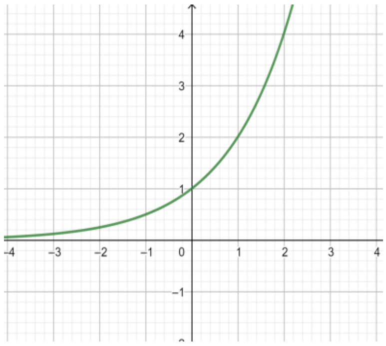
Construimos una tabla de valores con los puntos pertenecientes al gráfico cartesiano de la función, atribuyendo valores arbitrarios a x y, enseguida, calculando el valor de $f(x)$ para cada uno de esos valores. Ejemplo:

$y = f(-2) = 2^{-2} = {}^1\!/_4$; $y = f(-1) = 2^{-1} = {}^1\!/_2$; $y = f(0) = 2^0 = 1$

$y = f(1) = 2^1 = 2$; $y = f(2) = 2^2 = 4$

x	$f(x) = 2^x$
-2	${}^1\!/_4$
-1	${}^1\!/_2$
0	1
1	2
2	4

Tabla



Gráfico

Observamos que cuanto menor es el valor de x, más los puntos del gráfico de la función se aproximan del *eje* x, sin embargo, no llega a tocarlo nunca. La recta sostén del *eje* x, por este motivo es llamada de asíntota a la curva; palabra que viene del latín "*asymptota"* que significa "línea" .

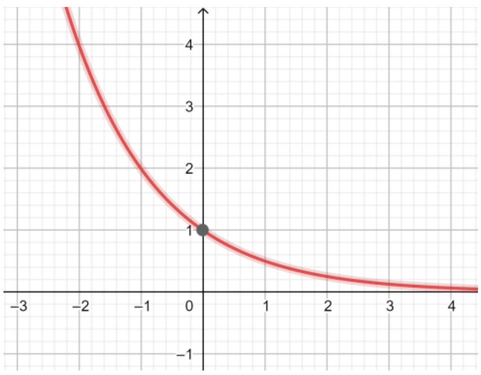
Ejemplo 2

$$y = f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

Procediendo del mismo modo que en el ejemplo anterior, tenemos:

x	$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
-2	4
-1	2
0	1
1	${}^1\!/_2$
2	${}^1\!/_4$

Tabla



Gráfico

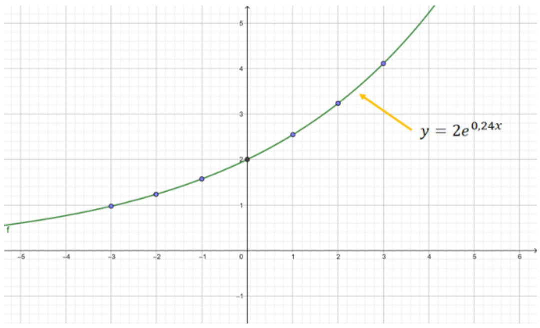
Observamos que cuanto mayor es el valor de x, más los puntos del gráfico de la función se aproximan del *eje* x, sin embargo, no llega a tocarlo nunca. Por este motivo, la recta sostén del *eje* x, es una asíntota a la curva.

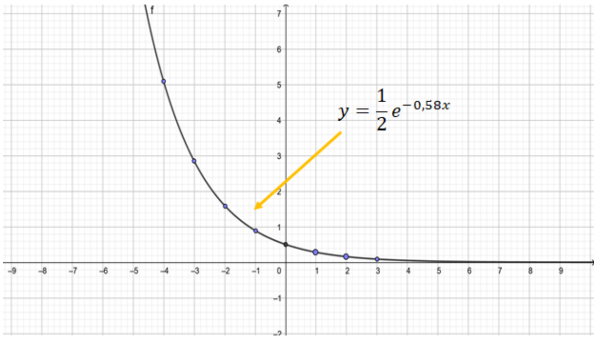
Ejemplos 3: Función exponencial natural

Trace la gráfica de cada una de las funciones exponenciales naturales.

a) $y = 2e^{0,24x}$

b) $y = \frac{1}{2}e^{-0,58x}$





♦

De lo expuesto anteriormente podemos clasificar la función $y = f(x) = a^x$ en:

