UNIDAD 1

Generalidades del Transporte

Prof. Mario Rodriguez
c. e. mrodriguez@uncu.edu.ar

Objeto del Estudio del F-T

En la cinética química (laboratorio) no se presta atención, el cómo los R y/o P entran y salen del recinto de reacción, ni como la E es transferida de un recipiente a otro para mantener la T del sistema constante. Cuando estas reacciones se realizan a escala industrial, estos factores son muy importantes.

“Esto significa que el control de una reacción química a escala industrial es frecuentemente más complicado y debe dársele una atención más rigurosa. Esto sé lleva a cabo, mediante el análisis de los F-T”.

Propiedades Transportadas

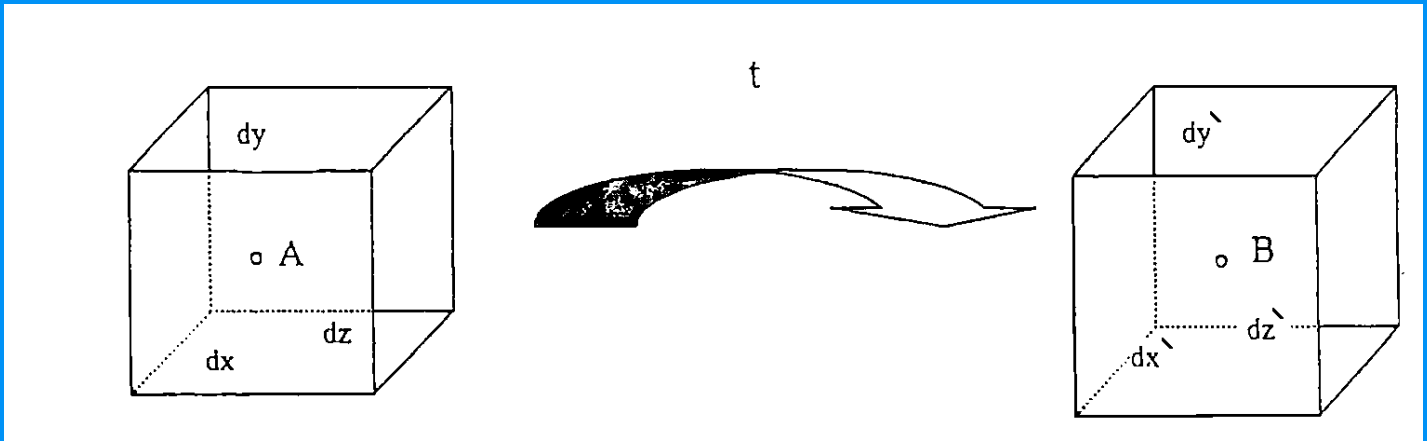
- **Cantidad de Movimiento:** transporte de momento se ejemplifica como un fenómeno friccional en el cual un cuerpo ejerce una fuerza sobre otro.

- **Cantidad de Energía:** mecanismos directos; conducción, convección y radiación; mecanismos indirectos, calor latente y en la forma de átomos o moléculas excitadas.

- **Cantidad de Materia:** mecanismo; difusión.

- **Entonces, el F-T será aquel fenómeno que está relacionado con los procesos en los que se transporta una entidad física o propiedad desde un punto a otro en un extenso conjunto de moléculas.**

Consideremos dos puntos A y B en el cuerpo material y alrededor de los mismos construimos un volumen elemental, paralelepípedo de lados dx, dy, dz en A; y dx', dy', dz' en B.



El transporte puede ocurrir en el seno de fluidos o entre un fluido y un sólido. Por ejemplo:

1) **Un fluido que circula a través de un conducto disipa energía por rozamiento lo que se traduce en un transporte de C-M entre las regiones con distinta velocidad.**

2) **Un sistema con regiones a distintas T (diferentes concentraciones de energía) transporta energía desde la región más caliente hacia la más fría.**

3) **Una mezcla de dos o más componentes con regiones con diferentes concentraciones transporta materia desde la zona más concentrada hacia de menor concentración.**

Importancia del Estudio de los F-T.

- **Existen dos razones de por qué el fenómeno involucrado en el transporte de material y propiedades de los materiales son de una importancia creciente en las operaciones químicas, a gran escala. <u>La primera</u> de ellas es de carácter dimensional (cambio de escala) y <u>la segunda</u> está relacionada con las etapas controlantes en un proceso industrial.**

¿Porque es necesario estudiar los F-T?

En Biotecnología, permite:

- **Proyectar la mejora en el desempeño de los sistemas de agitación de biorreactores.**
- **Diseñar correctamente los sistemas de esterilización y pasteurización.**
- **Estimar los tamaños de los biorreactores.**

En Tecnología de Alimentos, permite:

- **Estimar tiempos de cocción.**
- **Estimar tamaños de lechos de secado de legumbres**
- **Estudiar procesos de congelación y descongelación**

En Medio Ambiente, permite:

- **Predecir contaminaciones estudiando las corrientes atmosféricas.**
- **Diseñar equipos que permitan la purificación de distintas corrientes de fluido.**

Procesos de T. y Etapa Determinante de la V. Operaciones Básicas de la Industria

- Interés en los F-T, como etapa controlante de la velocidad en reacciones químicas industriales. Estos F son de gran importancia ya que pueden influir en la economía de muchas operaciones químicas.
- Las operaciones básicas o unitarias de la industria se definen como aquellas etapas simples o individuales, por ejemplo: destilación, filtración, adsorción, calentamiento, enfriamiento, etc.

Generalidades Sobre Mecánica de los Fluidos

Definición de Fluido

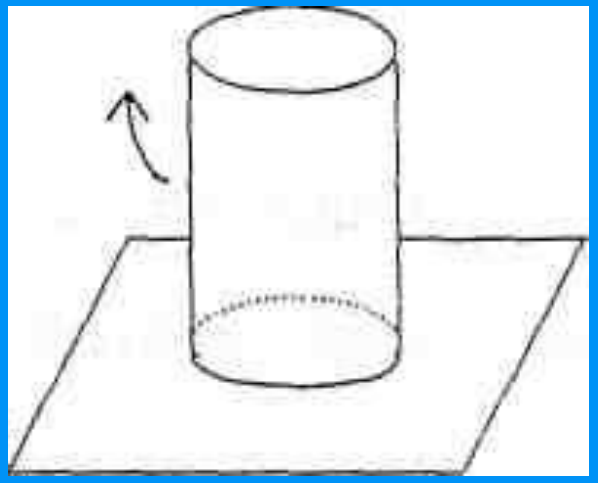
Sólido: inmovilidad de las moléculas, vibran y rotan.

