**Unidad 3: Vectores geométricos del plano y del espacio**

**Cuplas puntuales**

Consideramos P al conjunto de puntos del plano. Una cupla puntual (a,b) es un par ordenado de puntos del plano P, es decir: (a,b) ϵ PXP

 a es el *origen* de la cupla

 b es el *extremo* de la cupla

 b

 a

Toda cupla puntual determina una recta del plano denominada *recta sostén*.

 D

 b

a

Cupla nula

Es la cupla que posee su origen y extremo en el mismo punto, es decir: (a, a)

 a

Cuplas alineadas

Se refiere a cuplas que poseen la misma recta sostén.

 a b c d

Cuplas consecutivas

Se refiere a cuplas en las cuales el extremo de una coincide con el origen de la otra.

 a b = c d

 b

 a d

Cuplas iguales

Dos cuplas puntuales son iguales cuando sus respectivos orígenes son iguales y sus extremos también.

 (a, b) = (c, d) ⇔ (a = c ∧ b = d)

 a = c b = d

**Equipolencia de cuplas puntuales**

1º caso: Cuplas puntuales no alineadas y no nulas.

 a b

 c d

Dos cuplas no alineadas y no nulas son equipolentes cuando al conectarse sus orígenes entre sí y sus extremos entre sí, determinan un paralelogramo. Es decir: (a,b) ~ (c,d) si y solo si abdc es un paralelogramo.

Contraejemplo: (x,y) ~ (z,t), ya que no forman un paralelogramo.

 x y

 t z

2º caso: Cuplas puntuales no nulas y alineadas.

 a b c d

 e f

Dos cuplas puntuales no nulas y alineadas son equipolentes cuando se pueden conectar mediante dos paralelogramos: (a,b) ~ (c,d)

3º caso: Cuplas puntuales nulas.

Las cuplas nulas son equipolentes entre sí, (a,a) ~ (b,b)

 a b

4º caso: Cuplas puntuales iguales.

Las cuplas iguales son equipolentes, (a,b) = (c,d) , si y solo si (a,b) ~ (c,d)

 a = c b = d

La relación de equipolencia definida entre cuplas puntuales, es una relación de equivalencia, es decir es reflexiva, simétrica y transitiva; esto permite obtener clases de equivalencias. Cada una de estas clases se denomina *vector libre*.

* *Sugerencia: realizar algún ejemplo del Ejercicio 1*

**Vectores fijos del plano**

En el plano P se fija un punto o, y se consideran todas las cuplas con origen en ese punto.

 O• a

 c

 b

 (o, a) =  (o,b) =  (o, c) = 

Cada cupla puntual (o, a) =  es un vector FIJO, y al conjunto de todos los vectores fijos de origen en el punto o, se lo denomina Vo,2.

Adición en Vo,2

En Vo,2 , la adición es una operación binaria e interna, cuyo esquema funcional es:

+: Vo,2 x Vo,2 → Vo,2

 (,) →+= 

Se denomina vector suma al vector resultante: =+.

1º caso: Cuplas puntuales no alineadas y no nulas.

o a

 b c += 

2º caso: Cuplas puntuales alineadas de igual sentido.

 o a b c

 += 

3º caso: Cuplas puntuales alineadas y de distinto sentido.

 += 

 a c o b

* *Sugerencia: realizar algún ejemplo del Ejercicio 2*

Multiplicación de un escalar por un vector de Vo,2

La multiplicación externa en Vo,2 es una operación binaria cuyo esquema funcional es:

• : IR X Vo,2 → Vo,2

 (k, ) →k • = 

Se denomina vector producto de un escalar por un vector, al vector resultante: = k• 

Si k = 1, entonces k •= 1. = 

Si k = -1, entonces k• = (-1). = - , denominado vector opuesto de .

- 

 b o a

Si k = 2, entonces k •= 2. 

2. 

 o a b

* *Sugerencia: realizar algún ejemplo del Ejercicio 3*

**Vectores fijos del espacio tridimensional**

Se considera al conjunto Vo,3, que es el conjunto de todas las cuplas puntuales del espacio tridimensional con origen en o.

Adición en Vo,3

En Vo,3 , la adición es una operación binaria e interna, cuyo esquema funcional es:

+: Vo,3 x Vo,3 → Vo,3

 (,) →+= 

Se denomina vector suma al vector resultante: =+.

