

UNIDAD 2

Transporte de Cantidad de Movimiento

Prof. Mario Rodriguez
c. e.: mrodriguez@uncu.edu.ar

- Analizaremos la propiedad física que caracteriza la resistencia al flujo de los fluidos sencillos, conocida como la μ , para de gases y líquidos desde un punto de vista cuantitativo. Esta información será necesaria para la resolución de problemas.
- Para realizar este estudio se procederá a:
 - a) Establecer la ley de Newton para la μ ;
 - b) Se analizará la influencia de la T y P sobre μ de los gases y líquidos;
 - c) Estudiaremos la μ desde el punto de vista de los procesos moleculares;
 - d) Finalmente, se estudiarán brevemente los fluidos no-newtonianos.

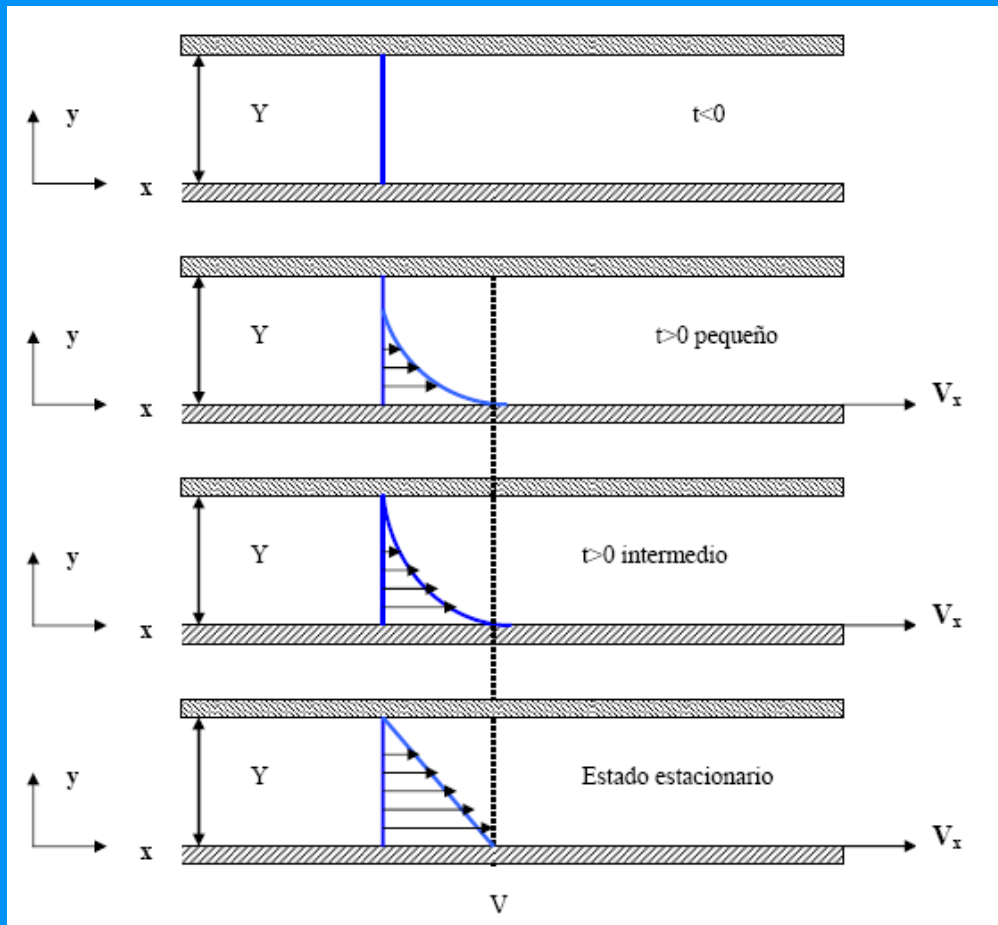
LEY DE NEWTON DE LA μ

Todos los fluidos reales exhiben fricción interna. En las superficies en contacto entre sólido y las partículas de fluido prácticamente no hay velocidad.

Como resultado de lo anterior una parte de esta energía mecánica es disipada en forma de calor.

Para el análisis vamos a considerar el sistema que se esquematiza en la siguiente Figura.

- Consideramos, un fluido contenido entre dos láminas de área A separadas por una distancia “ Y ”.



Para $t < 0 \rightarrow$ sistema en reposo.

Para $t = 0$ la lámina inferior se le imprime un movimiento de dirección “ x ” con V_x .

-Las capas de fluido en contacto con la placa inferior adquieren un movimiento de dirección “ x ” y lo propagan a las capas superiores en la dirección “ y ”. Se transfiere C-M desde la dirección “ x ” a la “ y ”.

Entonces τ , puede interpretarse como un flujo de C-M de dirección “ x ” en la dirección “ y ”.

-A $> t$ el perfil de velocidad se va modificando hasta alcanzar el E-E.

- Para mantener la placa inferior en movimiento con velocidad constante, es necesario aplicar una fuerza F constante. Experimentalmente, se encontró que esta fuerza está dada (suponiendo flujo laminar) por:

$$\frac{F}{A} = \mu \frac{\Delta v}{\Delta y} \quad (2.1)$$

- Es decir, que la fuerza por unidad de área es $\propto$ a la $\downarrow$ de la velocidad con la distancia. La constante de $\propto$ definida por esta ecuación (μ) se denomina viscosidad del fluido.
- En E-E la fuerza F es balanceada por una fuerza actuante debajo de la placa superior, resultante de la μ del fluido. Dicha fuerza es igual al τ_{yx} .

$$\tau_{yx} = \frac{F}{A} = (\text{esfuerzo cortante en la componente } x \text{ que se transmite a lo largo de } y)$$

Y, dicho esfuerzo es una medida de la deformación del fluido, siendo la velocidad de deformación igual a (dv/dy) , por lo tanto :

$$\tau_{yx} = -\mu \frac{\partial v_x}{\partial y} \quad (2.2)$$

Es decir, que la fuerza de corte por unidad de área es $\propto$ al gradiente negativo de la velocidad local. Esta es la "Ley de Newton de la Viscosidad" y los fluidos que la cumplen se denominan fluidos newtonianos.

Los fluidos que no obedecen a esta ley (pastas, suspensiones y polímeros de elevado P. M.) se denominan no-newtonianos.

$$\tau_{yx} = -\mu \frac{\partial v_x}{\partial y} \quad (2.2)$$

Esta ecuación se puede interpretar de la siguiente manera:

En las cercanías de la superficie que se mueve (donde $y = 0$) el fluido adquiere una determinada C-M en la dirección del eje x . Este fluido comunica, a su vez, parte de su C-M a la “capa” adyacente del fluido, dando lugar a que se mantenga en movimiento en la dirección x . Por lo tanto, tiene lugar una transmisión de C-M x a través del fluido en la dirección y , por consiguiente τ_{yx} , puede interpretarse también como “la densidad de flujo viscoso de C-M x en la dirección y ”.

Unidades: según la definición las unidades son:

$$\frac{(\text{fuerza})(\text{tiempo})}{(\text{long})^2} \quad \text{o} \quad \frac{(\text{masa})}{(\text{long})(\text{tiempo})}$$

en el sistema c.g.s.

$$\tau_{yx} [=] \text{ dina. cm}^{-2} \quad ; \quad v_x [=] \text{ cm. seg}^{-1} \quad ; \quad y [=] \text{ cm}$$

por lo tanto

$$\mu [=] (\text{g}_m \text{ cm}^{-1} \text{ seg}^{-2}) (\text{cm seg}^{-1} \text{ cm}^{-1})^{-1}$$