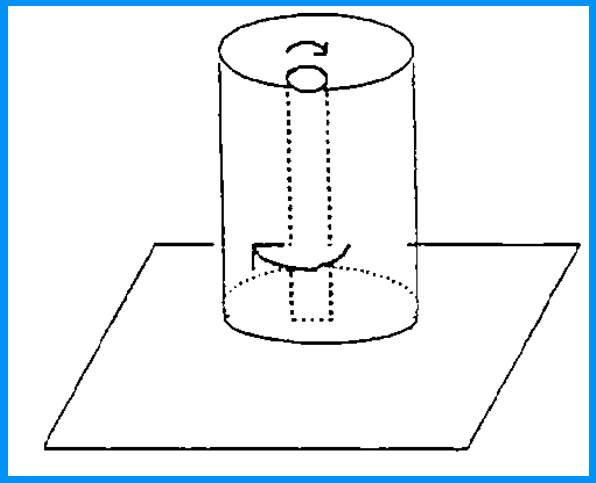
Fluido: cierta movilidad de las moléculas, vibran, rotan y se trasladan.

Analizaremos dos sistemas

i) Una barra sólida con un extremo sólidamente fijo y en el otro un torque (esfuerzo de corte).

La deformación de este elemento está caracterizada por un cierto ángulo $\Delta\alpha$, siempre que el sólido no se rompa.



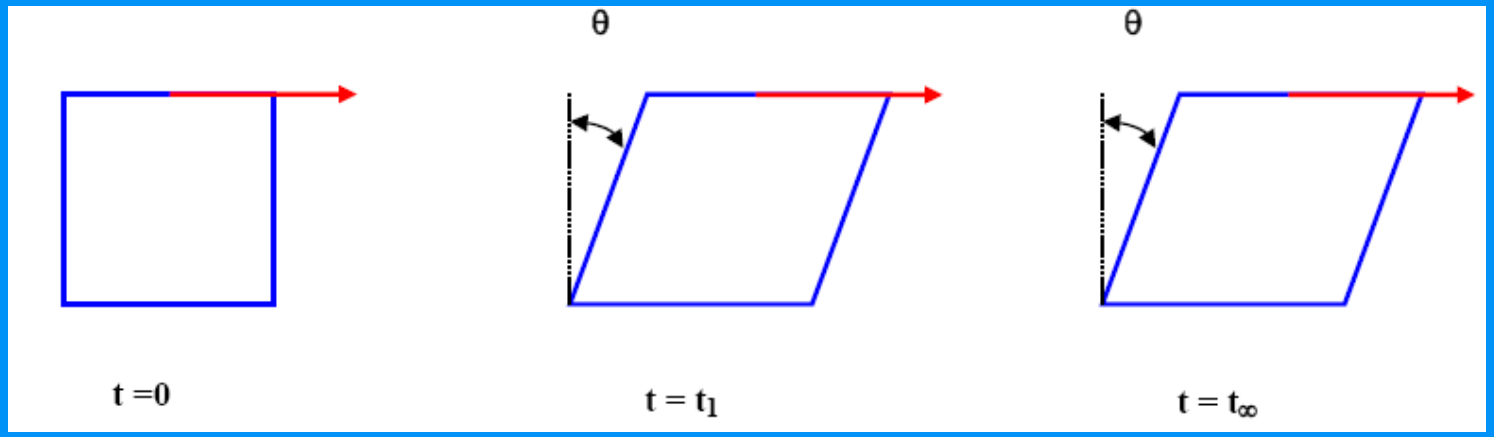


ii) En el caso de un fluido, es una sustancia que se deforma contínuamente por la aplicación de un esfuerzo de corte, por pequeño que este sea, es decir son sustancias incapaces de sufrir un esfuerzo cortante, sino que se deforman contínuamente.

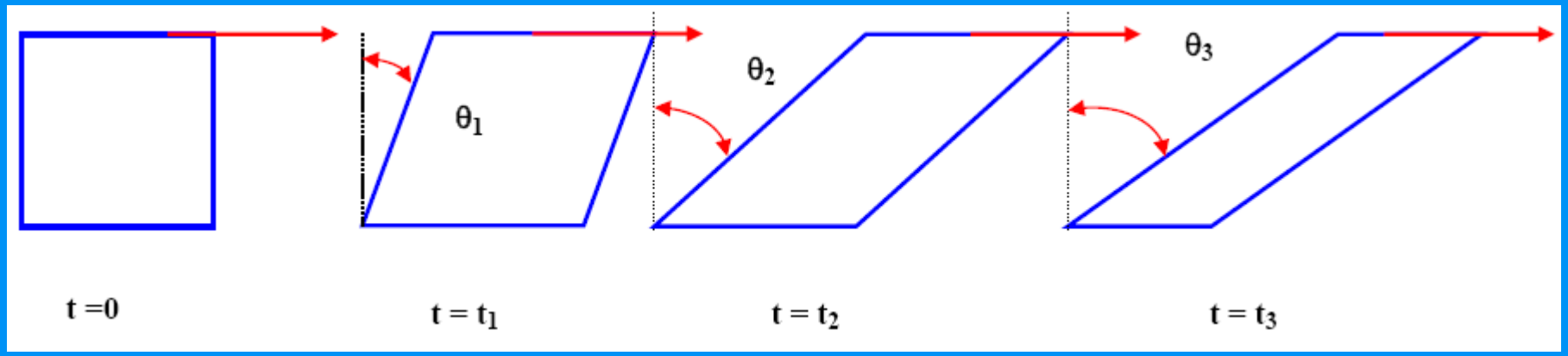
Gráficamente

-Un cuerpo elástico o un sólido sólo se deforma hasta un cierto ángulo θ proporcional al esfuerzo cortante aplicado.

