Estadísticas cuánticas

- Hasta ahora se ha hecho una física estadística semi-clásica
  - + las partículas tienen energías discretizadas
  - + el spin se agrega desde afuera

- Estadística totalmente cuántica: las partículas son fermiones o bosones
- Fermiones: espin semi-entero
- Función de onda de un sistema de dos partículas

$$\psi_F(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\varphi_1(x_1)\,\varphi_2(x_2) - \varphi_1(x_2)\,\varphi_2(x_1)\right)$$

+ Función de onda anti-simétrica
+ Ppio. de Pauli: no pueden haber dos partículas con los mismos números cuánticos

- Bosones: espin entero

$$\psi_B(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\varphi_1(x_1)\,\varphi_2(x_2) + \varphi_1(x_2)\,\varphi_2(x_1)\right)$$

No cumplen con el ppio. de exclusión

- Se analiza la estadística de un nivel de energía ε_i para ambos casos
- Gran función de partición:

$$\overline{\qquad\qquad} \; \varepsilon_i \begin{cases} F: 0 \text{ ó } 1 \\ B: 0, 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

$$Z_i^f = 1 + e^{-\beta(\varepsilon_i - \mu)} \quad \text{si son fermiones}$$

$$Z_i^b = 1 + e^{-\beta(\varepsilon_i - \mu)} + e^{-\beta 2(\varepsilon_i - \mu)} + e^{-\beta 3(\varepsilon_i - \mu)} + \dots$$

$$= \frac{1}{1 - e^{-\beta(\varepsilon_i - \mu)}}$$

- Esto es para un nivel discreto de energía. Si se tienen muchos niveles

$$Z_f = \prod_i \left(1 + e^{-\beta(\varepsilon_i - \mu)}\right) \quad \text{fermiones}$$

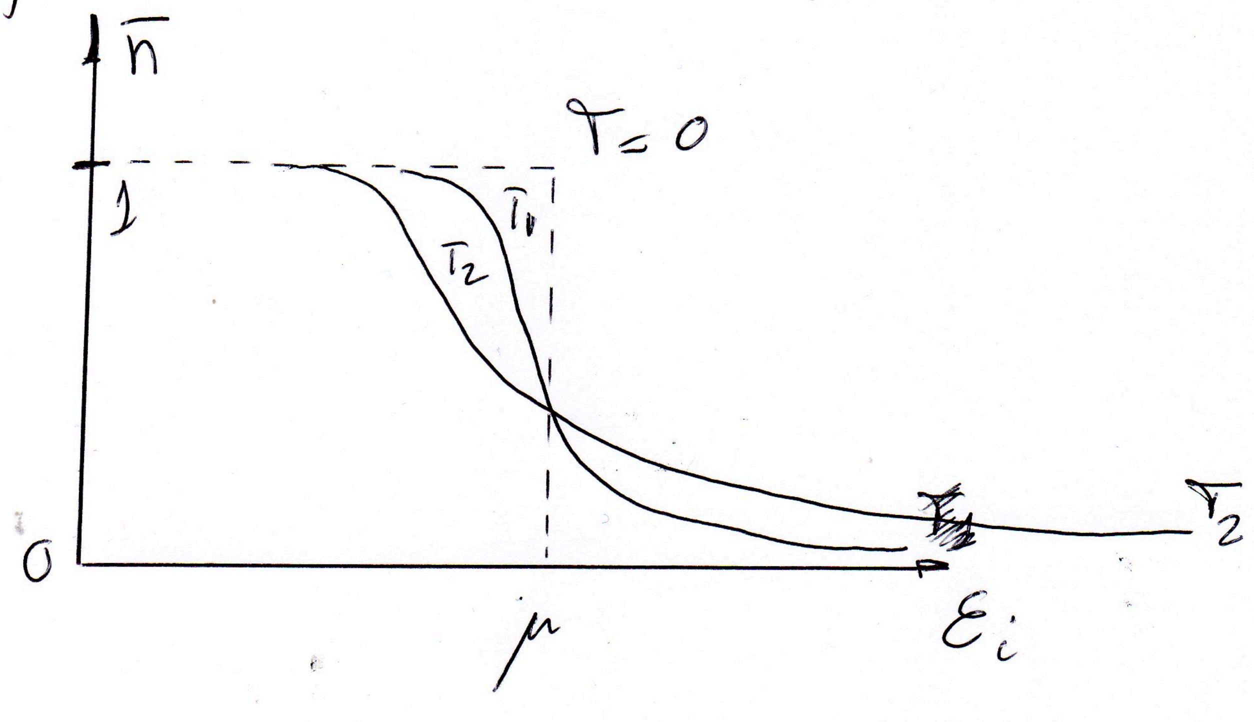
$$Z_b = \prod_i \left(1 - e^{-\beta(\varepsilon_i - \mu)}\right)^{-1} \quad \text{bosones}$$