$$\mu [=] (\text{g}_m \text{ cm}^{-1} \text{ seg}^{-1}) [=] \text{ Poise}$$

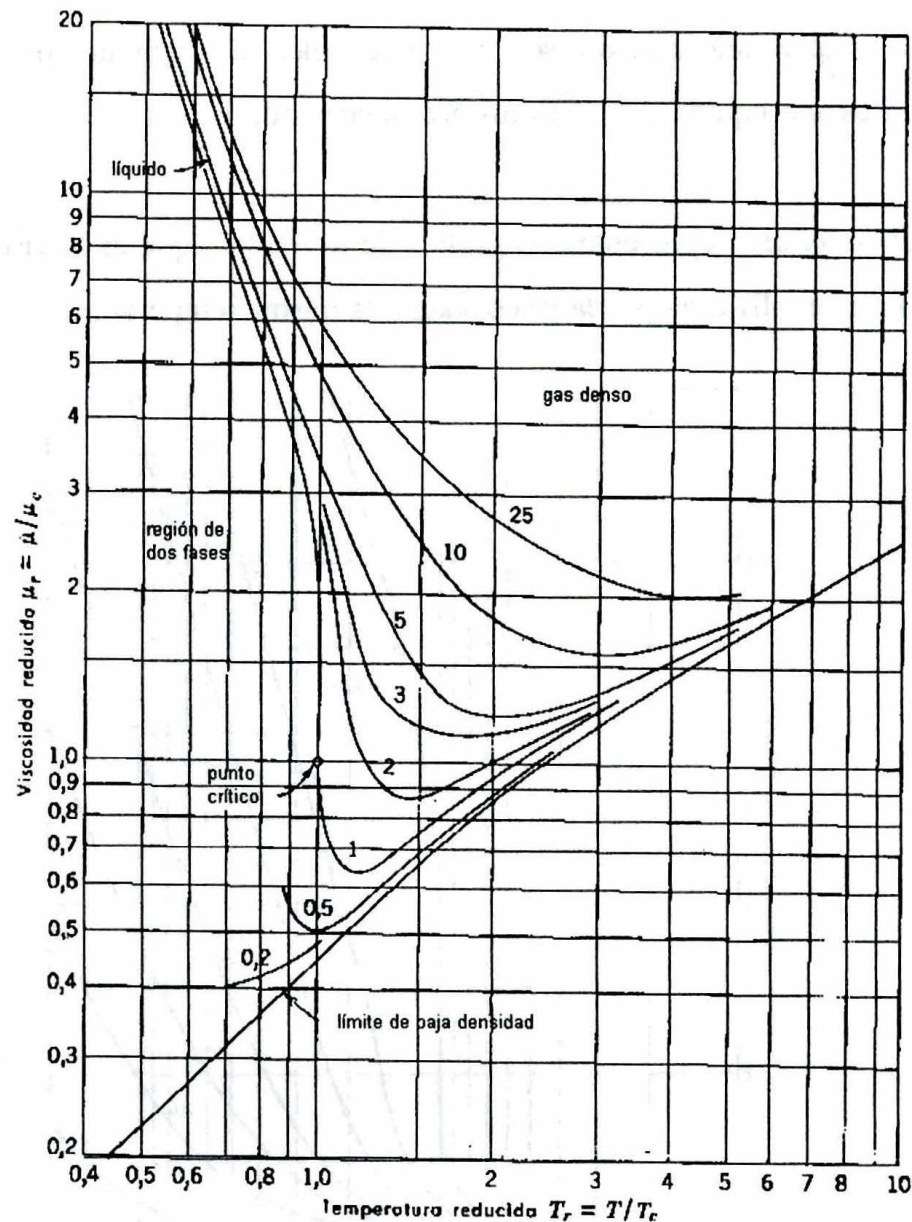
En muchos desarrollos posteriores aparece la relación entre la μ de un fluido y su ρ , conocida esta relación como μ cinemática.

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} [=] \frac{\text{g}_m \text{ cm}^{-1} \text{ seg}^{-1}}{\text{g}_m \text{ cm}^{-3}} [=] \frac{\text{cm}^2}{\text{seg}} [=] \text{ stoke}$$

Influencia de la P y T sobre la μ

Cuando no se dispone de datos la μ puede estimarse por métodos empíricos, utilizando otras propiedades de la sustancia en cuestión. Estudiaremos dos correlaciones que permiten efectuar dicha estimación y a la vez proporcionan información sobre la variación de la μ de los fluidos ordinarios con la T y P.

Estas correlaciones se basan en el análisis de un gran número de datos experimentales de $\neq$ fluidos, mediante la aplicación del principio de los estados correspondientes. A continuación se muestra la Figura de la μ reducida $\mu_r = \mu / \mu_c$ en función de la T reducida, $T_r = T / T_c$ y la presión reducida, $p_r = p / p_c$.



Se observa que la μ de un gas tiende hacia un valor limite definido (curva inferior de la gráfica). Cuando la $P \rightarrow 0$ a una determinada T ; para la $>$ parte de los gases este limite se alcanza, prácticamente a la presión de 1 atm.

La μ de un gas a baja densidad $\uparrow$ con la T , mientras que la de un líquido $\downarrow$ al $\uparrow$ esta.

μ_r en función T_r para distintas p_r .

(Gráfico de Uyehara y Watson, Nat. Petroleum News)

Generalmente, no se dispone de valores experimentales de μ_c , pero puede estimarse de la siguiente manera:

- (i) Si se conoce el valor de la μ para una cierta T y P reducidas de ser posible en las condiciones más próximas a las que se desea analizar, puede calcularse μ_c mediante la expresión:

$$\mu_r = \mu / \mu_c.$$

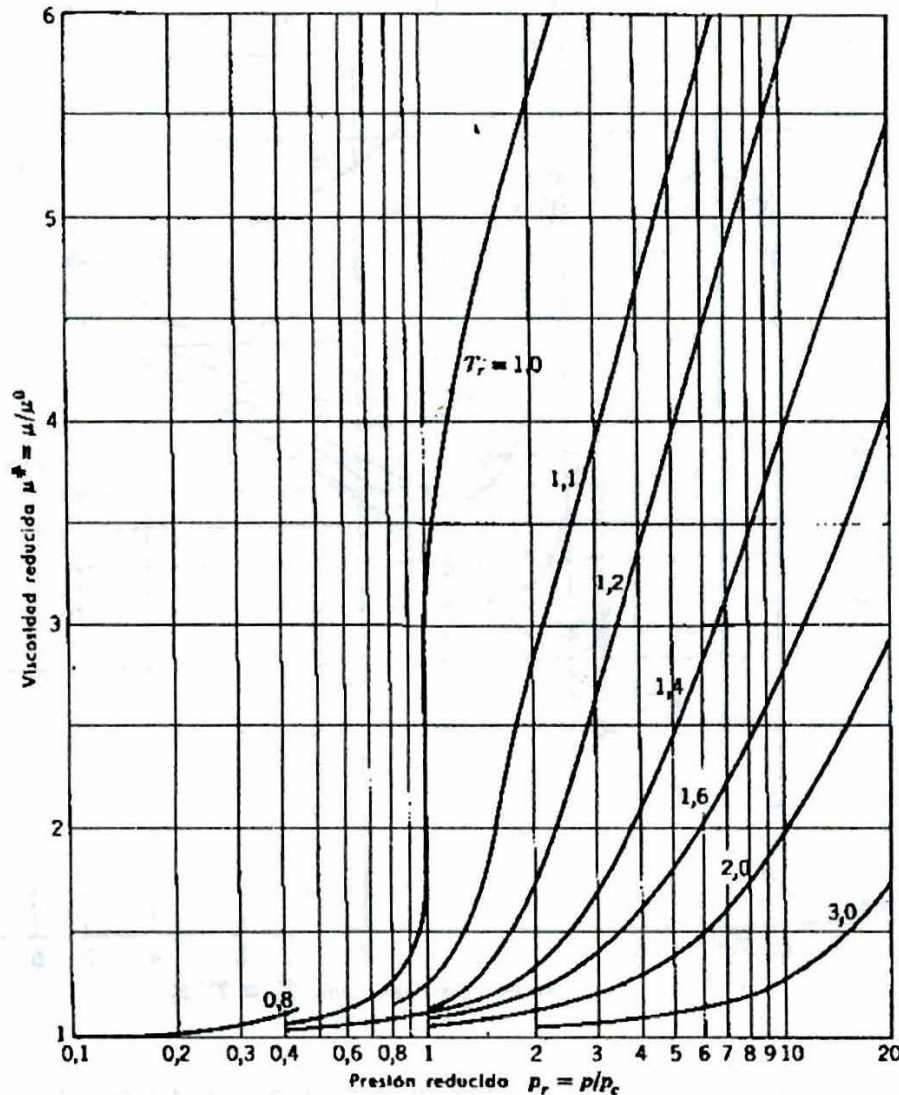
- (ii) Si sólo se conocen los valores cinéticos de P-V-T, μ_c puede estimarse a partir de las siguientes ecuaciones:

$$\mu_c = 61,6 (MT_c)^{1/2} (V_c)^{-2/3} \quad \text{o} \quad \mu_c = 7,7 M^{1/2} P_c^{2/3} T_c^{-1/6} \quad (2.3)$$

- (iii) Existe una amplia información sobre predicciones de distintas propiedades en:

"The properties of gases and liquids". Reid-Prausnitz-Sherwood.

En la Figura siguiente se da una representación gráfica de $\mu^* = \mu/\mu^0$, que es la μ a una dada T y P, dividida por la μ a la misma T y P atmosférica.



Esta Figura puede utilizarse para calcular en forma aproximada las μ de las mezclas de los gases densos, sin embargo, en el caso de las presiones medias es preferible emplear el método de Wilke (se verá más adelante).

μ_r en función de la P_r a diferentes T_r .
Gráfico Kobayashi y Burroughs).

Para calcular la μ de una mezcla de n componentes mediante la primera Figura, se utilizan las propiedades críticas definidas por las ecuaciones:

$$p'_c = \sum_{i=1}^n x_i p_{ci} ; T'_c = \sum_{i=1}^n x_i T_{ci} ; \mu'_c = \sum_{i=1}^n x_i \mu_{ci}$$

Es decir, que en vez de P_c , T_c , y μ_c , se calculan en este caso p'_c , T'_c y μ'_c , procediendo luego de igual forma que si se tratase de un fluido puro. Este método no es muy exacto si las sustancias que forman la mezcla tienen distinta constitución química o sus propiedades críticas difieren notablemente. También, puede usarse la Figura anterior, calculando el valor de μ^0 de la mezcla a partir del método de Wilke.