Multiplicación de un escalar por un vector de Vo,3

La multiplicación externa en Vo,3 es una operación binaria cuyo esquema funcional es:

• : IR X Vo,3 → Vo,3

 (k, ) →k • = 

Se denomina vector producto de un escalar por un vector, al vector resultante: = k• 

De similar forma se puede extender a Vo,n.

Adición en Vo,n

En Vo,n , la adición es una operación binaria e interna, cuyo esquema funcional es:

+: Vo,n x Vo,n → Vo,n

 (,) →+= 

Se denomina vector suma al vector resultante: =+.

Multiplicación de un escalar por un vector de Vo,n

La multiplicación externa en Vo,n es una operación binaria cuyo esquema funcional es:

• : IR X Vo,n → Vo,n

 (k, ) →k • = 

Se denomina vector producto de un escalar por un vector, al vector resultante: = k• 

Propiedades de la suma en Vo,n

* Asociativa

(+) += +(+ ), siendo ,y  vectores de Vo,n

* Conmutativa

+= +, siendo  y vectores de Vo,n

* Elemento neutro

Existe el vector nulo de Vo,n, tal que para todo vector de Vo,n, se verifica que:

+= += 

* Elemento opuesto

Para todo vector de Vo,n, existe su vector opuesto -de Vo,n, tal que:

 + (-)= (-)+= 

Propiedades de la multiplicación de un escalar por un vector de Vo,n

|  |
| --- |
| Siendo  y vectores de Vo,n, y t y k escalares cualesquiera, se verifica que:* t.(+)= t.  + t.
* ( t+k) . = t. + k.
* (t.k). = t.(k. )
* 1. =

  |
| Nota: el producto de un número real t por un vector v es un nuevo vector t.v, que tiene la misma dirección que v, el mismo sentido que v si t > 0, o sentido opuesto si t < 0.  |

**Componentes y coordenadas de un vector fijo de IR2 y IR3**

En el plano IR x IR = IR2 es posible identificar a cada punto con un par de números reales que son sus coordenadas: consideremos que el punto a = (xa , ya ) y el punto o = ( xo , yo )

En el espacio IR x IR x IR = IR3 es posible identificar a cada punto con una terna ordenada de números reales, que son sus coordenadas: considere al punto a = (xa , ya , za) y el punto o = ( xo , yo , zo ).

Ahora bien las componentes de un vector u = , en el plano IR2 , se determinan como :

 u =  = (xa -xo , ya - yo)

De este modo, los vectores del plano quedan asociados de manera única con un par de números reales o, lo que es lo mismo, con un elemento (x, y) de IR2.

O bien u =  en el espacio IR3 se determina como:

 u =  = (xa -xo , ya - yo,za -zo )

Los vectores del espacio tridimensional quedan asociados de manera única con una terna de números reales o, lo que es lo mismo, con un elemento (x, y, z) de IR3.

Si las coordenadas del punto o fueran: o = (0, 0) en el plano IR2, o bien o = (0, 0, 0) en el espacio

IR3, las componentes del vector u coincidirían con las coordenadas del punto a, sólo en ese caso.

Las operaciones: suma de vectores y producto de un número real por un vector se expresan según sus componentes, de la siguiente manera:

Dados u = (x, y) de IR2 , y v = (x0 ,y0 ) de IR2 , la suma u+v es el vector de componentes: (x+x0 ,y+y0 ) (simplemente se suma componente a componente).

Dados v = (x, y) de IR2 y λ de IR, el producto λ.v es el vector de componentes: (λx,λy) (se multiplica el número por cada una de las componentes del vector original).

En general, se pueden definir la suma y el producto por un escalar real en el espacio IRn.

Dados u = (x1,..,xn) de IRn y v = (y1,..,yn) de IRn , la suma u+v es el vector de componentes (x1 +y1,...,xn +yn)

Dados v = (x1,...,xn) de IRn y λ de IR, el producto λ.v es el vector de componentes (λx1,...,λxn)

Es decir:

u + v = (x1,...,xn) + (y1,...,yn) = (x1 +y1,...,xn +yn)

λ .u = λ.(x1,...,xn) = (λx1,...,λxn)