Cuerpo Elástico:



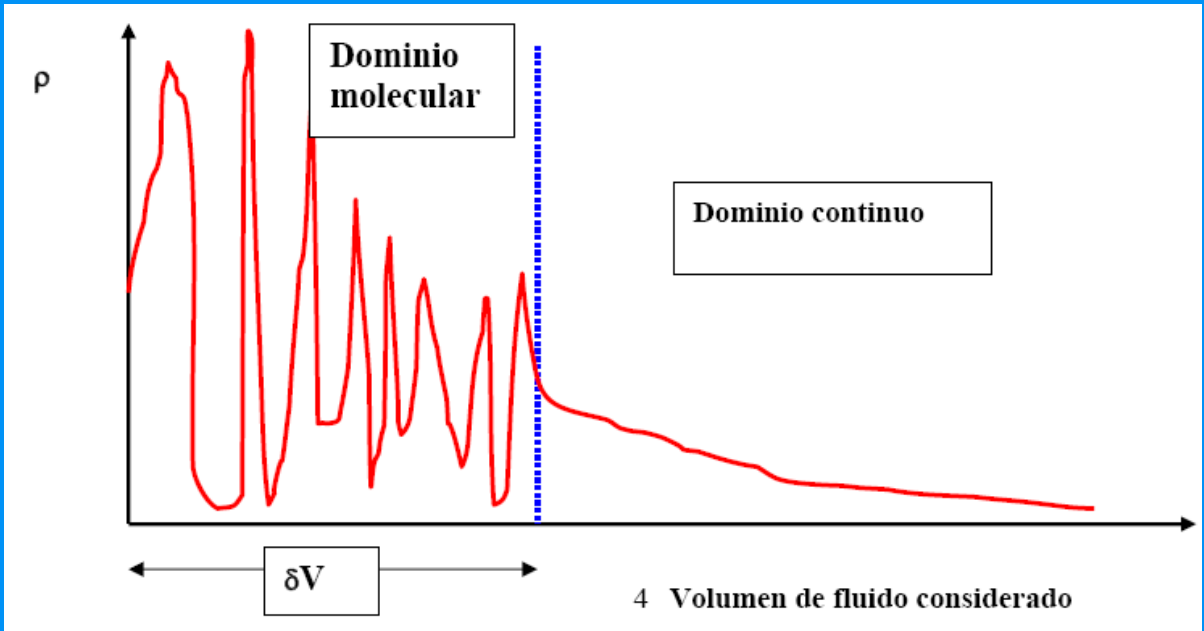
Fluido:



Hipótesis del Fluido como un Medio Continuo

- Los fluidos al igual que el resto de la materia son discretos, están constituidos por átomos o moléculas y espacios vacíos.

- Considera a los fluidos y sólidos como materiales continuos. Las propiedades del material continuo son distribuciones en el sentido matemático, puesto que, varían contínuamente en el espacio y tiempo. Si consideramos una propiedad, ρ, de carácter puntual.



-La *hipótesis del continuo distribuye el valor promedio en todo el elemento de volumen.*

- De esta manera se logra que las propiedades puedan representarse por funciones continuas.

-Por ejemplo la densidad ρ se define como: $\rho = \lim_{\Delta V \to \delta V} \frac{\Delta m}{\Delta V}$

donde: Δm es la masa contenida en un volumen ΔV y δV es el volumen mínimo para el cual tiene sentido el promedio estadístico.

Definición de Área y Presión

- Definiremos el área como un vector cuya dirección es perpendicular a la superficie y su módulo igual al valor numérico de la misma. Sobre cada porción arbitraria de fluido se ejerce una presión la que se define sobre cualquier área como una fuerza normal e isotrópica (no se refiere a la dirección del área). En cuanto a un fluido contiguo cuando está en reposo o en movimiento rectilíneo uniforme, la fuerza será igual a:

$$dF = -p\, n\, dA$$ (para fluido en reposo)

Donde: *n*, es el versor del área apuntando hacia afuera; *p*, es la presión; *dA*, el área considerada. El signo (-) es por la convención del área

Estado Estacionario y Transitorio

<u>Movimiento</u> <u>estacionario</u> <u>o</u> <u>permanente:</u> es cuando la velocidad y las propiedades no varían con el tiempo.

Matemáticamente: $\frac{\partial v}{\partial t} = 0$; $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$; $\frac{\partial p}{\partial t} = 0$

donde v - v(x, y, z), ρ - ρ(x, y, z), p - p(x, y, z)

<u>Movimiento</u> <u>transitorio:</u> es cuando la velocidad y las propiedades son funciones del tiempo.

Matemáticamente:

$\frac{\partial v}{\partial t} \neq 0$; $v = v\,(x, y, z, t)$ $\rho = \rho(x, y, z, t)$ $p = p(x, y, z, t)$

Movimiento Laminar y Movimiento Turbulento

Movimiento laminar: cuando las láminas del fluido en movimiento se deslizan paralelas a las otras sin existir mezclado a nivel macroscópico.

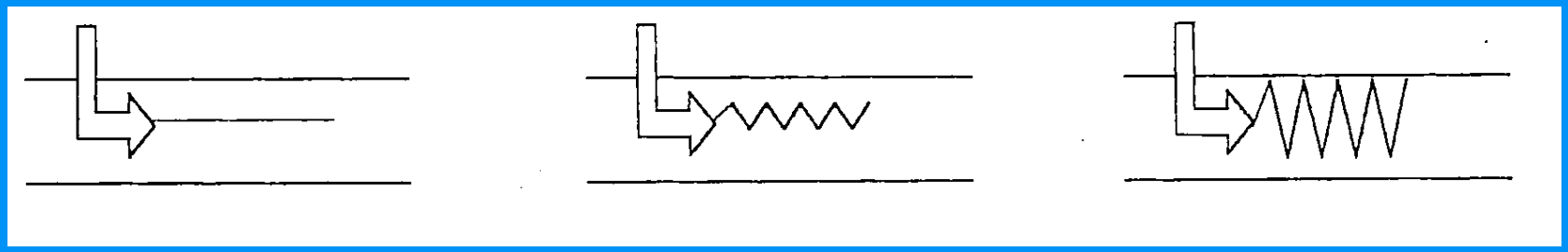
Experiencia de Reynolds:

Se hace circular un fluido con una cierta velocidad, a este se le inyecta un trazador.

1°. Se visualiza la formación de una línea recta.