Teoría de la μ de los Gases a Baja Densidad

En cualquier gas real, las moléculas se mueven en todas direcciones y sus velocidades están distribuidas en un amplio rango. Cuando dos moléculas se aproximan ellas experimentan interacciones muy complejas, ya que las moléculas reales se atraen unas a otras a una distancia relativamente grande y se repelen cuando la separación intermolecular es pequeña. No obstante, al complicado comportamiento de las moléculas, se puede obtener una buena descripción de las propiedades de transporte haciendo uso de la *teoría cinética simplificada para gases en equilibrio*.

Teoría Cinética Simplificada y Viscosidad

En esta teoría se asume que el gas está constituido por:

- (a) Moléculas esféricas, rígidas, que no interactúan entre sí, de diámetro d y masa m , con una concentración de n moléculas por unidad de volumen.
- (b) Se supone que n es suficientemente pequeño de forma que la distancia media entre las moléculas sea mucho $>$ que su diámetro (partículas puntuales).
- (c) Un sistema está en equilibrio cuando todas las propiedades moleculares son uniformes y constantes. Para estos sistemas, es válida la distribución de Maxwell-Boltzmann.

- En el caso de gases a $\downarrow P$ es posible deducir una expresión matemática para calcular la μ empleando la naturaleza molecular de la materia.
- Objetivo: encontrar una expresión matemática que permita calcular la μ de un gas.

Suposiciones:

- Las moléculas son esferas rígidas de diámetro d y masa m , no interactúan entre sí y poseen una concentración de n moléculas por unidad de vol.
- El gas se encuentra a $\downarrow P$.
- Son válidos los resultados de la teoría cinética de gases.

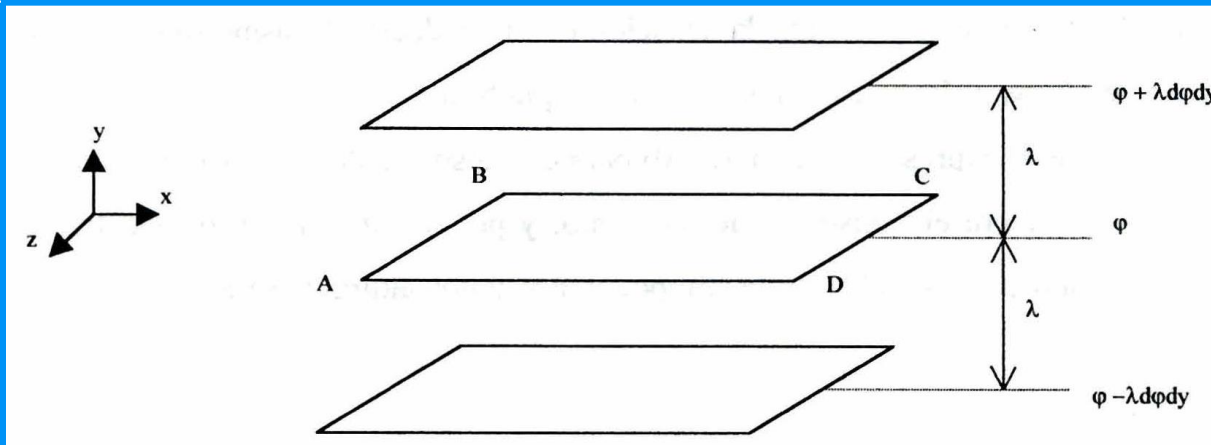
$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8 k T}{\pi m}} \quad \text{Velocidad Media molecular} \quad (2.5)$$

$$z = \frac{1}{4} n \bar{v} \quad \text{Frecuencia de choques por unidad de área} \quad (2.6)$$

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 n} \quad \text{Camino o recorrido libre medio} \quad (2.7)$$

A continuación, representaremos en forma generalizada el transporte de una propiedad para utilizar este resultado en las predicciones de los coeficientes de transporte, viscosidad (μ) para C-M, conductividad calorífica (k) para conducción de calor, y difusividad (D) para materia. Estos dos últimos coeficientes se analizarán en futuras teorías.

Consideremos un plano ABCD, representado en la siguiente Figura y, supongamos que una cierta propiedad $\varphi(y)$ está distribuida a través del gas. Si la distribución de φ no es simétrica con respecto al plano ABCD habrá un transporte neto de φ a través del plano.



$$\varphi = \text{phi}$$

Representación esquemática del transporte de una propiedad a través de un plano.

Para obtener expresiones de los coeficientes de transferencia asumamos que las moléculas que alcanzan el plano han sufrido su última colisión a una distancia promedio λ desde el plano ABCD y que por lo tanto ellas llevan las propiedades del gas prevalecientes a las distancias $\pm\lambda$ desde el plano. Como estamos considerando sistemas cerca del equilibrio, los valores de ϕ a una distancia $\pm\lambda$ del plano ABCD corresponde a los dos primeros términos de una expansión de serie de Taylor.

El flujo $\Gamma_{y(+)}$ de la propiedad ϕ proveniente de y positivo está dado por el producto del flujo molecular en una dirección dada (ec. 2.6) multiplicado por el valor de ϕ en el plano de donde provienen las moléculas.

$\Gamma = \textit{gamma}$

en forma similar, el flujo de ϕ proveniente de y negativo

$$\Gamma_{y(+)} = \frac{n\bar{v}}{4} \left(\phi + \lambda \frac{d\phi}{dy} \right) \quad (2.8)$$

$$\Gamma_{y(-)} = \frac{n\bar{v}}{4} \left(\phi - \lambda \frac{d\phi}{dy} \right) \quad (2.9)$$

luego el transporte neto a lo largo de y positivo es:

$$\Gamma = \Gamma_{y(-)} - \Gamma_{y(+)} = -\frac{1}{2} n\bar{v} \lambda \left(\frac{d\phi}{dy} \right) \quad (2.10)$$

Aplicaremos la ec. (2.10) al transporte de C-M.

$$\Gamma = \Gamma_{y(-)} - \Gamma_{y(+)} = -\frac{1}{2} n \bar{v} \lambda \left(\frac{d\phi}{dy} \right)$$

La ϕ involucra el transporte de momento y por lo tanto la propiedad transportada C-M para el caso de componente x a una altura y será:

$$\phi = m V_{x(y)} \quad (2.11)$$

$V_{x(y)}$, es la componente x de la velocidad global del gas a la altura y. Tenemos $\Gamma = \tau_{yx}$, y $\phi = m V_{x(y)}$, por lo tanto la ec. (2.10) da:

$$\Gamma = \Gamma_{y(-)} - \Gamma_{y(+)} = -\frac{1}{2} n \bar{v} \lambda \left(\frac{d\phi}{dy} \right) \quad \Rightarrow \quad \tau_{yx} = -\frac{1}{2} m n \bar{v} \lambda \left(\frac{dv_x}{dy} \right) \quad (2.12)$$

Comparando la ecuación (2.12) y la obtenida para la Ley de Newton de la μ tenemos:

$$\begin{aligned}
 (2.12) \quad \tau_{yx} &= -\frac{1}{2} m n \bar{v} \lambda \left(\frac{dv_x}{dy} \right) \\
 (2.2) \quad \tau_{yx} &= -\mu \frac{\partial v_x}{\partial y}
 \end{aligned}
 \quad \left\{ \quad \mu = \frac{1}{2} m n \bar{v} \lambda \quad (2.13) \right.$$

Introduciendo las ecuaciones (2.5) y (2.7) en (2.13) se puede escribir la μ como:

$$\begin{aligned}
 (2.5) \quad \bar{v} &= \sqrt{\frac{8 k T}{\pi m}} \\
 (2.7) \quad \lambda &= \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 n}
 \end{aligned}
 \quad \left\{ \quad \mu = \frac{1}{\pi d^2} \left(\frac{k T m}{\pi} \right)^{1/2} \quad (2.14) \right.$$

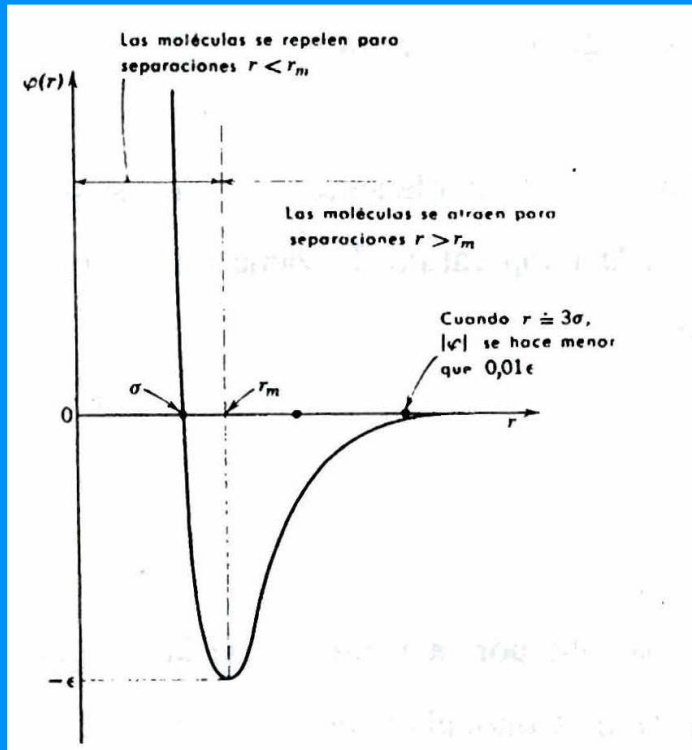
Esta expresión da la racionalidad de la μ con la T y la masa molecular, para gases a $\downarrow \rho$, deducida a partir de la teoría cinética simplificada.