Propiedades de la suma en IRn

* Asociativa

(u+v) + w= u+(v+w), siendo u,v y w vectores de IRn

* Conmutativa

 u+v= v+u, siendo u y v vectores de IRn

* Elemento neutro

Existe el vector nulo o = (0, 0, …, 0) de IRn, tal que para todo vector u de IRn, se verifica que:

 u + o = o + u = u

* Elemento opuesto

Para todo vector u de IRn, existe su vector opuesto – u de IRn, tal que:

 u + ( - u) = ( - u ) + u = o

Propiedades de la multiplicación de un escalar por un vector de IRn

|  |
| --- |
| Siendo u y v vectores de IRn, y t y k escalares cualesquiera, se verifica que:* t.( u + v) = t. u+ t.v
* ( t+k). u = t.u + k.u
* (t.k). u= t.(k.u)
* 1. u= u

  |

* *Sugerencia: realizar algún ejemplo de los Ejercicios 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 u 11*

**Norma o módulo de un vector y sus propiedades**

Existe una función que asigna a cada vector u de IRn , un número real, verificando ciertas condiciones. Esa función recibe el nombre de norma o módulo del vector:

|| || : IRn → IR

 u → || u ||

Condiciones:

Siendo u y v vectores de IRn y t un escalar real || u || ≥ 0 ∧ ( || u || = 0 ⇔ u = 0 )

 || t. u || = | t | . || u ||

 || u + v || ≤ || u || + || v || ( Desigualdad triangular)

Considerando IR2 y IR3 , que serán los espacios que se abordarán durante este curso, se define la norma o módulo usual de la siguiente manera:

Si u = ( x, y ) de IR2 , || u ||= + 

Si u = ( x, y, z ) de IR3 , || u ||= + 

Vectores normados:

Se denominan vectores normados o unitarios, a aquellos cuya norma o módulo es igual a uno, es decir u es un vector normado si || u || = 1

Si un vector v no nulo, tiene norma distinta de uno, es posible encontrar a partir de v un vector normado. Para ello es suficiente con multiplicar al vector v por el número real inverso de su norma o módulo, es decir:

v ≠ 0 y || v || ≠ 1, el vector w = es normado

* *Sugerencia: realizar algún ejemplo de los Ejercicios 12, 14, 15 u 16*

**Producto interior, punto o escalar y sus propiedades**

Existe una función tal que a cada par de vectores de IRn, le asigna un número real, cumpliendo ciertos requisitos, esta función recibe el nombre de producto escalar o producto interior.

• : IRn x IRn → IR

(u, v) → u • v

Condiciones: Para todo u, para todo v y para todo w del espacio IRn , y para cualquier t de IR

u • u ≥ 0 ∧ (u • u = 0 ⇔ u = 0 )

u • v = v • u

 u • (v + w ) = u • v + u • w

t. (u • v) = u • (t . v)

**Producto escalar usual o euclideo**

Considerando IR2 y IR3 ,el producto escalar usual se determina de la siguiente manera:

Si u = (x1, y1) de IR2  y v = (x2, y2) de IR2 u • v = x1.x2 + y1.y2

Si u = (x1, y1, z1) de IR3  y v = (x2, y2,z2) de IR3 u • v = x1.x2 + y1.y2 + z1.z2

Sea u de IRn, se verifica que: || u || 2 = u • u , es decir || u || = +

Si u = ( x, y ) de IR2 , || u || = += + 

Si u = ( x, y, z ) de IR3 , || u ||= += + 

* *Sugerencia: realizar algún ejemplo del Ejercicio 17*

**Ángulo entre vectores**

Dados dos vectores u y v de IRn , distintos del vector nulo, definimos el ángulo determinado por u y v, como el único ángulo ϕ obtenido: ϕ = arccos ( )

Es decir: **u • v = || u || . || v || . cos ϕ**

* *Sugerencia: realizar algún ejemplo del Ejercicio 21*

 **Vectores ortogonales**

Si el producto escalar entre dos vectores es cero, se dice que esos vectores son ortogonales:

 **u • v = 0 ⇔ u ⊥ v**

Si alguno de ellos fuera el vector nulo, el producto escalar indefectiblemente es cero, lo que indica que el vector nulo es ortogonal a cualquier otro vector.

* *Sugerencia: realizar algún ejemplo de los Ejercicios 18, 19, 20*

**Distancia entre vectores en función de la norma**

Sean dos vectores u y v de IRn , se define la distancia entre u y v, y se anota d(u, v):

 **d(u, v) = II u-v II = II v-u II**

Si u = (x1, y1) de IR2  y v = (x2, y2) de IR2

 d(u, v) = += +

Si u = (x1, y1, z1) de IR3  y v = (x2, y2,z2) de IR3

d( u, v ) = += +

**Producto cruz o vectorial de vectores del espacio tridimensional y sus propiedades**

Entre los vectores del espacio real IR3 ,existe una función denominada producto vectorial, que asigna a cada par de vectores un único vector que es ortogonal a ambos.

