Estadísticas cuánticas II

Reposo

- El número de ocupación para fermiones y bosones es

$$\overline{n}_i = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_i - \mu)} \pm 1}$$

- La ecuación de estado de un gas cuántico es

$$P = \frac{2}{3} \frac{U}{V}$$

- Para un sistema con niveles discretos

$$\mathcal{Z} = \prod_i \left(1 \pm e^{-\beta(\varepsilon_i - \mu)}\right)^{\pm 1}$$

~~Electron~~ Límite clásico

- Significa que $\overline{n}_i << 1$ entonces la probabilidad que dos partículas estén en el mismo nivel de energía es despreciable $\Rightarrow$ no hay diferencias entre fermiones y bosones

$$\bar{n}_i = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_i-\mu)} \pm 1} = \frac{e^{-\beta(\varepsilon_i-\mu)}}{1 \pm e^{-\beta(\varepsilon_i-\mu)}} = \frac{\lambda e^{-\beta\varepsilon_i}}{1 \pm \lambda e^{-\beta\varepsilon_i}}$$

Recordar que $\lambda = e^{\beta\mu}$

Si $n_i \ll 1 \Rightarrow \lambda \ll 1$, entonces

$$\bar{n}_i \simeq \lambda e^{-\beta\varepsilon_i}$$

que es la distribución de Boltzmann

- Se puede ver también cómo aparece el factor $\frac{1}{N!}$ que Gibbs puso "a dedo" en la función de partición de los gases ideales

- Hay que recordar que

$$\mathcal{Z} = \sum_{N=0}^{\infty} Z(N)\, e^{\beta\mu N} \qquad (1)$$

③

• Por otra parte el gran potencial es

$$-\beta\psi = \pm \ln \prod_i \left(1 \pm e^{-\beta(\varepsilon_i - \mu)}\right)^{\pm 1}$$

$$= \pm \sum \ln\left(1 \pm e^{-\beta\varepsilon_i}\lambda\right)$$

y como $\ln(1 \pm x) \simeq \pm x$ si $x \ll 1$

$$-\beta\psi = \sum \lambda e^{-\beta\varepsilon_i} = \lambda \sum e^{-\beta\varepsilon_i}$$

$$-\beta\psi = \lambda z_1$$

y como $-\beta\psi = \ln \mathcal{Z}$

Se concluye que: $\ln \mathcal{Z} = \lambda z_1$

$$\mathcal{Z} = e^{\lambda z_1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda z_1)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \frac{z_1^n}{n!} \quad ②$$

- Comparando 1 con 2

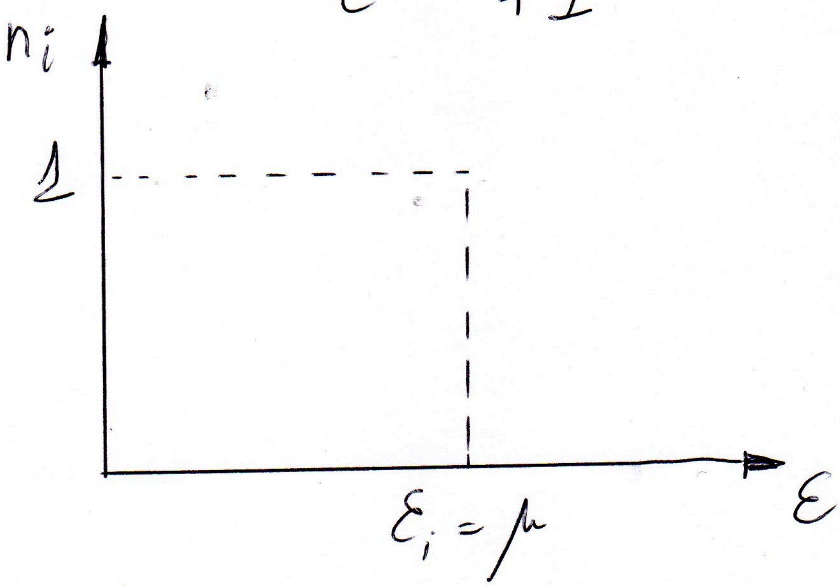
$$\left\{ Z(N) = \frac{z_1^{\,N}}{N!} \right\}$$

- Esto es lo que afirmó Gibbs.

- <u>Remark</u>: el $\frac{1}{N!}$ que aparece no ~~tiene nada que~~ es por la indistinguibilidad solamente sino porque en el gas ideal los ~~ga~~ niveles de energía forman un continuo.