- Creciente si $a > 1$
- Decreciente cuando $0 < a < 1$

Caracterización de la Función Exponencial:

Podemos resumir las propiedades de la gráfica de la función $f(x) = a^x$

1. Dominio: $\mathbb{R}$
2. Imagen: $\mathbb{R}_+^*$ (reales positivos)
3. Siempre pasa por $P(0, 1)$
4. La función es inyectiva, o sea que: $f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$
5. La función es sobreyectiva, o sea que: $\forall\, y \in \mathbb{R}_+^*$, $existe\ x \in \mathbb{R}\ tal\ que\ y = a^x$
6. De (4) y (5) podemos decir que la función es biyectiva.
7. Si $a > 1$, la función es creciente, o sea: $x_1 > x_2 \Longrightarrow a^{x_1} > a^{x_2}$
8. Si $0 < a < 1$, la función es decreciente, o sea: $x_1 > x_2 \Longrightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$
9. El $eje\ x$ es asíntota de la gráfica.

Como hemos visto en los ejemplos y ejercicios anteriores se puede ver que la gráfica de una función exponencial es siempre creciente o decreciente. En consecuencia, las gráficas pasan la prueba de la recta horizontal y, por tanto, las funciones son uno a uno o inyectivas.

Se puede usar la propiedad biunívoca para resolver ecuaciones exponenciales sencillas.

TRABAJO PRÁCTICO N° 5

Ejercicio 2. Represente gráficamente las siguientes funciones (utilice los conceptos aprendidos sobre desplazamiento de gráficas)

b) $y = 3^x - 1$ b) $y = 2^{x+1}$ c) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}$ d) $y = 1 + 2^x$

TRABAJO PRÁCTICO N° 5

Ejercicio 3. Verifique si las funciones abajo son crecientes o decrecientes en $\mathbb{R}$. Justifique

	$a)\ f(x) = (1{,}6)^x$		$b)\ y = 10^x$		$c)\ f(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^x$
	$d)\ y = (10^{-1})^x$		$e)\ f(x) = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^x$		$f)\ y = \pi^x$
	$g)\ y = \left(\sqrt{2} - 1\right)^x$		$h)\ y = \left(\frac{3}{\sqrt{5}}\right)^{-x}$		$i)\ y = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{-x}$

Ejercicio 4. La función $f(x) = 5^x$ es una función exponencial con base ………………… Evalúe la función en los siguientes casos:

a. $f(-2) =$

b. $f(0) =$

c. $f(2) =$

d. $f(6) =$

Ejercicio 5. Trace la gráfica de la función haciendo una tabla de valores. Use calculadora si es necesario.

a. $f(x) = 3^x$

b. $h(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

Ejercicio 6. Grafique ambas funciones en un conjunto de ejes.

a. $f(x) = 2^x$ y $g(x) = 2^{-x}$

b. $f(x) = 4^x$ y $g(x) = 7^x$

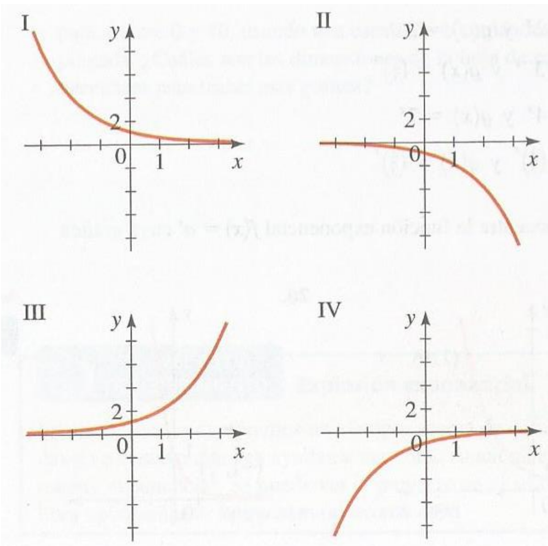
Ejercicio 7. Relacione cada función exponencial con su gráfica.