X : IR3 x IR3 → IR3

 (u, v) → u X v

Determinación de las componentes del vector u X v:

Si u = (u1, u2, u3) de IR3  y v = (v1, v2,v3) de IR3

**w = uXv = ( u2v3-u3v2, u3v1-u1v3, u1v2-u2v1 )**

o con la notación de determinantes:

w = uXv= ()

La recta sostén del vector u X v es perpendicular al plano que determinan u y v.

El sentido del vector u X v se determina a partir de la regla de la mano derecha, una representación gráfica de la situación es la siguiente:

 v

u X v

 v



 u u

 vXu

Propiedades del producto vectorial:

* uXv = - ( vXu)
* uX(v+w)= ( uXv)+(uXw)
* (u+v)Xw=(uXw)+(vXw)
* K(uXv)=(ku)Xv=uX(kv)
* uXO=OXu=O
* uXu=O
* *Sugerencia: realizar algún ejemplo de los Ejercicios 23, 24, 26*

**Producto mixto**

El producto mixto entre vectores de IR3 es el número real que se obtiene a través de la siguiente expresión:  **u • ( v X w ) = ( u X v ) • w**



 w

 v u

Si u = (u1, u2, u3) de IR3  , v = (v1, v2,v3) de IR3 y w = (w1, w2, w3) de IR3

##

## u • ( v X w ) = u1.(v2.w3 – w2.v3) + u2.( v3.w1 – w3.v1) + u3. (v1.w2 – w1.v2)

Este número real obtenido, representa el volumen del paralelepípedo determinado por los tres vectores u, v y w.

Teorema

***Si u y v son vectores de IR3, entonces:***

1. ***u•(uXv) = 0 ( uXv es ortogonal a u)***
2. ***v• (uXv) = 0 ( uXv es ortogonal a v)***
3. ***II uXv II 2 = II u II2 II v II2 – ( u • v)2 ( Identidad de Lagrange)***

Demostración

Sean u = (u1, u2, u3) de IR3  y v = (v1, v2,v3) de IR3

uXv = (u2v3-u3v2, u3v1-u1v3, u1v2- u2v1)

Por a)

u•(uXv)= (u1, u2, u3)• (u2v3-u3v2, u3v1-u1v3, u1v2- u2v1) = u1(u2v3-u3v2) + u2 (u3v1-u1v3) + u3 ( u1v2- u2v1) = 0

Recordando que || u || 2 = u • u

II u X v II 2 = (u X v) • (u X v) = (u2v3-u3v2)2 + ( u3v1-u1v3)2 + ( u1v2- u2v1)2

Además

IIu II2 . II v II2 – ( u • v)2 = ( u12+ u22+ u32) ( v12+ v22 + v32) – ( u1v1 +u2v2 + u3 v3)2

Al efectuar los productos y por propiedad distributiva, se puede llegar a la identidad de Lagrange

**II uXv II 2 = II u II2 II v II2 – (u • v)2**

La identidad de Lagrange, tiene una aplicación geométrica muy útil, ya que se puede demostrar que la norma o modulo del vector uXv coincide con el área del paralelogramo que determinan los vectores u y v.



 v

 u

Si ϕ denota el ángulo entre los vectores u y v, entonces u • v = || u || . || v || . cos ϕ , de modo que reemplazando en la identidad de Lagrange:

 II uXv II 2 = II u II2 II v II2 – (u • v)2

 II uXv II 2 = IIuII2 IIvII2 – ( || u || . || v || . cos ϕ )2

 II uXv II 2 = IIuII2 IIvII2 – || u ||2 . || v ||2 . cos2 ϕ

 II uXv II 2 = IIuII2 IIvII2 ( 1 - cos2 ϕ)

 II uXv II 2 = IIuII2 IIvII2 sen2 ϕ

Por tanto:

 **II uXv II = II u II .II v II sen ϕ**

En la figura anterior la medida de la altura del paralelogramo determinado por u y v, está dada por:

**II v II senϕ,**  por consiguiente el área de dicha figura es:

**Area = II u II .II v II .sen ϕ = II uXv II**

* *Sugerencia: realizar algún ejemplo del Ejercicio 27*