Efecto de las Fuerzas Intermoleculares sobre la μ

La teoría de Chapman-Enskog se emplea cuando existen fuerzas de atracción y repulsión. Las suposiciones realizadas son cuatro:

1. El gas es suficientemente diluido como para que sólo ocurran colisiones binarias.
2. El movimiento de las moléculas durante una colisión pueden describirse mediante la mecánica clásica (partículas puntuales sin rotación y vibración).
3. Solamente ocurren colisiones elásticas.
4. Las fuerzas intermoleculares sólo actúan sobre centros fijos de las moléculas. La función potencial intermolecular es esféricamente simétrica.

La teoría de Chapman-Enskog da expresiones para los coeficientes de transporte en función de la energía potencial de interacción entre dos moléculas del gas separadas una distancia $r(\phi(r))$. Si están muy separadas $\phi(r)$ es (-) y las moléculas se atraen. A distancias pequeñas se repelen. El mínimo de la curva $\phi(r)$ vs r donde son iguales las fuerzas de atracción con las de repulsión se denomina ϵ . El diámetro de colisión σ se define por la distancia a la cual $\phi(r)=0$.



La energía potencial ϕ está relacionada con la fuerza de interacción F mediante la ecuación $F = -d\phi/dr$. Si se conociese exactamente como varían las fuerzas entre las moléculas en función de la distancia entre ellas, se podría sustituir en las ecuaciones de Chapman-Enskog y calcular los coeficientes de transporte.

Energía potencial de interacción molecular
en función de la distancia molecular

La forma de $\varphi(r)$ no se conoce pero afortunadamente se ha comprobado, mediante investigación, que una función empírica satisfactoria de la energía potencial es el potencial de Lennard Jones, para gases no polares.

$$\varphi(r) = 4\varepsilon \left[\left(\frac{\sigma}{r} \right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{r} \right)^6 \right] \quad (2.15)$$

Los valores σ y ε se conocen para muchas sustancias. Si no se conocen estos valores pueden calcularse a partir de las propiedades del fluido en el punto crítico (c), de la T de ebullición del líquido (b), o del punto de fusión del sólido (m), mediante las siguientes ecuaciones empíricas ($k = \text{cte. de Boltzmann}$) en las que:

$$\varepsilon/k = 0.77 T_c$$

$$\sigma = 0.841 V_{c,p}^{1/3} \quad \text{o} \quad 2.44 (T_c/p_c)^{1/3}$$

$$\varepsilon/k = 1.15 T_b$$

$$\sigma = 1.166 V_{b,\text{liq}}^{1/3}$$

$$\varepsilon/k = 1.92 T_m$$

$$\sigma = 1.222 V_{m,\text{sol}}^{1/3}$$

en las que ε/k están en K, σ en Å, V en cm³/mol y P_c en atm

A partir de la teoría de Chapman-Enskog, el coeficiente de μ de un gas monoatómico puro de peso molecular M , a la temperatura T , viene dado en función de los parámetros σ y ε por la siguiente ecuación:

$$\mu = 2.6693 \cdot 10^{-5} \frac{\sqrt{MT}}{\sigma^2 \Omega_{\mu}} \quad (2.16)$$

$$\mu = \frac{1}{\pi d^2} \left(\frac{kTm}{\pi} \right)^{1/2} \quad (2.14)$$

La ec. 2.16 es similar a la ec. 2.14 excepto por la inclusión de la integral de colisión Ω_{μ} . Ω_{μ} es una función ligeramente decreciente del número adimensional kT/ε lo que hace que la μ de los gases a $\downarrow \rho \uparrow$ con la T , aproximadamente, con la potencia 0,6 a 1,0 de dicha variable. Obsérvese que para el intervalo de $\downarrow \rho$, la μ es independiente de la P .

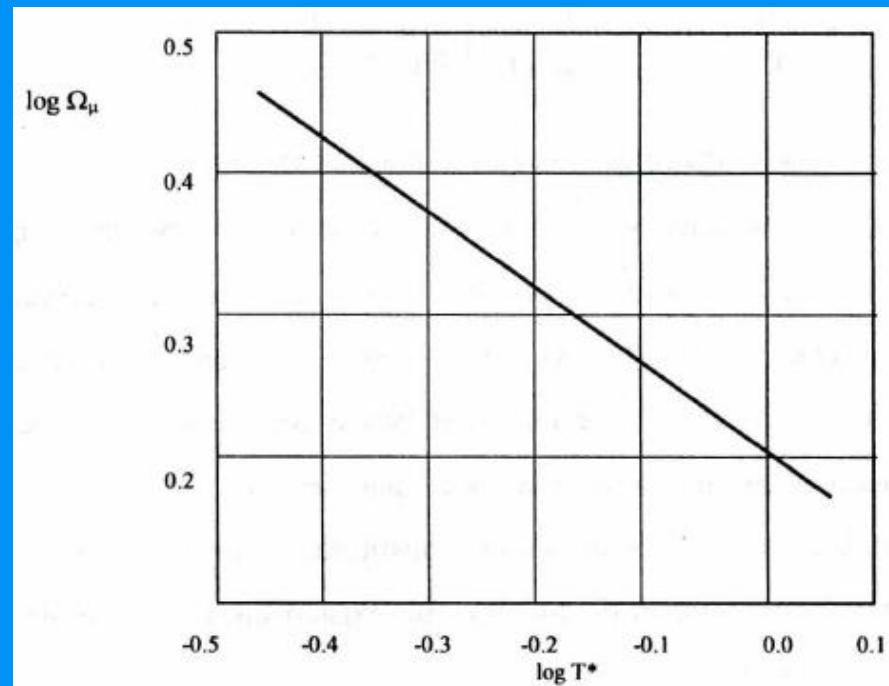
Nenfeld y otros, han propuesto la siguiente ecuación empírica, útil para cálculos por computación.

$$\Omega_{\mu} = \left(\frac{A}{T^* B} \right) + \frac{C}{\exp DT^*} + \frac{E}{\exp FT^*}$$

(2.16)

$T^* = k T/\varepsilon$, $A= 1.161456$, $B= 0.14874$
 $C= 0,52487$, $D= 0.7732$, $E= 2.16178$.
 $F= 2.43787$

Válida para $0.3 \leq T^* < 1100$.



Efecto de la temperatura con la integral de colisión para Lennard-Jones
 $T^* = kT/\varepsilon$.

La teoría de Chapman-Enskog ha sido ampliada por Curtiss y Hirschfelder para incluir mezclas gaseosas de varios componentes. En la mayor parte de los casos resulta muy adecuada la ecuación empírica de Wilke.

$$\mu_{\text{mexc}} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i \mu_i}{\sum_{j=1}^n X_j \Phi_{ij}} \quad (2.18)$$

en la que

$$\Phi_{ij} = \frac{1}{\sqrt{8}} \left(1 + \frac{M_i}{M_j} \right)^{-1/2} \left[1 + \left(\frac{\mu_i}{\mu_j} \right)^{1/2} \left(\frac{M_j}{M_i} \right)^{1/4} \right]^2 \quad (2.19)$$

En estas ecuaciones n es el número de especies químicas existentes en la mezcla; Φ_{ji} , son fracciones molares de las especies i y j . $\Phi = 1$ cuando $i = j$. Se ha comprobado que la ecuación (2.18) reproduce los valores experimentales de μ mezcla, con una desviación media del 2%.

μ de Líquidos - Efecto de la T

Las μ de los líquidos son $\neq$ a la de los gases $\downarrow$ con el $\uparrow$ de T.

En los gases a $\downarrow P$ la μ es consecuencia de la T-C-M por colisiones entre moléculas moviéndose al azar en capas con $\neq$ velocidades.

En los líquidos las moléculas están empaquetadas y la T-C-M se produce por la vibración molecular en la red.

Pese al éxito que se tuvo al utilizar la teoría cinética en el estudio de la μ de los gases, no puede hacerse uso para explicar la causa de la μ de los líquidos.

El conocimiento que tenemos de la μ de los líquidos es básicamente empírico, ya que la teoría cinética de los líquidos se ha desarrollado en forma parcial. No obstante tiene interés la teoría de Eyring y Col., porque explica el mecanismo que tiene lugar y permite estimar en forma aproximada la μ a partir de otras propiedades físicas.

