Física Estadística
Trabajo Práctico 4: Conjunto Canónico

15 de mayo de 2020

10. Mostrar que la densidad de energía (energía por unidad de volumen) de la radiación electromagnética en el rango de las frecuencias $(\omega, \omega + d\omega)$ obedece a la «Ley de radiación de Planck»:

$$\frac{U_\omega}{V} d\omega = \left(\frac{\hbar \omega^3}{\pi^2 C^3} \right) \frac{1}{e^{\beta \hbar \omega} - 1} d\omega \tag{1}$$

y que a alta temperatura $(k_B T \gg \hbar \omega)$ esta se reduce a la «ley de Rayleigh-Jeans»

$$\frac{U_\omega}{V} d\omega = \left(\frac{\omega^2}{\pi^2 C^3} \right) k_B T d\omega$$

Ayuda: Ver radiación electromagnética en Callen. Para la segunda parte considerar la expansión en series de Taylor $e^x = 1 + x + ...$ donde $x = -\frac{\hbar\omega}{k_B T}$, los términos de orden superior en la serie son despreciables.

11. Considerando que el número de fotones por unidad de volumen en el rango de frecuencias $(\omega, \omega + d\omega)$ es

$$\frac{N_\omega}{V} d\omega = \frac{1}{\hbar \omega} \frac{U_\omega}{V} d\omega \tag{2}$$

calcular el número total de fotones por unidad de volumen. Mostrar que la energía media por fotón es $\approx 2{,}2 k_B T$

Ayuda: Reemplazar la Ec. 1 en 2 e integrar de cero a infinito a ambos lados. , Esto da el número total de fotones N_f. En la integración utilizar la sustitución

$x = \beta\omega\hbar$, para facilitar la integración. Luego integrar la Ec. 1 para encontrar la energía media U, hacer el cociente U/N_f.

12.

- a. Demostrar que la función de partición de un gas de electrones colocado en un campo magnético H es:

  $$z = 2\cosh\left(\frac{\mu_B H}{k_B T}\right)$$

  con μ_B el magnetón de Borh.

- b. Calcular la energía magnética de un gas de electrones en dicho campo magnético. Mostrar luego que dichos electrones dan origen a una magnetización que viene dada por:

  $$M = n\mu_B \tanh\left(\frac{\mu_B H}{k_B T}\right)$$

  siendo n el número de electrones por cantidad de volumen.

- c. Hallar los límites de la función de partición y de la magnetización para temperaturas muy altas y muy bajas.

Ayuda: En a. escribir $z = \sum_j e^{-\beta E_j}$. b. utilizar $U = -\partial \ln z^N/\partial\beta$, $M = -(\partial F/\partial H)_{T,N}$. c. series de Taylor como en la ayuda del ejercicio 10.

13. Una muestra de petróleo se coloca en un campo magnético H. Recordar que los electrones tienen espín 1/2 y momento magnético μ. Se aplica un campo de radiofrecuencia y ese campo puede inducir transiciones entre los dos estados posibles de polarización de los protones si la frecuencia ν cumple con la relación de Bohr $h\nu = 2\mu H$. La potencia absorbida por el campo de radiación es entonces proporcional a la diferencia entre el número de núcleos entre un estado y otro. Suponiendo que los protones están en equilibrio térmico a temperatura T, indique cuál es la dependencia de la potencia absorbida con T.

Ayuda: Número de núcleos en un estado es $n_j = N_{tot}p_j = N_{tot}e^{-\beta E_j}/z$, p_j es la probabilidad de que el sistema esté con esa energía E_j. La potencia P entonces $P \propto (n_{-\mu H} - n_{\mu H})$. Luego considerar que $\tanh(x) \simeq x$ si x es chico.

14. Considere una partícula de masa m en un volumen cúbico V. Mostrar que la separación de niveles sucesivos de energía es:

$$\Delta E \approx \frac{\pi\hbar}{2mV^{2/3}}$$

evaluar ΔE para los átomos de He en un volumen de $V = 1m^3$. Mostrar qué pasa a $T > 10^{-8}K$ la suma cuántica en la función de partición puede ser aproximada por una integral.

15. Dado un gas ideal calcular la energía más probable. Discuta el resultado. Ayuda: ver Callen sección 16.10

16.

- a. Demostrar que la longitud de onda de de Broglie de una partícula de masa m que se mueve con velocidad más probable de una distribución maxwelliana es:
$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2\pi m k_B T}}$$
- b. Calcular la longitud de onda de de Broglie para un neutrón que se mueve con la velocidad más probable a $20°C$
- c. Comparar el valor anterior con la distancia interatómica típica de un sólido. Discutir.

Ayuda: La longitud onda de de Broglie es $\lambda = h/p$ y la velocidad más probables es $v_m = \sqrt{\frac{2k_BT}{m}}$.

17.

- a. Mostrar que la condición de validez del tratamiento clásico de un gas ideal, $R \gg \lambda$, donde R es la separación media de las partículas, equivale a la condición,

$$\left(\frac{V}{N}\right)^{1/3} \gg \frac{h}{\sqrt{2\pi m k_B T}}$$

- b. Mostrar que la condición $R \gg \lambda$ es una consecuencia del principio de incertidumbre de Heisenberg $\Delta p \Delta x \geq h$.

Ayuda: Suponer que una molécula está en un cubo de arista R, y las moléculas llenan todo el volumen $V = R^3 N$. Luego considerar $R = \Delta x$.

18. Obtener la ecuación de estado de un gas ideal:

$$PV = Nk_B T$$

19. Considere un gas ideal de moléculas diatómicas heteronucleares. Cada molécula posee un momento dipolar eléctrico μ. Si el gas está inmerso campo eléctrico uniforme $\bar{E} = \epsilon \hat{z}$, cada molécula tendrá, adicionalmente a la energía debida a los demás grados de libertad, una energía potencial $V = -\mu\epsilon \cos\theta$, donde θ es la orientación del dipolo respecto a $\hat{z}$.

- a. Obtener la función de partición del gas, F y U ¿Cuál es la contribución a U del momento magnético?
- b. Obtener la constante dialéctrica del gas.

Ayuda: ver Callen 16.3. La función de partición debido al potencial es $z_p = 2\pi \int_0^\pi \sec\theta e^{\beta\mu\epsilon\cos\theta} d\theta = 4\pi \sinh(\beta\mu\epsilon)/\beta\mu\epsilon$. Calcular F, U según el formalismo canónico. La constante dialéctrica es $\xi = 1{+}4\pi\chi$ donde χ es la susceptibilidad $\chi\epsilon = \langle\mu\rangle = -\partial F/\partial\epsilon$.