- Si se mira un nivel de energía y ~~una~~ partículas <u>fermiónicas</u> se tiene:

$$\bar{n}_i = \frac{0}{Z_i} + \frac{1 \cdot e^{-\beta(\varepsilon_i - \mu)}}{Z_i}$$

$$\bar{n}_i = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_i - \mu)} + 1}$$

- Gráficamente



- Se llama energía de Fermi a

$$\varepsilon_F = \mu\,(T=0)$$

- Para bosones:

$$\overline{n_i} = \frac{0}{Z_i^b} + \frac{1 \cdot e^{-\beta(\varepsilon_i-\mu)}}{Z_i^b} + \frac{2 \cdot e^{-\beta 2(\varepsilon_i-\mu)}}{Z_i^b} + $$

$$+ 3 \frac{e^{-\beta 3(\varepsilon_i-\mu)}}{Z_i^b}$$

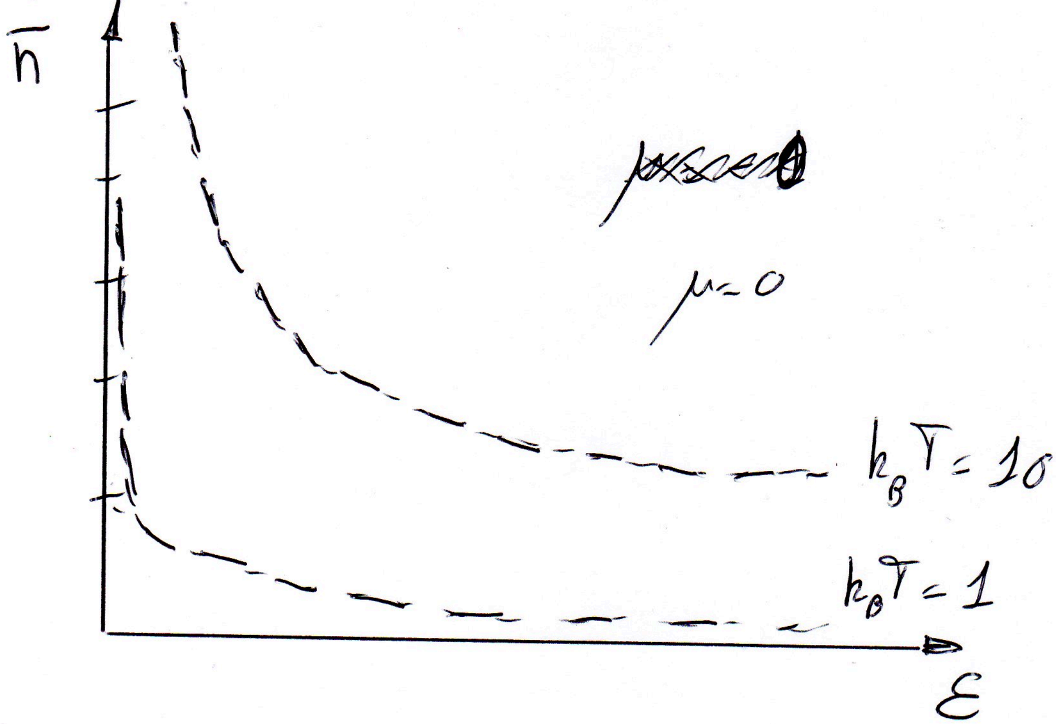
$$\overline{n}_i = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_i-\mu)} - 1}$$

Remark: para que se pueda sumar la serie geométrica es necesario que

$$e^{-\beta(\varepsilon_i-\mu)} < 1 \Rightarrow \{\varepsilon_i > \mu\}$$

Si el menor valor de la energía es cero, esto significa que ~~para~~ el potencial químico debe ser negativo.