Eyring sugirió que un líquido en reposo sufre continuos reordenamientos, durante los cuales una molécula escapa desde una "jaula" a un "hueco" adyacente y que de esta forma, las moléculas se mueven en cada una de las direcciones de las coordenadas cartesianas, dando saltos de longitud a y frecuencia por molécula k_0 , dada por la ecuación de velocidad.

$$k_0 = \frac{k T}{h} e^{-\Delta \tilde{E}_0 / RT} \quad (2.20)$$

k y h son las constantes de Boltzmann y Plank, respectivamente.

Si el fluido circula en la dirección x , con un gradiente de velocidad dv_x/dy , la frecuencia de reordenamientos moleculares $\uparrow$. Este efecto de energía potencial se distorsiona a causa del esfuerzo aplicado τ_{yz} , como se ve en la figura.

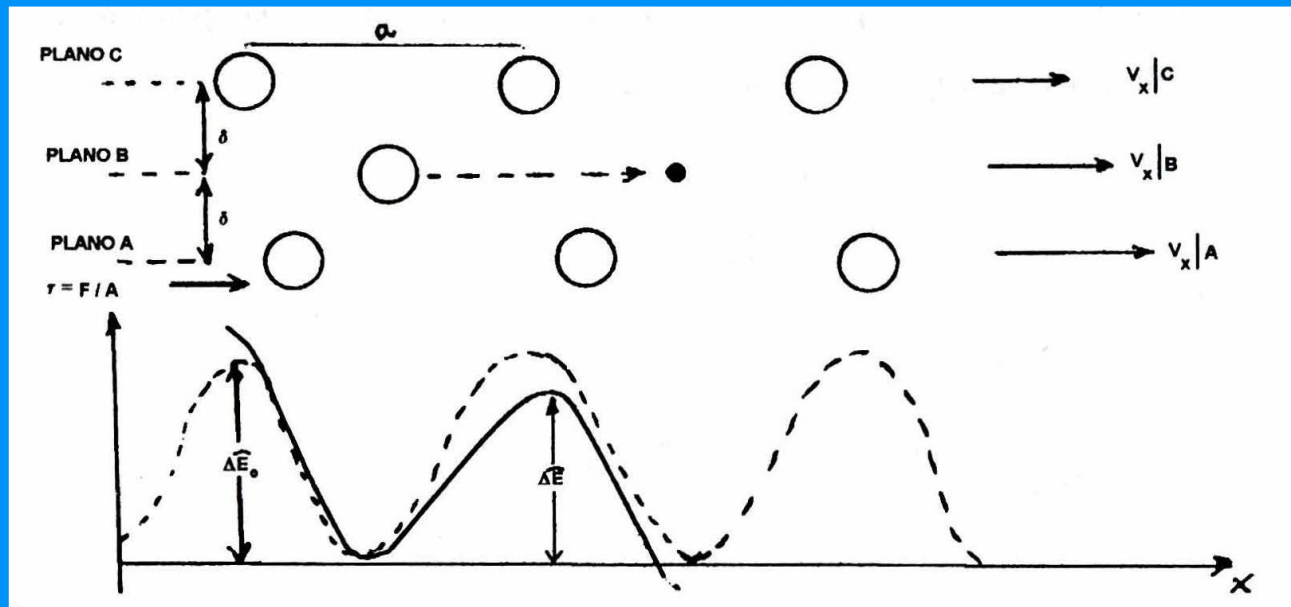


Ilustración de las capas de fluidos en reposo y la energía potencial entre moléculas.

Esta barrera de energía potencial distorsionada toma la forma de:

$$-\Delta\tilde{E} = \Delta\tilde{E} \left(\frac{a}{\delta}\right) \left(\frac{\tau_{yx}}{2} \tilde{V}\right) \quad (2.21) \quad \tilde{V} \text{ es el volumen molar del líquido}$$

corresponde aproximadamente al trabajo comunicado a las moléculas que se mueven hacia la cima de las barreras de energía (Fuerza x distancia), según se muevan a favor del esfuerzo cortante aplicado (signo +) o en contra de él (signo -).

Si llamamos a k_f a la frecuencia de los saltos hacia adelante y k_b a la de los saltos hacia atrás, a partir de las ecs. (2.20) y (2.21) se tiene (tomar exp. y dividir por RT).

$$k_f = \frac{k T}{h} e^{-\Delta\tilde{E}_0/RT} e^{a \tau_{yx} \tilde{V} / 2\delta RT}$$

(2.22)

$$k_b = \frac{k T}{h} e^{-\Delta\tilde{E}_0/RT} e^{-a \tau_{yx} \tilde{V} / 2\delta RT}$$

(2.23)

La velocidad neta con que las moléculas de la capa A se ponen delante de las de la capa B, es exactamente el camino recorrido en un salto (a) multiplicado por la frecuencia neta de los saltos hacia adelante ($k_f - k_b$).

$$V_{x0} = V_x|_A - V_x|_B \quad a (k_f - k_b) \quad (2.24)$$

Considerando que el perfil de velocidad es lineal en la pequeña distancia δ comprendida entre las capas A y B se llega a:

$$\frac{-dv_x}{dy} = \frac{V_{x0}}{\delta} = \frac{a}{\delta} (k_f - k_b) \quad (2.25)$$

Combinando (2.22), (2.23) y (2.25)

$$k_f = \frac{kT}{h} e^{-\Delta\tilde{E}_0/RT} e^{a\tau_{yx}\tilde{V}/2\delta RT} \quad (2.22) \quad (2.26)$$

(2.23)

$$k_b = \frac{kT}{h} e^{-\Delta\tilde{E}_0/RT} e^{-a\tau_{yx}\tilde{V}/2\delta RT}$$

$$\begin{aligned} \frac{-dv_x}{dy} &= \frac{a}{\delta} \left(\frac{kT}{h} e^{-\Delta\tilde{E}_0/RT} \right) \left(e^{a\tau_{yx}\tilde{V}/2\delta RT} - e^{-a\tau_{yx}\tilde{V}/2\delta RT} \right) \\ &= \frac{a}{\delta} \left(\frac{kT}{h} e^{-\Delta\tilde{E}_0/RT} \right) \left(2 \sinh \frac{a\tau_{yx}\tilde{V}}{2\delta RT} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{-dv_x}{dy} &= \frac{a}{\delta} \left(\frac{kT}{h} e^{-\Delta \tilde{E}_0 / RT} \right) \left(e^{a\tau_{yx} \tilde{V} / 2\delta RT} - e^{-a\tau_{yx} \tilde{V} / 2\delta RT} \right) \\ &= \frac{a}{\delta} \left(\frac{kT}{h} e^{-\Delta \tilde{E}_0 / RT} \right) \left(2 \sinh \frac{a\tau_{yx} \tilde{V}}{2\delta RT} \right) \end{aligned} \quad (2.26)$$

Como veremos más adelante la ec. (2.26) predice el flujo para fluidos No Newtonianos. Si $\frac{a\tau_{yx} \tilde{V}}{2\delta RT}$ es pequeño comparada con la unidad, entonces la ec. (2.26) concuerda con la Ley de Newton de la viscosidad, siendo:

$$-\frac{dv_x}{dy} = \frac{a}{\delta} \left(\frac{RT}{h} e^{-\Delta \tilde{E}_0 / RT} \right) \left(2 \frac{a\tau_{yx} \tilde{V}}{2\delta RT \tilde{N}} \right)$$

donde $\tilde{N}$ es el número de Avogadro, por lo tanto

$$\tau_{yx} = -\left(\frac{\delta}{a}\right)^2 \frac{\tilde{N}h}{\tilde{V}} e^{\Delta\tilde{E}_0/RT} \frac{dv_x}{dy} \quad \text{comparando con la ec. (2.2)} \quad \mu = \left(\frac{\delta}{a}\right)^2 \frac{\tilde{N}h}{\tilde{V}} e^{\Delta\tilde{E}_0/RT} \quad (2.28)$$

En la > parte de las aplicaciones se ha tomado a $(\delta/a) = 1$, sin que esto signifique una $\downarrow$ en la exactitud, puesto que , se ha determinado empíricamente para conseguir que la ecuación concuerde con los datos experimentales.