a. $f(x) = 2^x$

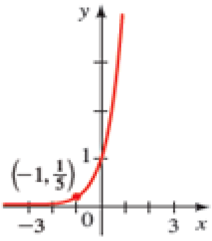
b. $f(x) = 2^{-x}$

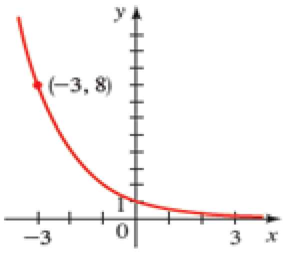
c. $f(x) = -2^x$

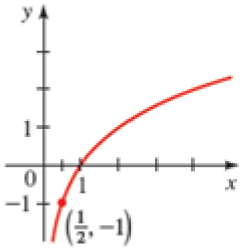
d. $f(x) = -2^{-x}$

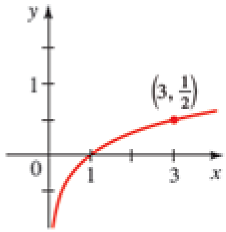


Ejercicio 7. Encuentre la función exponencial $f(x) = a^x$ cuya gráfica nos dan.

a) 

b) 

c) 

d) 

Ejercicio 8. Grafique la función, no localizando puntos sino empezando desde las gráficas modelos y haciendo las transformaciones adecuadas.

a) $f(x) = -3^x$

b) $g(x) = 2^x - 3$

c) $h(x) = 4 + \left(\frac{1}{2}\right)^x$

Ejercicio 9. Encuentre las funciones $f \circ g$ y $g \circ f$; y determine sus dominios.

$$f(x) = 2^x \ , \quad g(x) = x + 1$$

6. Ecuaciones Exponenciales.

Llamamos de ecuación exponencial a toda ecuación que presenta la incógnita en el exponente. Son ejemplos de ecuaciones exponenciales:

$3^x = 1 \quad ; \quad 5^{x-3} = 10 \cdot 2^{x-1} \quad ; \quad \pi^x = 3$

Resolver una ecuación exponencial significa encontrar el valor (o valores) de la incógnita que haga la ecuación una sentencia numérica verdadera. Por ejemplo, en la ecuación $2^x = 32$, el valor $x = 5$ es una raíz, pues $2^5 = 32$.

Es posible transformar (a través de las propiedades) algunas ecuaciones en otras equivalentes que posean, en ambos miembros, potencias de la misma base (mayor que cero y distinto de 1). Obtenido esto, y recordando que la función $y = a^x$ es inyectiva, llegamos a una ecuación que envuelve solamente los exponentes de los dos miembros.

Cuando no es posible obtener potencias de la misma base en los dos miembros, utilizaremos otros métodos, en especial los **Logaritmos**.

En esta parte del curso, **no** haremos uso de los logaritmos para resolver las ecuaciones exponenciales.

Observe con detenimiento los ejemplos de ecuaciones exponenciales, siendo $\mathcal{U} = \mathbb{R}$. Es importante que preste atención a cómo se puede reducir, en estos casos, a la misma base, para resolver la ecuación.

Ejemplo 1

Resolver la ecuación $\mathbf{3^x = 9}$

Solución

$3^x = 9$

$3^x = 3^2$ expresamos el 9 en la base 3

$x = 2$ por la propiedad biunívoca

El conjunto solución es $S = \{2\}$

Compruebe su respuesta:

Para $x = 2$

$3^2 = 9$ ✅

Ejemplo 2

Resolver la ecuación $\mathbf{\sqrt{3} = 27^x}$

Solución

Como $\sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}}$ y $27 = 3^3$, tenemos:

$3^{\frac{1}{2}} = (3^3)^x \Rightarrow 3^{\frac{1}{2}} = 3^{3x}$

$3x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x = \dfrac{1}{6}$

El conjunto solución es $S = \left\{\frac{1}{6}\right\}$

Compruebe su respuesta:

Para $x = {}^{1}\!/_{6}$

$27^{1/6} = \sqrt[6]{27} = \sqrt[6]{3^3} = \sqrt{3}$ ✅

Ejemplo 3

Resolver la ecuación $\mathbf{\left(\frac{2}{3}\right)^{5x} = \left(\frac{27}{8}\right)}$

Solución

Como $\frac{27}{8} = \frac{3^3}{2^3} = \left(\frac{3}{2}\right)^3 \Rightarrow \frac{27}{8} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$, entonces:

$\left(\dfrac{2}{3}\right)^{5x} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{-3} \Rightarrow 5x = -3 \Rightarrow x = -\dfrac{3}{5}$

El conjunto solución es $S = \left\{-\frac{3}{5}\right\}$

Compruebe su respuesta:

Para $x = -{}^{3}\!/_{5}$

$\left(\frac{2}{3}\right)^{5\left(-\frac{3}{5}\right)} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{3}{2}\right)^{3} = \frac{27}{8}$ ✅

TRABAJO PRÁCTICO N° 5

Ejercicio 10. Siendo $\mathcal{U} = \mathbb{R}$, resuelva las ecuaciones exponenciales

a) $5^x = 125$	b) $81 - 3^x = 0$	c) $125 \cdot 5^x - 1 = 0$
d) $2^x = \sqrt{2}$	e) $\sqrt{8^x} = 64$	f) $8^x = \sqrt[5]{64}$

Ejemplo 4

Resolver la ecuación $\mathbf{2^x + 2^{x+1} = 24}$

Solución

La ecuación puede ser escrita así: $2^x + 2^x \cdot 2 = 24$

Sustituyendo 2^x por y

$y + 2y = 24$

$3y = 24 \Rightarrow y = 8$

$2^x = 8 = 2^3 \Rightarrow x = 3$

El conjunto solución es $\boldsymbol{S = \{3\}}$

Compruebe su respuesta:

Para $x = 3$

$2^3 + 2^{3+1} = 8 + 16 = 24$ ✅

Ejemplo 5

Resolver la ecuación $\mathbf{3 \cdot 2^{x+1} - 4 \cdot 2^{x-2} - 6 \cdot 2^x = -4}$

Solución

Como $2^{x+1} = 2 \cdot 2^x$ y $2^{x-2} = \frac{2^x}{2^2} = \frac{2^x}{4}$

$3 \cdot 2^{x+1} - 4 \cdot 2^{x-2} - 6 \cdot 2^x = -4$

$3 \cdot 2 \cdot 2^x - 4 \cdot \frac{2^x}{4} - 6 \cdot 2^x = -4$

$6 \cdot 2^x - 2^x - 6 \cdot 2^x = -4$

$-2^x = -4$

$2^x = 2^2 \Rightarrow x = 2$

El conjunto solución es $\boldsymbol{S = \{2\}}$

Compruebe su respuesta:

Para $x = 2$

$3.2^{2+1} - 4.2^{2-2} - 6.2^2$

$= 3.8 - 4.1 - 6.4 = -4$ ✅

Ejemplo 6

Resolver la ecuación $\mathbf{9^x = \left(\frac{1}{3}\right)^{x^2 - x}}$

Solución

Como $9 = 3^2$ y $\frac{1}{3} = 3^{-1}$, entonces:

$(3^2)^x = (3^{-1})^{x^2-x}$

$3^{2x} = (3)^{x-x^2}$

$2x = x - x^2$

$x^2 + x = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ ó $x_2 = -1$

El conjunto solución es $\boldsymbol{S = \{-1, 0\}}$

Compruebe su respuesta:

Para $x = -1$

$9^{-1} = \frac{1}{9}$ $\quad \left(\frac{1}{3}\right)^{(-1)^2-(-1)} = \frac{1}{9}$ ✅

Para $x = 0$

$9^0 = 1$ $\quad \left(\frac{1}{3}\right)^{(0)^2-(0)} = 1$ ✅

TRABAJO PRÁCTICO N° 5

Ejercicio 10. Siendo $\mathcal{U} = \mathbb{R}$, resuelva las siguientes ecuaciones exponenciales

a) $3^{x-4} + 3^x = \frac{82}{27}$ b) $\left(\frac{0,5}{3}\right)^{3x-2} = 1$ c) $\sqrt[5]{2^{3x}} = \sqrt[6]{2^{2x-4}}$

d) $2^{x+2} + 2^x = 80$ e) $\frac{5^{5x}}{5^4} = \left(\frac{1}{5}\right)^{x+1}$ f) $\frac{8^x}{4^{x-1}} = 2^{x+2}$

g) $\sqrt[4]{4^{x-2}} - \sqrt[5]{8^{x+2}} = 0$ h) $4 \cdot 5^{3-2x} = (0,1)^{-2}$ i) $4^{\frac{x-2}{3}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2\cdot\left(\frac{2x+1}{4}\right)}$

Ejemplo 7

Resolver la ecuación $\mathbf{4^x - 3 \cdot 2^{x-1} - 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2-x} = 10 + 2 \cdot 2^{x+1}}$

Solución

Analizaremos los términos de ambos miembros por separado y luego los sustituiremos en la ecuación exponencial.