<u>Gas de Fermi a T=0</u>

- Recordar que $n_i = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_i - \mu)} + 1}$ para fermiones



. El número total de e^- será:

$$N = \int_0^\infty n(\varepsilon)\, D(\varepsilon)\, d\varepsilon$$

Cuando $T=0$, $n(\varepsilon)$ es una función escalón

(1) $$N = V\int_0^\mu \frac{(2m)^{3/2}}{2\pi^2\hbar^3}\sqrt{\varepsilon}\, d\varepsilon = \frac{V}{3\pi^2}\left(\frac{2m\mu}{\hbar^2}\right)^{3/2}$$

. Se llama energía de Fermi al potencial químico a $T=0$

$$\varepsilon_F = \mu(T=0)$$

. De (1) resulta

$$\varepsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m}\left(3\pi^2\rho\right)^{2/3} \qquad \rho = \frac{N}{V}$$

. Se llama momento de Fermi a:

$$\varepsilon_F = \frac{p_F^2}{2m_e}$$

$$p_F = \left(3\pi^2\rho\right)^{1/3}\hbar$$

6

- La temperatura de Fermi se define como

$$T_F = \varepsilon_F / k_B$$

- Valores típicos:

	ε_F (eV)	T_F (10^4K)
Li	4.7	5.5
Na	3.2	3.8
Al	11.7	13.6
Cu	7	8.2

- Los valores de T_F son muy altos, por eso considerar que los e^- en un metal son fermiones a temperatura cero es una buena aproximación.

Condensación de Bose

- Se sabe que para un gas ideal de Bose, el número de partículas será:

$$N = \sum_i \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_i - \mu)} - 1} \rightarrow \int_0^\infty D(\varepsilon) \frac{1}{\lambda^{-1} e^{\beta\varepsilon} - 1} d\varepsilon$$

siendo $\lambda = e^{\beta\mu}$ y

$$D(\varepsilon) = \frac{V}{4\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2}\sqrt{\varepsilon}$$

- Se puede hacer un cambio de variables: $x = \beta\varepsilon$

Entonces:

$$N = \frac{V}{4\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2}(k_B T)^{3/2}\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{\lambda^{-1}e^x - 1} dx \quad (1)$$

- Observa que cuando $T \rightarrow 0$, la integral tendría que diverger para que N sea una constante.

Y el único parámetro que tiene la integral es λ^{-1}

Pero el valor extremo que puede tomar la fugacidad es

$$\lambda^{-1} = e^{-\beta\mu} = 1 \quad \text{ya que } \mu \leq 0$$

Si μ es muy negativo, λ^{-1} es muy grande y el integrando es muy pequeño (¡no diverge!)

- Para $\lambda^{-1} = 1$, la integral tiene un valor calculable

$$\int_0^\infty x^{1/2}\left(e^x - 1\right)^{-1} dx = 2.315 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\zeta\left(\frac{3}{2}\right)$$

- La consecuencia de esto es que la ec. 1 <u>no</u> puede ser correcta por debajo de cierta temperatura T_E (temperatura de Einstein) que viene dada por

$$N = 2.315 \frac{V}{4\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar}\right)^{3/2}\left(k_B T_E\right)^{3/2} \quad (2)$$

- Aquí sucede algo. Y hay que analizar 1 para reescribirla

- Lo que está pasando es que las partículas se están acumulando en el fundamental ($\varepsilon = 0$) y el peso de ese estado es nulo:

$$D(\varepsilon) = \bigcirc \sqrt{\varepsilon} \qquad D(0) = 0$$

- Por abajo de T_E, las partículas están ~~todas~~ en el fundamental principalmente.

- La ec 1 hay que reemplazarla por:

$$N = N_0 + \frac{V}{4\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2}(k_B T)^{3/2}\int_0^{\infty} x^{1/2}\left(\lambda^{-1}\exp(x) - 1\right)^{-1} dx \quad (3)$$

- Para $T > T_E$, $N_0 \approx 0$ pero para $T < T_E$ $N_0 \approx N$

- Comparando 2 y 3

$$N = N_0 + \left(\frac{T}{T_E}\right)^{3/2}$$

ó bien:

$$N_0 = N\left[1 - \left(\frac{T}{T_E}\right)^{3/2}\right] \text{ si } T < T_E$$

- Condensación de Bose:

  + superfluidez

  + superconductividad

  + BEC de átomos