Se ha encontrado que las energías libres de activación, $\Delta\hat{E}_0$, determinadas ajustando la ec. (2.28) para los datos experimentales de la μ frente a la T, son casi constantes para un fluido dado, y pueden correlacionarse fácilmente con la energía interna de vaporización a la T de ebullición:

$$\Delta\tilde{E}_0 = 0,408 \Delta\tilde{U}_{\text{vap}} \quad (2.29)$$

utilizando esta información empírica y tomando $\delta/a=1$, la ecuación (2.28) se transforma en:

$$\mu = \frac{\tilde{N}h}{\tilde{V}} e^{0.408 \Delta\tilde{U}_{\text{vap}} / RT} \quad (2.30)$$

La energía de vaporización a la T normal de ebullición puede calcularse aproximadamente por la regla de Trouton.

$$\Delta \tilde{U}_{\text{vap}} = \Delta \tilde{H}_{\text{vap}} - RT_b = 9.4 RT_b \quad (2.31)$$

con esta aproximación al ec. (2.30) queda:

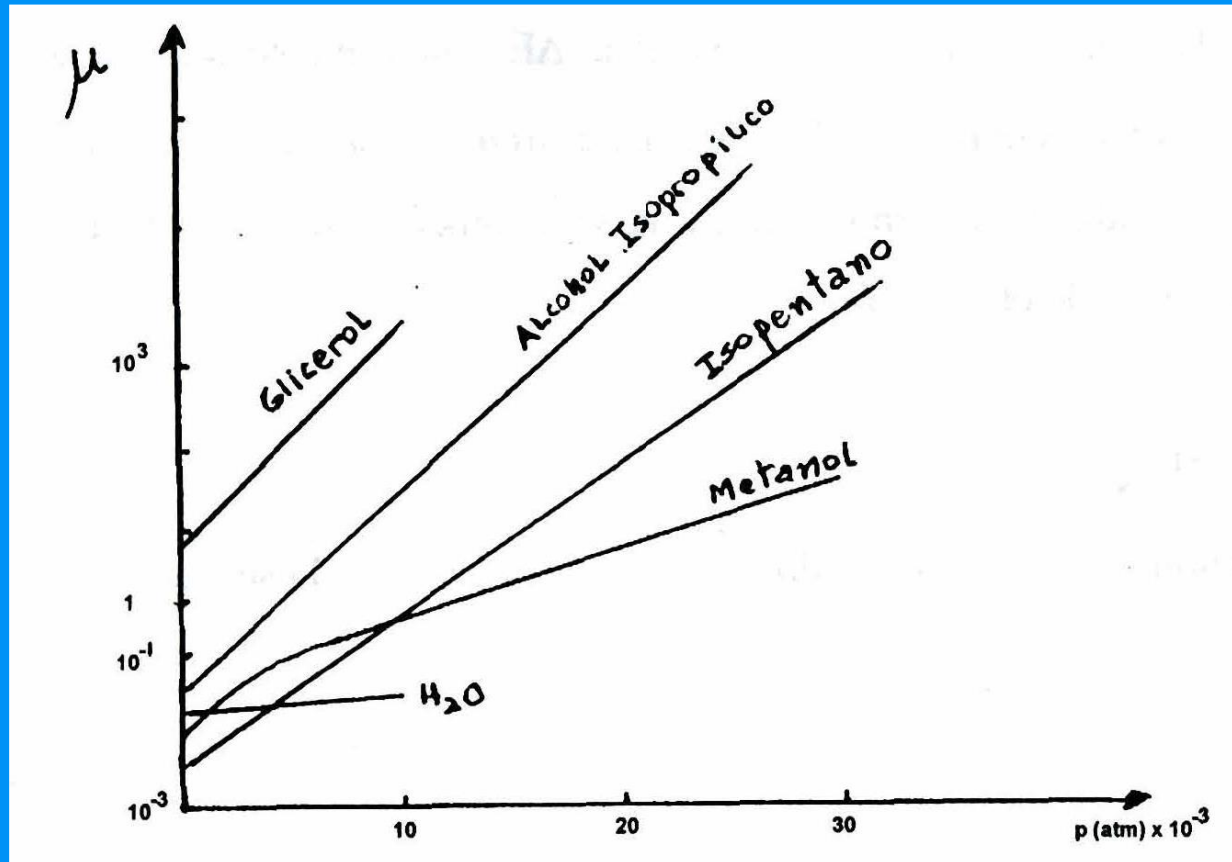
$$\mu = \frac{\tilde{N}h}{\tilde{V}} e^{3.8T_b/T} \quad (2.32)$$

Las ecs. (2.30) y (2.32) indican que la $\mu \downarrow$ exponencialmente con la T, lo que está de acuerdo con el comportamiento observado para la mayoría de los líquidos.

Estas dos ecuaciones no son muy exactas, dando frecuentemente errores de hasta un 30%; son útiles para una estimación aproximada y sirven de guía para la interpolación y extrapolación de datos incompletos de μ .

Efecto de la Presión

La μ de los líquidos, por debajo del punto de ebullición normal, no es afectada a P moderadas, pero a altas P se nota un gran $\uparrow$.



Efecto de la presión sobre la μ de líquidos

Comportamiento y Clasificación General de los Fluidos

La Reología es la ciencia que estudia el comportamiento de los fluidos y se extiende desde la mecánica de fluidos Newtonianos hasta la elasticidad de Hooke. La región comprendida entre ellos corresponde a la deformación y flujo de todo tipo de materiales pastosos y suspensiones. Dependiendo de su μ los fluidos pueden clasificarse en distintas categorías, a saber:

Categoría I - Fluidos Puramente Viscosos

Se caracterizan porque la velocidad de deformación (dv_x/dy), es función exclusiva del esfuerzo de corte aplicado (τ_{yx}), es decir;

$$\frac{dv_x}{dy} = f(\tau_{yx})$$

y se pueden dividir en dos grandes grupos:

- Newtonianos
- No Newtonianos

a) Fluidos Newtonianos: son aquellos que cumplen con la “Ley de Newton”.

$$\tau_{yx} = -\mu \frac{dv_x}{dy}$$

Graficando τ_{yx} en función dv_x/dy se obtiene una recta que pasa por el origen y cuya pendiente es la μ .

Es decir, que a una T dada la μ es constante e independiente del τ_{yx} así como del tiempo de aplicación del mismo. La experiencia demuestra que en todos los gases y líquidos homogéneos no polimerizados τ_{yx} es directamente proporcional a $-(dv_x/dy)$.

b) Fluidos No Newtonianos Puramente Viscosos: No cumplen con la ley de Newton y se caracterizan por tener una μ que varía con el τ_{yx} aplicado, conociéndose la misma como viscosidad aparente, η , definida como:

$$\eta = \tau_{yx} / - \frac{dv_x}{dy}$$

Dependiendo de como varía la η , los fluidos toman el nombre de:

- Pseudoplásticos
- Dilatantes
- Plásticos de Bingham

En las regiones en que $\eta \uparrow$ al $\downarrow$ el gradiente de velocidad el comportamiento se denomina pseudoplástico; y dilatante en las que $\eta \uparrow$ con dicho gradiente (Figura 2.10). Los plásticos de Bingham son aquellos fluidos cuya estructura permanece rígida mientras el esfuerzo cortante es $<$ a un determinado valor (τ_0) y por encima del cual se comporta como un newtoniano.

Categoría II - Fluidos Dependientes del Tiempo

Se caracterizan porque la velocidad de deformación no sólo es función de la tensión aplicada sino también de la duración que dicha tensión es aplicada.

$$\frac{dv_x}{dy} = f(\tau_{yx}, t)$$

Estos fluidos pueden dividirse en dos categorías:

- Tixotrópicos
- Reopécticos

Categoría III - Sistemas Viscoelásticos

Muestran un comportamiento complejo, se caracterizan porque al cesar el esfuerzo recobran parcialmente la forma original; a diferencia de los puramente viscosos que disipan totalmente la energía de deformación (recobran su forma original), los viscoelásticos sólo disipan parcialmente la energía de deformación aplicada.

Fluidos No Newtonianos Puramente Viscosos

a) Fluidos Pseudoplásticos (Viscosidad Estructural)

Muchos líquidos muestran una fuerte disminución de la viscosidad cuando se eleva el gradiente de velocidad:

- cuanto más velozmente se bombean productos farmacéuticos a través de tuberías o capilares,
- cuanto más velozmente se pulverizan pinturas con una pistola o se extienden con pincel en una pared,
- cuanto más fuertemente se expulsa por presión pasta dentífrica, cremas cosméticas o champú en tubos o se vierten de frascos,

- cuanto más intensivo es un proceso de mezcla, tanto más $\downarrow$ la μ de estos materiales. Esto significa que se hace fluir más material por una fuerza predeterminada o por una presión dada o que se puede reducir la energía que se necesita para el caudal necesario de flujo. Los materiales que presentan una $\downarrow$ de su μ al $\uparrow$ el gradiente de velocidad se denominan pseudoplásticos o de μ estructural. Muchas sustancias corrientes en el comercio, como emulsiones, suspensiones o dispersiones, pertenecen a este grupo. Algunas explicaciones de este efecto son:

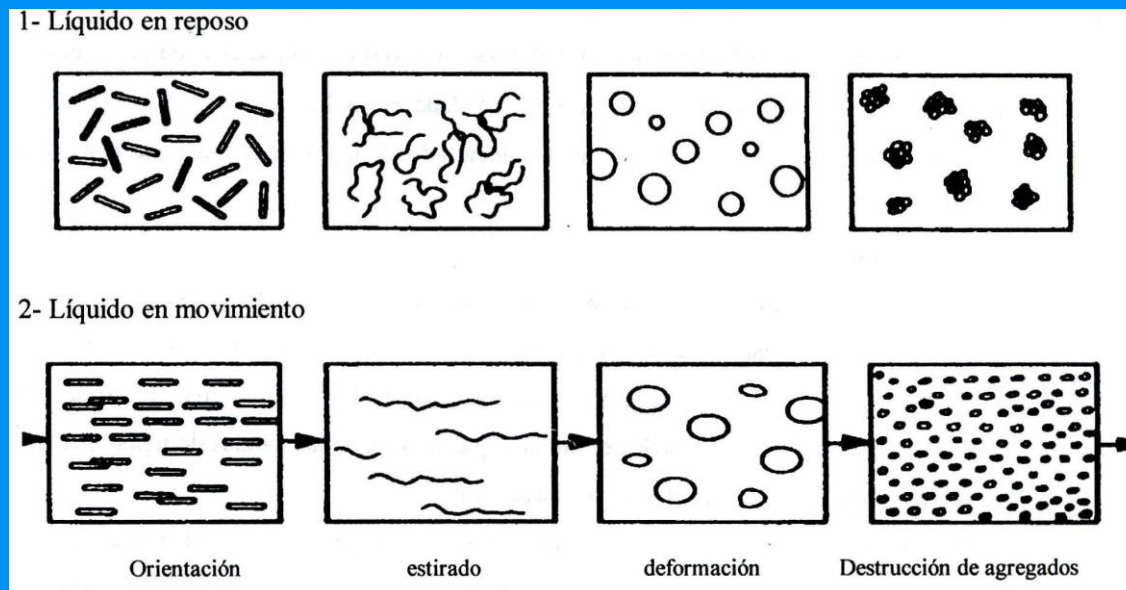


Ilustración del ordenamiento de moléculas o partículas en reposo y en movimiento

b) Fluidos dilatantes

Muestran un $\uparrow$ de la μ al $\uparrow$ el gradiente de velocidad.

Comportamiento dilatante lo encontramos en suspensiones de alta μ como por ejemplo en plastisoles de PVC. En estos, se mezcla una gran parte de partículas de PVC en poca cantidad de reblandecedor líquido. Las partículas de PVC están tan juntas que un volumen dado está casi completamente ocupado por ellas. Basta, entonces una pequeña parte de reblandecedor para rellenar todos los huecos entre las partículas y dar al plastisol un carácter fluido.

La dilatancia en líquidos es rara. Como este comportamiento en general complica el proceso de producción, es aconsejable reducir la dilatancia mediante las variaciones adecuada en la formulación de la sustancia.

c) Plasticidad o Fluido Plástico de Bingham

La plasticidad describe los líquidos de viscosidad estructural que poseen adicionalmente un límite de fluidez.

En su mayoría son dispersiones que en estado de reposo forman una red intermolecular de fuerzas de cohesión (por ejemplo enlaces polares o fuerzas de Van der Waals).

Estas fuerzas evitan, en estado de reposo, un cambio de posición de elementos de volumen y dan a la sustancia un carácter de cuerpo sólido con una μ casi infinita.

Si las fuerzas efectivas son $<$ que las que forman la red o estructura tridimensional, sólo se deforma elásticamente la estructura del cuerpo. Cuando las fuerzas aplicadas son tan grandes que pueden sobrepasar las fuerzas de unión de la red, se sobrepasa el límite de fluidez, la estructura se desmorona.

Sustancias típicas con límite de fluidez son: emulsiones de lodos de perforación, grasas, lápiz de labios, pasta de dientes, y chocolate.

La curva de fluidez de líquidos plásticos no empieza en 0, sino que transcurre un tramo sobre la ordenada para separarse en el valor de τ_0 (límite de fluidez).

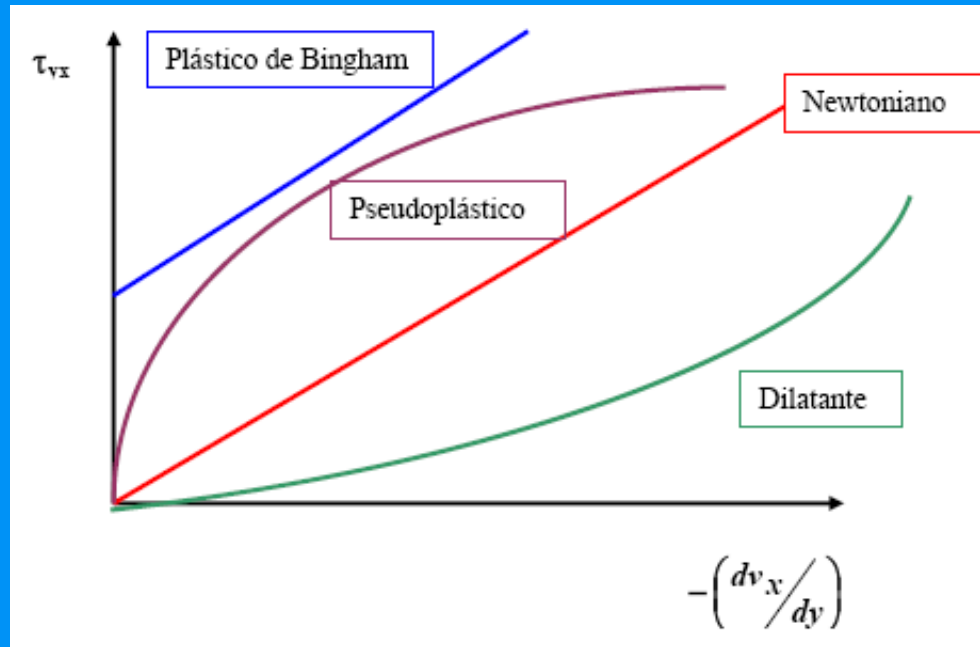
Comportamientos Reológicos Distintos Fluidos

I) Newtoniano.

II) Fluidos pseudoplásticos: $\eta \downarrow$ al $\uparrow$ el gradiente de velocidad.

III) Fluidos dilatantes: $\eta \uparrow$ al $\uparrow$ el gradiente de velocidad.

IV) Plásticos de Bingham: es necesario superar un cierto valor “umbral” de esfuerzos de corte para que el sistema comience a fluir.



Puede ocurrir que la $\eta \downarrow$ con el tiempo de aplicación del esfuerzo (fluidos tixotrópicos) o que $\uparrow$ (fluidos reopécticos).

Interpretación del Comportamiento de Fluidos Puramente Viscosos Mediante Modelos

Modelo de Bingham (Fluido Plástico de Bingham)

$$\tau_{yx} = -\mu_o \frac{dv_x}{dy} \pm \tau_o \quad \text{si} \quad |\tau_{yx}| > \tau_o$$
$$\frac{dv_x}{dy} = 0 \quad \text{si} \quad |\tau_{yx}| < \tau_o$$

el signo es (+) es, si τ_{yx} es positivo (figura 2.11) y (-) si es negativo.
Modelo exacto para muchas pastas y suspensiones finas.

Modelo de Ostwald de Waele (Fluidos Pseudoplásticos y dilatantes)

$$\tau_{yx} = -m \left| \frac{dv_x}{dy} \right|^{n-1} \frac{dv_x}{dy}$$

$n < 1 \rightarrow$ Pseudoplásticos

$n > 1 \rightarrow$ Dilatantes

Esta ecuación de dos parámetros se conoce también como la ley de la potencia. Para $n=1$ se transforma en la ley de Newton, siendo $m = \mu$. Por consiguiente la desviación del valor de n con respecto a la unidad es una medida del grado de desviación del comportamiento newtoniano.

Modelo de Eyring (Fluidos Pseudoplásticos)

$$\tau_{yx} = A \operatorname{arc.senh} \left(-\frac{1}{B} \frac{dv_x}{dy} \right)$$

Se deriva de la teoría cinética de Eyring para líquidos, y predice el comportamiento pseudoplástico para valores finitos de z , y tiende asintóticamente a la ley de viscosidad de Newton cuando τ_{yx} , tiende a cero, siendo en este caso $\mu = A/B$.

Modelo de Ellis

$$-\frac{dv_x}{dy} = \left(\varphi_0 + \varphi_1 |\tau_{yx}|^{\alpha-1} \right) \tau_{yx}$$

$\varphi_1 = 0$; Ley de Newton
 $\varphi_0 = 0$; Ley de la Potencia

Si $\alpha > 1$ el modelo tiende a la Ley de Newton para bajos valores de τ_{yx} , mientras que si $\alpha < 1$ la Ley de Newton se establece para altos valores de τ_{yx} .