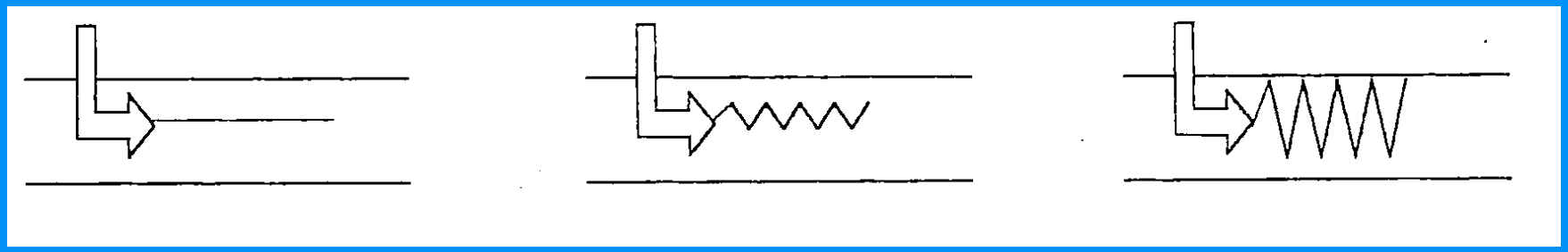
2°. Si ↑ la velocidad se producen ondulaciones.

3°. Al continuar ↑ se homogeneiza el color. No sólo incide la velocidad sino también la μ y ρ.



Movimiento Laminar y Movimiento Turbulento

Experiencia de Reynolds:



Siendo: Re = 2100 una cota inferior pero no superior.

Re < 2100 régimen laminar.

Re> 2100 régimen turbulento.

$$Re = \frac{\rho v D}{\mu} = \text{Número de Reynolds}$$

Movimiento Turbulento: mezclado macroscópico debido a la aparición de remolinos.

Fluido Compresible e Incompresible

<u>Incompresible:</u> cuando la ρ del fluido no varía con el tiempo y con el espacio.

<u>Compresible:</u> cuando varía con el tiempo y el espacio.

$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$	;	$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0$	Incompresible
$\frac{\partial \rho}{\partial t} \neq 0$	;	$\frac{\partial \rho}{\partial x, \partial y, \partial z} \neq 0$	Compresible

Estática de los Fluidos

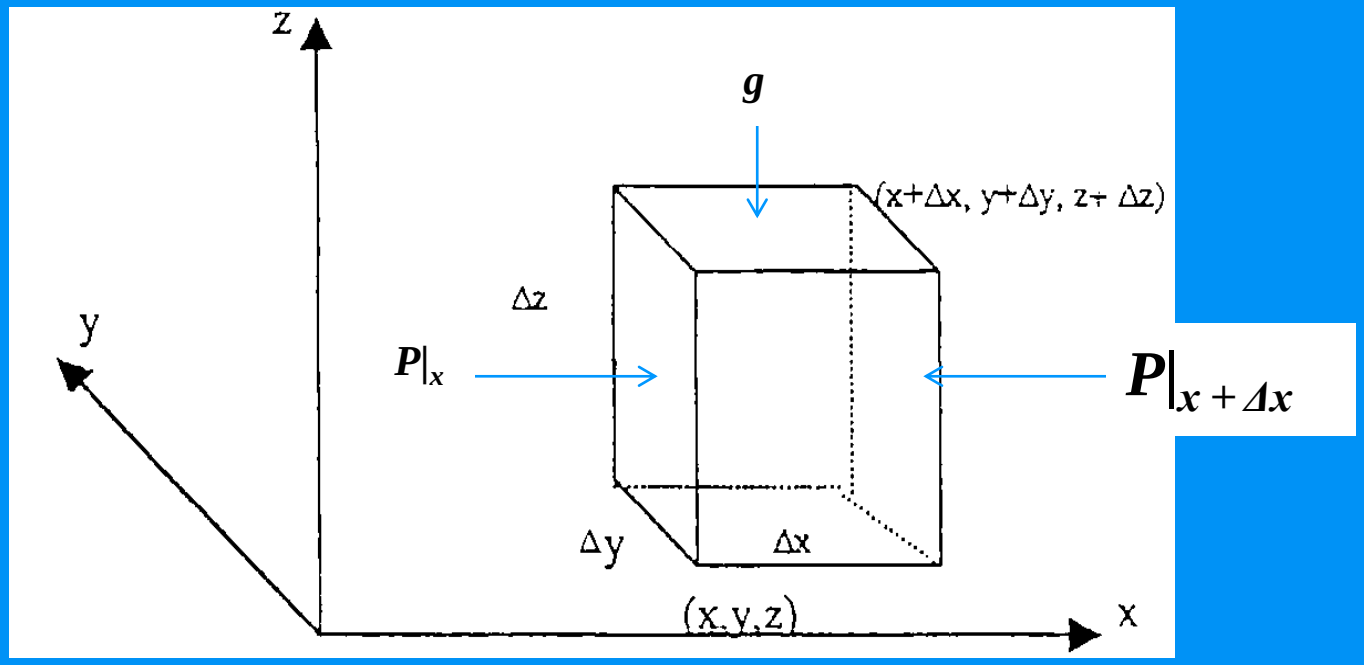
Ecuación fundamental de la estática de los fluidos

Se realizará un balance de las fuerzas de un elemento de fluido fijo en el espacio. Según el principio de conservación fuerzas o el balance de cantidad de movimiento para un fluido en reposo expresa que:

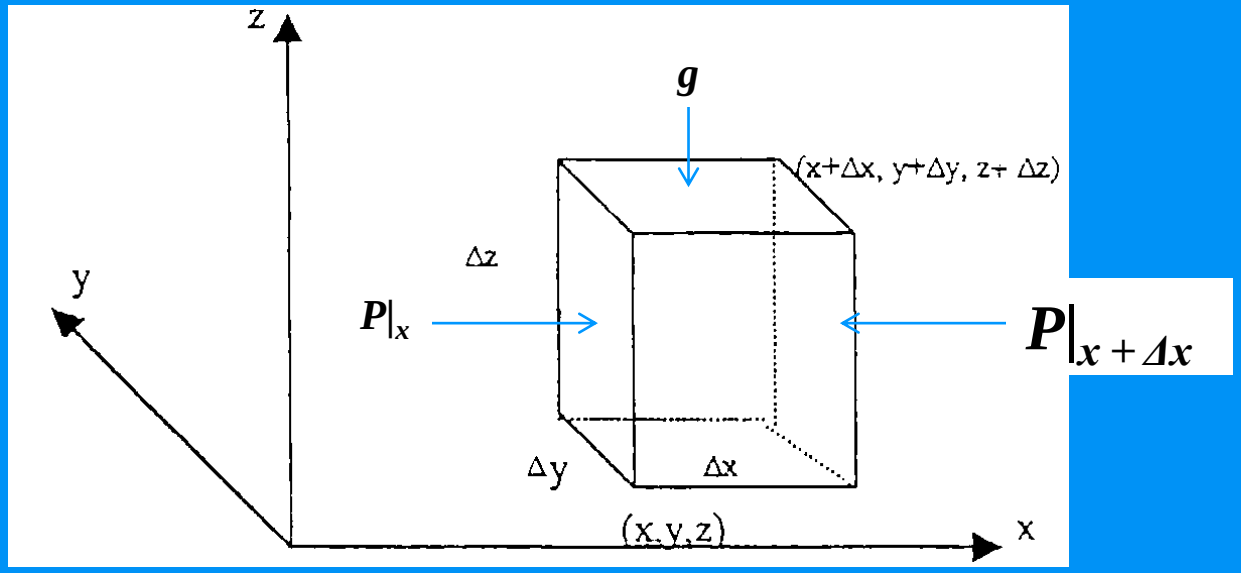
Suma de fuerzas que actúan sobre el sistema $= \sum F = 0$

que no es más que "la segunda ley de Newton" de la mecánica.