Así:

$$4^x = (2^2)^x = 2^{2x} = (2^x)^2 \qquad (1)$$

$$\mathbf{2^{x-1} = \frac{2^x}{2}} \qquad (2)$$

$$\frac{1}{2} = 2^{-1} \qquad (3)$$

$$2^{x+1} = 2^x \cdot 2 \qquad (4)$$

Sustituyendo en la ecuación dada, tenemos:

$$4^x - 3 \cdot 2^{x-1} - 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2-x} = 10 + 2 \cdot 2^{x+1}$$

$$(2^x)^2 - 3 \cdot \frac{2^x}{2} - 5 \cdot (2^{-1})^{2-x} = 10 + 2 \cdot 2^x \cdot 2$$

Reescribiendo:

$$(2^x)^2 - \frac{3}{2} \cdot \mathbf{2^x} - 5 \cdot (2)^{x-2} = 10 + 4 \cdot 2^x \qquad (5)$$

Como $(2)^{x-2} = \frac{2^x}{2^2} = \frac{2^x}{4}$ (6)

Reemplazando (6) en (5) y reescribiendo

$$(2^x)^2 - \frac{3}{2} \cdot \mathbf{2^x} - \frac{5}{4} \cdot 2^x = 10 + 4 \cdot 2^x \qquad (7)$$

Si hacemos $2^x = y$ (8)

Reemplezamos (8) en (7)

$$(y)^2 - \frac{3}{2} \cdot \boldsymbol{y} - \frac{5}{4} \cdot y = 10 + 4 \cdot y$$

Multipliquemos por 4 ambos miembros para eliminar las fracciones y trabajar con coeficientes enteros.

$4 \cdot [(y)^2 - \frac{3}{2} \cdot \boldsymbol{y} - \frac{5}{4} \cdot y] = 4 \cdot [10 + 4 \cdot y]$

$4y^2 - 6\boldsymbol{y} - 5y = 40 + 16y$ Distributiva en ambos miembros

Efectuando las operaciones algebraicas necesarias, tenemos:

$4y^2 - 27\boldsymbol{y} - 40 = 0$ (9)

Las raíces de (9) son $y_1 = 8$ e $y_2 = -\frac{5}{4}$

Para $y_1 = 8$, en (8) tenemos: $2^x = 8 \Rightarrow 2^x = 2^3 \Rightarrow x = 3$

Para $y_2 = -\frac{5}{4}$, en (8) tenemos: $2^x = -\frac{5}{4}$, lo cual es imposible pues el rango de la función exponencial son los reales positivos, o sea, $a^x > 0$ para todo x real

Por lo tanto, el conjunto solución es: $\boldsymbol{S = \{3\}}$

<u>Compruebe su respuesta:</u>

Para $x = 3$

$4^3 - 3.2^{3-1} - 5.\left(\frac{1}{2}\right)^{2-3} = 64 - 12 - 10 = 42$

$10 + 2.2^{3+1} = 10 + 32 = 42$ ✅

TRABAJO PRÁCTICO N° 5

Ejercicio 11. Siendo $\mathcal{U} = \mathbb{R}$, resuelva las siguientes ecuaciones exponenciales

$a)\ 5^{x-2} + 3 \cdot 5^{x+1} = 351 + 5^x$

$b)\ 4^x = 10 \cdot 2^x - 16$

Ejercicio 12. Se α y β son números reales y $2^\alpha = m$ y $2^\beta = n$, entonces $4^{\alpha-\beta}$ es igual a

a) $2 \cdot (m - n)$ b) $\frac{m-n}{2}$ c) $-\frac{m}{n}$ d) $\frac{m^2}{n^2}$ e) $2^{\frac{m}{n}}$