Gráficamente:



- El número de ocupación del fundamental diverge $\Rightarrow$ condensación de Bose

Propiedades de gases ideales cuánticos

- Para un sistema con niveles de energía discreto

$$Z = \prod_i \left[1 \pm e^{-\beta(\varepsilon_i - \mu)}\right]^{\pm 1}$$

$$\bar{n}_i = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_i - \mu)} \pm 1}$$

- El gran potencial resulta:

$$\Psi = \mp k_B T \sum_i \ln\left[1 \pm e^{-\beta(\varepsilon_i - \mu)}\right]$$

- Si los niveles de energía están muy juntos

$$\sum \longrightarrow \int D(\varepsilon)$$

- Puesto que se trata de partículas materiales

$$D(\varepsilon) = \frac{V}{4\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2}\sqrt{\varepsilon}$$

- Entonces:

$$\Psi = \mp k_B T \int \frac{V}{4\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} \ln\left[1 \pm e^{-\beta(\varepsilon - \mu)}\right]\sqrt{\varepsilon}\, d\varepsilon$$

- Integrando por partes:

$$\Psi = -\frac{2}{3}\frac{V}{(2\pi)^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2}\int_0^{\infty}\frac{\varepsilon^{3/2}}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} \pm 1}\, d\varepsilon$$

- Para conocer con detalle las propiedades termodinámicas de un gas cuántico, hay que buscar formas de aproximar la ec. anterior, teniendo en cuenta que <u>no</u> se sabe cuánto vale μ

- Algunos resultados generales se pueden obtener sin conocer la solución exacta de la integral

$$U = \int_0^\infty \varepsilon\, n(\varepsilon)\, D(\varepsilon)\, d\varepsilon = -\frac{3}{2}\Psi$$

y también:

$$\Psi = -PV$$

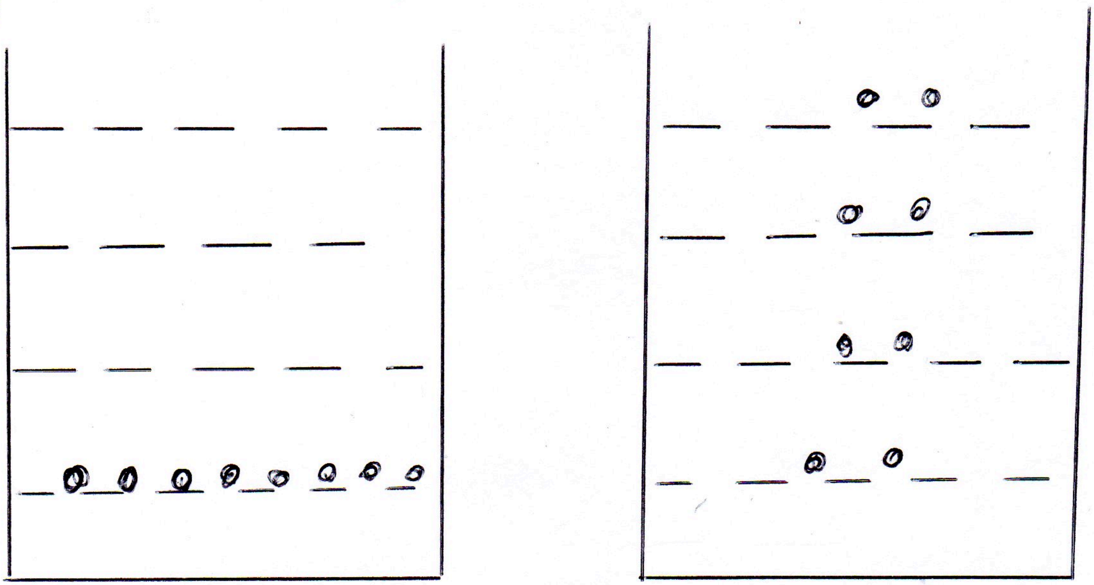
De donde se puede obtener la ecuación de estado:

$$\left\{ P = \frac{2}{3}\frac{U}{V} \right\}$$

- Observar que a $T=0$, $\mu \to 0$ para los bosones (todos se amontonan en el fundamental)

- Para los fermiones las cosas son distintas. En el fundamental sólo caben 2

$T = 0$



bosones

$\mu = 0 \Rightarrow P = 0$

fermiones

$\mu \neq 0 \Rightarrow P \neq 0$