Consideramos que el elemento en reposo es un cubo cuyas aristas son: Δx Δy y Δz y sobre él, actúan fuerzas de P sobre c/cara y además, fuerzas gravitatorias. La P es una fuerza evaluada por unidad de superficie, al multiplicarla por el área, se obtiene la fuerza de P_T que el elemento de volumen ejerce sobre esa cara. Así en la cara x, y considerando el módulo vector área será:



Representación del elemento de volumen y fuerzas actuantes



Representación del elemento de volumen y fuerzas actuantes

Así en la cara *x*, y considerando el módulo vector área será:

$$-(-\Delta y\, \Delta z\;\; P|_x)$$

Siendo; $P|_x$, la P que actúa sobre la cara *x*; el signo (-), nos indica la fuerza de la P que el elemento de volumen ejerce sobre los alrededores a través de la cara *x*.

Como la expresión de balance que consideramos es respecto a las fuerzas, debemos poner otro signo menos que será entonces la fuerza de P de los alrededores sobre la cara x.

La P evaluada en la cara $(x + \Delta x)$ será:

$$-\Delta y\, \Delta z\, P|_{x+\Delta x}$$

El signo (-) es porque nos interesan las fuerzas que se ejercen desde el alrededor sobre la cara $x + \Delta x$.

Las fuerzas gravitatorias, es decir aquellas fuerzas que se originan por efecto del campo gravitacional, estarán dadas por:

$$gx \text{ (componente } x \text{ , por unidad de volumen)}$$

al multiplicarla por ρ y por el elemento de volumen será:

$$\Delta x \, \Delta y \, \Delta z \, \rho \, gx$$

Donde: **ρ, la densidad del fluido**

Esta expresión nos dará la fuerza gravitatoria en la dirección *x*.

Aplicando el balance de cantidad de movimiento, se tiene:

$$\Sigma F_x = 0 = \Delta x\, \Delta y\, \Delta z\, \rho\, g_x + \Delta y\, \Delta z\, p\,\big|_x - \Delta y\, \Delta z\, p\,\big|_{x+\Delta x}$$

$$0 = \Delta y\, \Delta z\, (p\,\big|_x - p\,\big|_{x+\Delta x}) + \Delta x\, \Delta y\, \Delta z\, \rho\, g_x$$

$$-\Delta y\, \Delta z\, (p\,\big|_x - p\,\big|_{x+\Delta x}) = \Delta x\, \Delta y\, \Delta z\, \rho\, g_x$$

Luego, dividiendo por el elemento de volumen $\dfrac{p\big|_{x+\Delta x} - p\big|_x}{\Delta x} = \rho\, g_x$

y tomando límite para $\Delta x \rightarrow 0$, se obtiene la expresión de la primera derivada de la *P* que es una función del punto (*x*, *y*, *z*)

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{p\big|_{x+\Delta x} - p\big|_x}{\Delta x} = \rho\, g_x \qquad \frac{\partial p}{\partial x} = \rho\, g_x$$

Análogamente, para los otros pares de caras opuestas:

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \rho\, g_y \qquad \frac{\partial p}{\partial z} = \rho\, g_z$$

y por ser componentes de un mismo vector se pueden combinar vectorialmente; multiplicando por el versor correspondiente y, sumando miembro a miembro

$$i\,\frac{\partial p}{\partial x} = \rho\, g_x\, i \qquad j\,\frac{\partial p}{\partial y} = \rho\, g_y\, j \qquad k\,\frac{\partial p}{\partial z} = \rho\, g_z\, k$$

***gx, gy, gz* componentes del vector aceleración de la gravedad**

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x} i + \frac{\partial p}{\partial y} j + \frac{\partial p}{\partial z} k\right) = \rho\left(g_x i + g_y\, j + g_z k\right)$$

$$\nabla P = \rho\, g$$

Ecuación fundamental de la Fluido Estática (para fluidos en reposo).

Físicamente, nos está diciendo que las fuerzas gravitatorias originan un gradiente de presión que equilibra exactamente al fluido en reposo.

Este es el caso más general, cuando se tiene componentes del vector aceleración de la gravedad en las tres direcciones. Pero normalmente g_x, g_y son nulas y existe solamente g_z con signo cambiado.

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho\, g_x = 0 \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = \rho\, g_y = 0 \qquad \frac{\partial p}{\partial z} = \rho\, g_z \neq 0$$

lo que se entiende como la inexistencia de gradiente de P en la dirección *x* e *y*, y la derivada parcial se convierte en total.

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \rho\, g_z = \rho\, g \qquad (g_z = -g)$$

si se desea conocer la distribución de P, es necesario integrar esa expresión. Lógicamente se necesita conocer una función de ρ.

Restricciones

- Fluido en reposo.

- El elemento de volumen corresponde a un fluido continuo.

- Como único campo externo que actúa es el gravitatorio, si actúa un campo magnético, eléctrico, etc., habrá que incluirlos en la expresión de balance.

- Densidad sea constante.

Aplicaciones

a. Fuerzas fluido-estáticas sobre objetos sumergidos

b. Manometría.

Derivadas

- Cuando se analiza el flujo de un fluido es posible colocar un sistema de ejes que se mueva junto al elemento de volumen del fluido o colocar un sistema de ejes fijos.

- <u>Ejes móviles (Derivada Total):</u> en este caso no se tiene en cuenta el movimiento de traslación. Punto de vista de Lagrange. Los elementos de volumen del fluido van describiendo trayectorias.

- <u>Ejes fijos (Derivada Parcial):</u> la traslación es incluida dentro de los posibles movimientos. Punto de vista de Euler. En este caso se analizan las distribuciones instantáneas de *V*. Se obtienen las líneas de corriente trazando las tangentes a los vectores velocidad para un instante dado.

- **Las líneas de corriente cambian en el tiempo cuando el flujo es transitorio. En estado estacionario se mantienen fijas y coinciden con las trayectorias pues el elemento de volumen posterior circula por el mismo lugar que el anterior.**
- **Los dos puntos de vista: Lagrange y Euler se vinculan a través del concepto de *derivada sustancial.***
- **Supongamos que analizamos una magnitud escalar como la densidad ρ del fluido. Utilizando coordenadas rectangulares y un sistema de ejes fijos la variación que puede experimentar ρ se puede representar por medio de una función $\rho(t)$.**

- Si en cambio nos movemos con el elemento de volumen y medimos ρ contínuamente al cabo de un cierto tiempo dt el elemento de volumen se habrá desplazado una cierta distancia con componentes dx, dy, dz en el sistema de ejes fijos. La posible variación de ρ en el elemento de volumen que seguimos se puede representar por la diferencial total como:

$$d\rho = \frac{\partial \rho}{\partial x} dx + \frac{\partial \rho}{\partial y} dy + \frac{\partial \rho}{\partial z} dz + \frac{\partial \rho}{\partial t} dt$$

Dividiendo por dt:

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial z}\frac{dz}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

- La notación *Dρ/Dt* se denomina derivada sustancial y expresa la velocidad de cambio que puede experimentar *ρ* en un elemento de volumen de fluido que se mueve corriente abajo.

- Teniendo en cuenta que:

$$\frac{dx}{dt} = v_x \cdot\cdot \frac{dy}{dt} = v_y \cdot\cdot \frac{dz}{dt} = v_z$$

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial x} v_x + \frac{\partial \rho}{\partial y} v_y + \frac{\partial \rho}{\partial z} v_z + \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Esta ecuación puede escribirse en notación vectorial como:

Donde:

$$\underline{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\underline{i} + \frac{\partial}{\partial y}\underline{j} + \frac{\partial}{\partial z}\underline{k}$$

es un operador vectorial llamado gradiente. Sólo tiene sentido cuando se aplica sobre una función, escalar o vectorial.

- Por lo tanto la derivada parcial representa la variación de una magnitud en un elemento de volumen fijo en el espacio (punto de vista de Euler) y la derivada sustancial expresa la variación de la misma magnitud pero cuando se sigue un elemento de volumen corriente abajo (punto de vista de Lagrange). La ecuación anterior permite pasar de un punto de vista al otro.

Ecuación de Continuidad

<u>Objetivo:</u> **obtener expresiones matemáticas generales de la conservación de materia y CM para luego simplificarlas con el fin de adaptarlas a la resolución de problema.**

1) Se trabaja con un fluido puro y un flujo isotérmico laminar.

2) Se acepta la validez de la hipótesis del continuo.

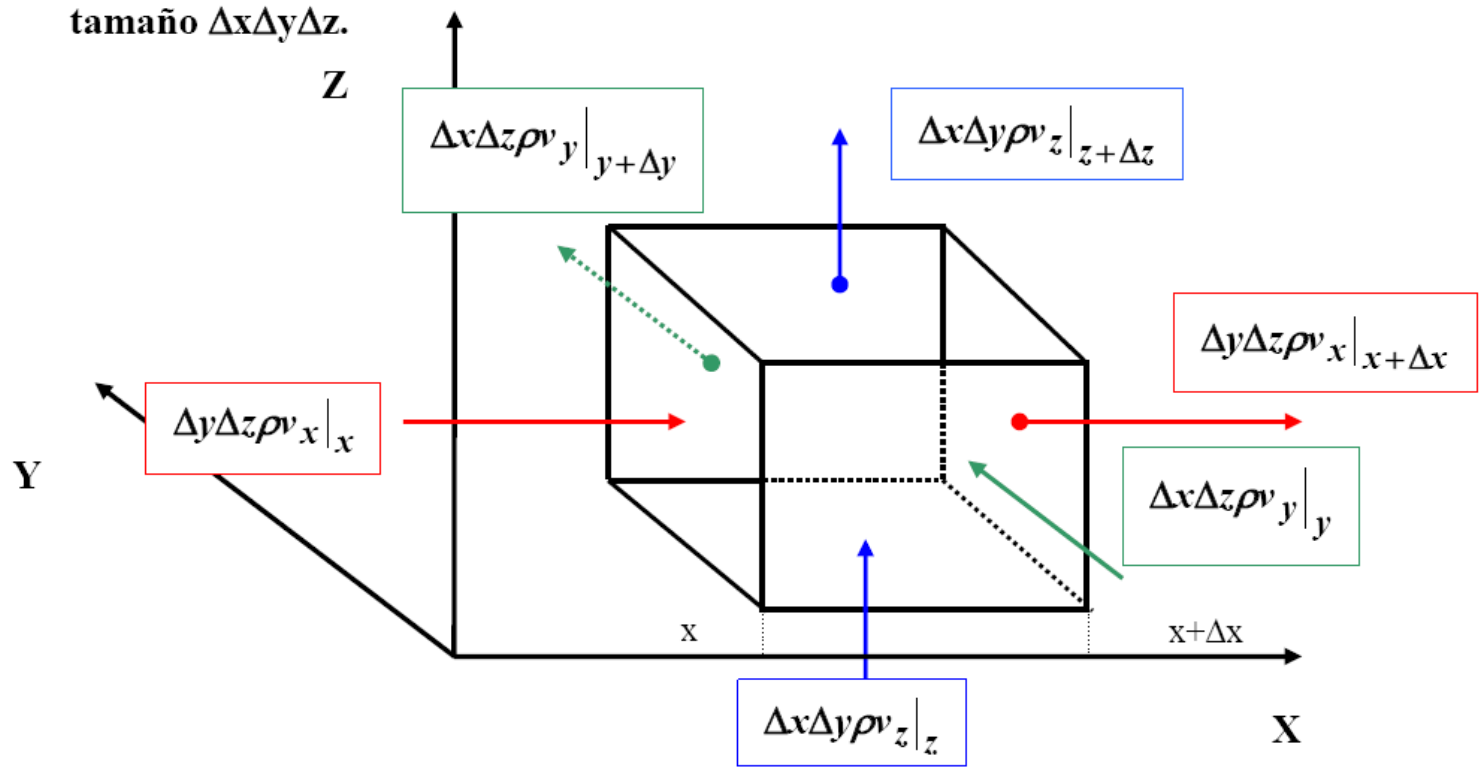
3) Se considera que no existe transformación de masa en energía y viceversa.

4) Se utiliza un sistema de ejes fijo en el espacio (*punto de vista de Euler*).

Teniendo en cuenta estas suposiciones para obtener el modelo buscado se plantea el principio de conservación de la materia:

$$\begin{bmatrix} Velocidad \cdot de \cdot acumulación \\ de \cdot materia \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Velocidad \cdot de \cdot entrada \\ de \cdot materia \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Velocidad \cdot de \cdot salida \\ de \cdot materia \end{bmatrix}$$

-Aplicamos el balance a un elemento de volumen fijo en el espacio de tamaño ΔxΔyΔz.



- La C de materia que entra a un sistema dado por unidad de tiempo se define como flujo y ese flujo por unidad de área es la densidad de flujo (m/t A). Si multiplicamos y dividimos por el elemento de volumen tendríamos que :

$$\frac{m}{t\,A}\,\frac{\Delta x \Delta y \Delta z}{\Delta x \Delta y \Delta z} = \frac{\rho}{t\,A}\,\Delta x \Delta y \Delta z$$

Si el área en consideración es la transversal a la dirección x, Δy, Δz, se tiene que:

$$\frac{\rho}{t\,\Delta y\,\Delta z}\,\Delta x \Delta y \Delta z = \frac{\rho}{t}\,\Delta x \quad = \quad \rho\, v_x$$

por lo tanto la velocidad de entrada y salida de materia a través de la cara x y x + Δx , respectivamente, serán:

$$\rho\, v_x \Big|_x \Delta y\, \Delta z \qquad\qquad \rho\, v_x \Big|_{x+\Delta x} \Delta y\, \Delta z$$

por lo tanto la velocidad de entrada y salida de materia a través de la cara x y x + Δx , respectivamente, serán:

$$\rho v_x\big|_x \Delta y \Delta z \qquad \rho v_x\big|_{x+\Delta x} \Delta y \Delta z$$

La diferencia entre entrada y salida me dará la cantidad de materia acumulada tomando el sentido de las x, es decir:

$$\left(\rho v_x\big|_x - \rho v_x\big|_{x+\Delta x}\right)\Delta y \Delta z = -\left(\rho v_x\big|_{x+\Delta x} - \rho v_x\big|_x\right)\Delta y \Delta z$$

- La entrada neta de materia en las tres posibles direcciones del espacio viene dada por:

$$\left(\rho v_x\big|_x - \rho v_x\big|_{x+\Delta x}\right)\Delta y \Delta z + \left(\rho v_y\big|_y - \rho v_y\big|_{y+\Delta y}\right)\Delta x \Delta z + \left(\rho v_z\big|_z - \rho v_z\big|_{z+\Delta z}\right)\Delta x \Delta y$$

- El 1° término, acumulativo, se deduce como la variación de masa por unidad de tiempo multiplicada y dividida por el elemento de volumen:

$$\frac{\Delta m}{\Delta t}\frac{\Delta x \Delta y \Delta z}{\Delta x \Delta y \Delta z}$$

-Por lo tanto el término acumulativo queda:

$$\Delta x \Delta y \Delta z \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)$$

- Recordando el término de la entrada neta de materia en las tres posibles direcciones del espacio viene dada por:

$$\left(\rho v_x\big|_x - \rho v_x\big|_{x+\Delta x}\right)\Delta y\Delta z + \left(\rho v_y\big|_y - \rho v_y\big|_{y+\Delta y}\right)\Delta x\Delta z + \left(\rho v_z\big|_z - \rho v_z\big|_{z+\Delta z}\right)\Delta x\Delta y$$

- Y el término de acumulación de materia:

$$\Delta x\Delta y\Delta z\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)$$

- Reemplazando ambos términos, en la expresión inicial:

$$\begin{bmatrix} Velocidad \cdot de \cdot acumulación \\ de \cdot materia \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Velocidad \cdot de \cdot entrada \\ de \cdot materia \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Velocidad \cdot de \cdot salida \\ de \cdot materia \end{bmatrix}$$

- Por lo tanto utilizando el principio de conservación de la materia:

$$\Delta x\Delta y\Delta z\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right) = \left(\rho v_x\big|_x - \rho v_x\big|_{x+\Delta x}\right)\Delta y\Delta z + \left(\rho v_y\big|_y - \rho v_y\big|_{y+\Delta y}\right)\Delta x\Delta z + \\ + \left(\rho v_z\big|_z - \rho v_z\big|_{z+\Delta z}\right)\Delta x\Delta y$$

- **Dividiendo ambos miembros por $\Delta x\ \Delta y\ \Delta z$, luego tomando el límite cuando $\Delta x\ \Delta y\ \Delta z \rightarrow 0$, o sea considerando que el cubo tiende a un punto:**

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \lim_{\Delta x \Delta y \Delta z \rightarrow 0} \left[\frac{\left(\rho v_x\big|_x - \rho v_x\big|_{x+\Delta x}\right)}{\Delta x} + \frac{\left(\rho v_y\big|_y - \rho v_y\big|_{y+\Delta y}\right)}{\Delta y} + \frac{\left(\rho v_z\big|_z - \rho v_z\big|_{z+\Delta z}\right)}{\Delta z} \right]$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\left[\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} \right]$$

- **Esta ecuación se denomina "Ecuación de Continuidad" y describe la variación de la ρ de un fluido en un punto fijo en el espacio debido a variaciones del flujo másico ρ *v* (punto de vista de Euler).**

- En notación vectorial:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -(\underline{\nabla} \bullet \rho \underline{v})$$

- Desarrollando la derivada del producto:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -(\underline{v} \bullet \underline{\nabla} \rho) - (\rho \underline{\nabla} \bullet \underline{v})$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\underline{v} \bullet \underline{\nabla} \rho) = -(\rho \underline{\nabla} \bullet \underline{v})$$

- El miembro de la izquierda es la derivada sustancial de ρ:

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho(\underline{\nabla} \bullet \underline{v})$$

-Esta ecuación representa la variación de la ρ de un punto de un fluido con el tiempo al moverse corriente abajo (Ecuación de continuidad punto de vista de Lagrange).

- Ambas ecuaciones se dedujeron para coordenadas rectangulares, pero al escribirlas en notación vectorial son válidas para cualquier sistema de coordenadas con sólo reemplazar a los operadores por su expresión correspondiente.

- Debe recordarse que ambos balances representarán adecuadamente la variación de masa de un fluido que fluye siempre que se cumplan las suposiciones del modelo:
  - Se trabaja con un fluido puro y un flujo isotérmico.
  - Se acepta la validez de la hipótesis del continuo.
  - Se considera que no existe transformación de masa en energía y viceversa

Si un fluido no altera su ρ durante el flujo se dice que es incompresible:

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho(\underline{\nabla} \bullet \underline{v})$$

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0 \cdots \therefore \cdots \underline{\nabla} \bullet \underline{v} = 0 \text{ Fluido Incompresible.}$$

- Esto no debe ser confundido con un flujo estacionario el cual no cambia a lo largo del tiempo:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \text{ Flujo Estacionario}$$

Ecuación de Continuidad en Coordenadas Curvilíneas

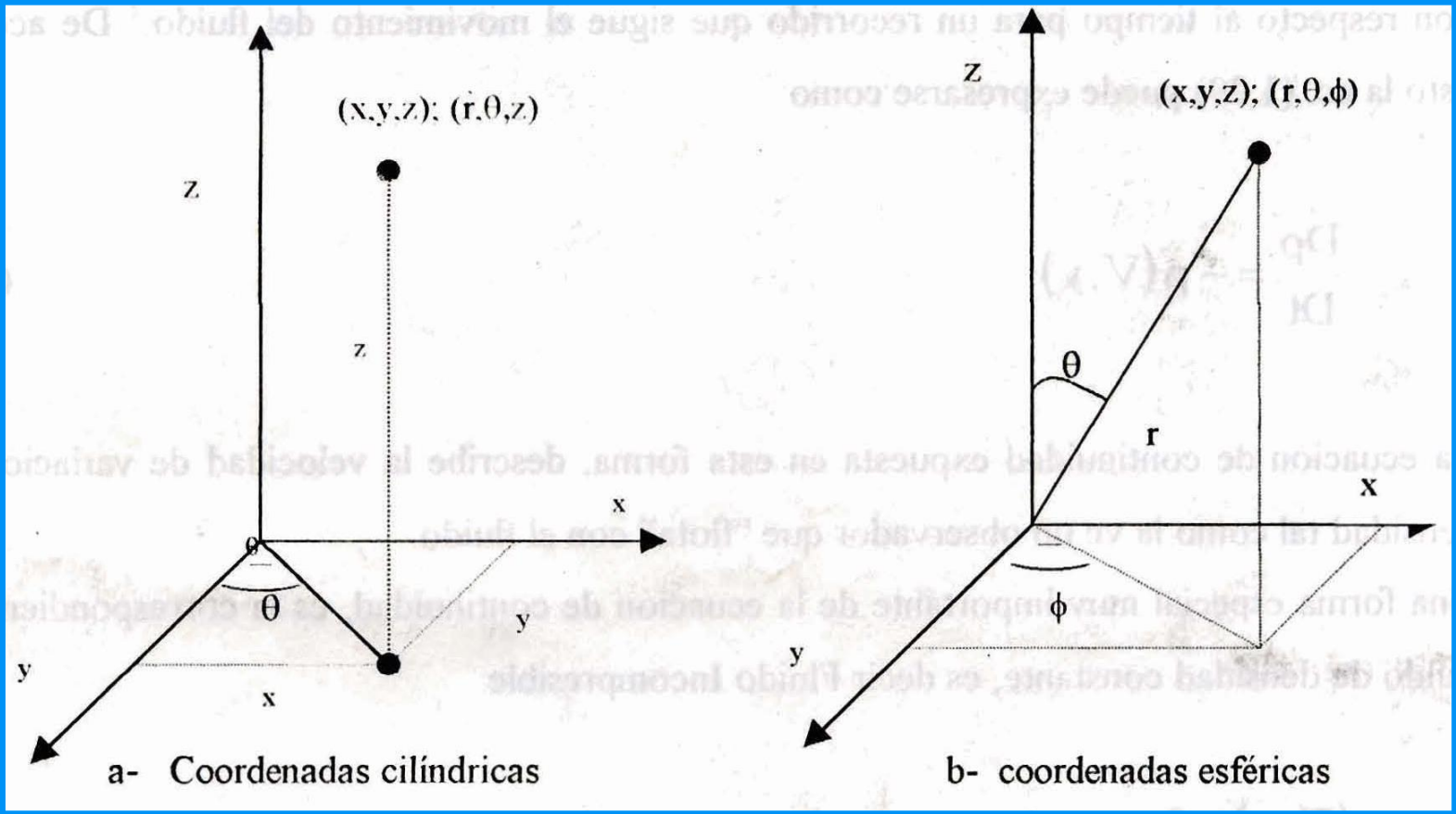
- La interconversión de la ecuación de continuidad en diferentes sistemas de coordenadas se realiza a partir de las relaciones existentes entre los vectores y tensores en distintos sistemas de coordenadas. Para sistemas de coordenadas ortogonales, es decir aquellos en que las tres variables de superficie coordenadas son perpendiculares entre si, están vinculados de acuerdo a la siguiente Figura.

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$$
$$z = z$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\theta = \arctan y / x$$
$$z = z$$

$$x = r\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\phi$$
$$y = r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi$$
$$z = r\cos\theta$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$
$$\theta = \arctan\left(\sqrt{x^2 + y^2} / z\right)$$
$$z = \arctan y / x$$



Representación de coordenadas para sistemas ortogonales

Las transformaciones de los componentes de un vector y de un tensor están dadas y las operaciones diferenciales en coordenadas curvilíneas pueden ser consultadas en el apéndice A del Bird-Steward-Ligtxfoot, puntos A-6 y A-7, respectivamente.

Las ecuaciones de continuidad en coordenadas curvilíneas están dadas por:

Coordenadas cilíndricas (r, θ, z);

$$\frac{\partial p}{\partial t}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(\rho\, r\, v_r)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(\rho\, v_\theta)+\frac{\partial}{\partial z}(\rho\, v_z)=0$$

Coordenadas esféricas (r, θ, ϕ);

$$\frac{\partial p}{\partial t}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(\rho\, r^2\, v_r)+\frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\rho\, v_\theta\,\mathrm{sen}\,\theta)+\frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}(\rho\, v_\phi)=0$$