Modelo de Reiner-Philippoff

$$-\frac{dv_x}{dy} = \left(\frac{1}{\mu_\infty + \frac{\mu_0 - \mu_\infty}{1 + (\tau_{yx} / \tau_s)^2}} \right) \tau_{yx}$$

La representación gráfica de τ_{yx} vs. $-(dv_x/dy)$ muestra dos puntos de inflexión que corresponden a valores

$$\tau_{yx} = \pm \tau_s \sqrt{3 \mu_0 / \mu_\infty}$$

CATEGORIA II: Fluidos dependientes del tiempo y del τ

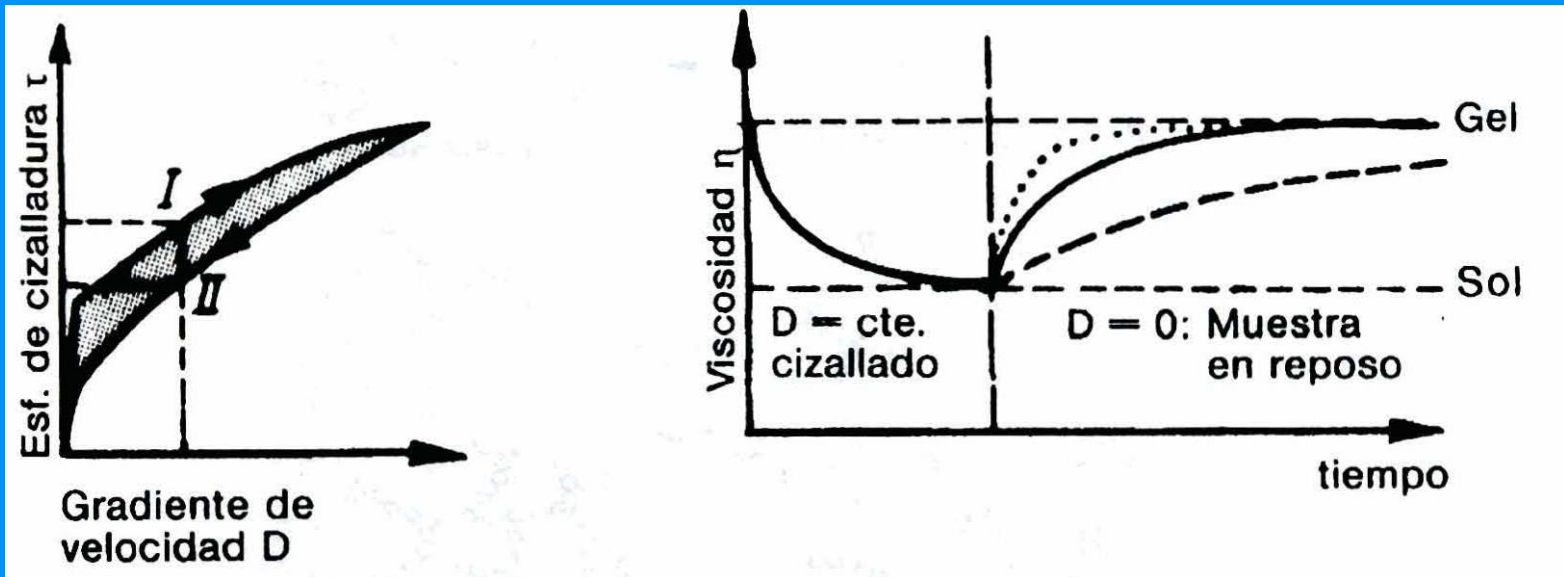
a) Tixotrópicos

Se presenta en líquidos no newtonianos que al finalizar el τ sólo recuperan su μ inicial tras un lapso de tiempo. Estos líquidos presentan también en su mayoría un límite de fluidez.

Muchas dispersiones presentan junto a una $\downarrow$ de la μ por el τ , un $\uparrow$ o $\downarrow$ de fuerzas de unión entre las moléculas o partículas en dependencia del tiempo de duración del τ . Encontrándose la dispersión en estado de reposo se forma una estructura tridimensional debida a estas fuerzas de unión, que a menudo se denomina Gel.

Estas fuerzas son relativamente débiles comparadas con las fuerzas de unión primarias, como por ejemplo, las que mantienen a los átomos formando moléculas. Se rompen fácilmente en una dispersión cuando ésta se somete a un τ durante largo tiempo o incluso cuando se la agita por breve tiempo.

La figura siguiente describe la tixotropía en forma gráfica. En la curva de fluidez, la línea ascendente ya no es idéntica a la descendente. La superficie de histéresis L entre ambas ramas de la curva define la magnitud de este comportamiento, al que se denomina "Índice de Tixotropía".



Comportamiento tixotrópico de los fluidos: a) índice de tixotropía; b) curva de viscosidad en función del tiempo

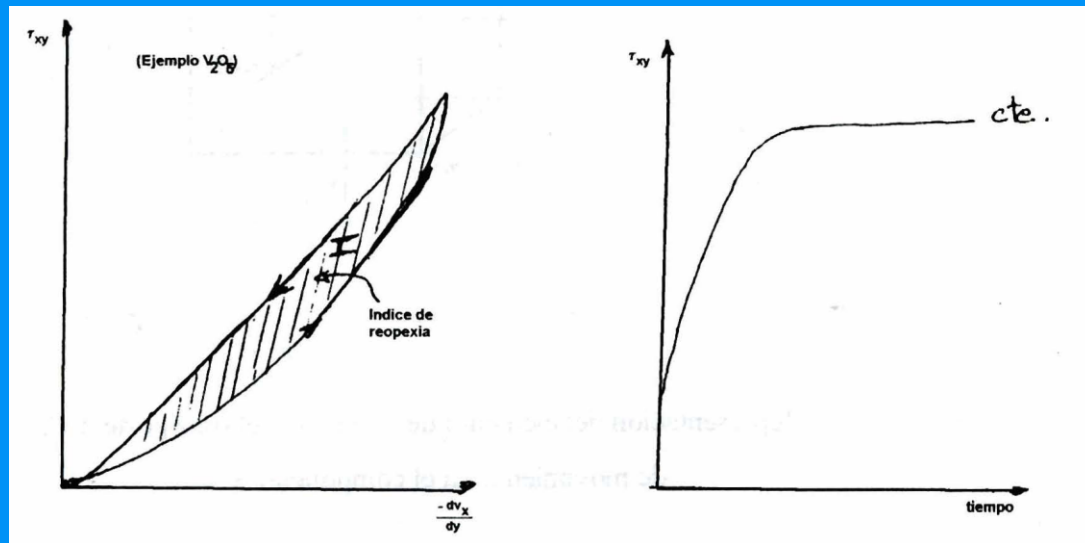
La tixotropía es una característica importante en pinturas, productos alimenticios, productos de cosmética, medicamentos y líquidos industriales similares. Ejemplos son:

Si se aplica una pintura con pincel a una pared vertical, el esfuerzo de corte destruye rápidamente la estructura tixotrópica de la pintura, de manera que se hace "más líquida" y se puede pintar fácilmente. En cuanto se ha formado la capa de pintura sobre la pared, tiene que recuperar lo más rápidamente posible su estructura de gel, a fin de que la pintura no se escurra por la pared.

b) Reopéxicos

Muestran un comportamiento de fluidez en el que la μ se $\uparrow$ con la duración del τ y la μ original sólo puede recuperarse transcurrido un lapso de tiempo después de finalizado el τ .

Esto se pone claramente de manifiesto en el sentido de la dirección con que se unen la curva ascendente y descendente como se puede ver en la figura. La auténtica reopexia se presenta rara vez, al contrario que la tixotropía.



Comportamiento reopéxico de los fluidos: a) índice de reopexia; b) variación del esfuerzo de corte con el tiempo.

Balance Diferencial de Transporte de C-M

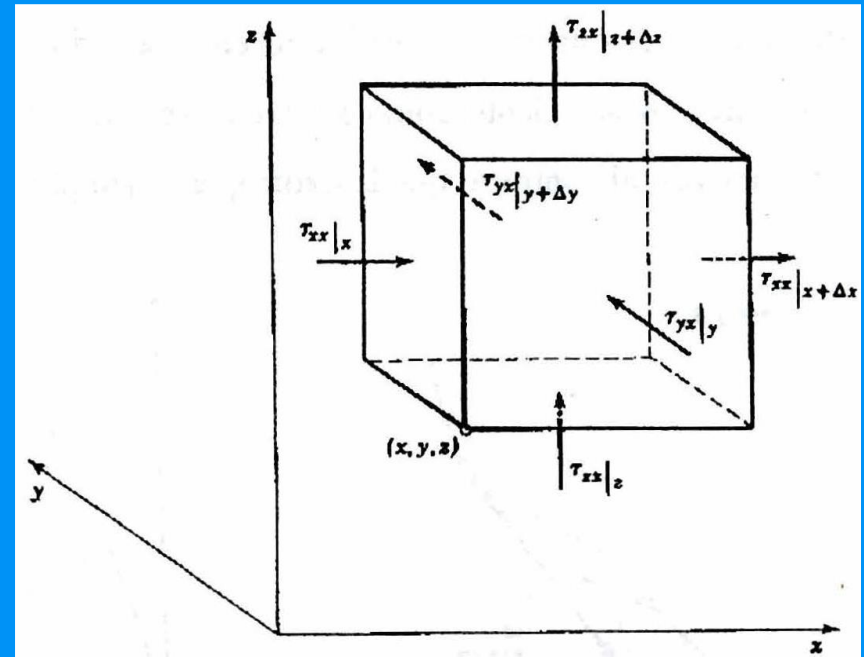
La ecuación de cambio de C-M es una expresión del principio de la conservación de la cantidad de movimiento en forma diferencial.

La C-M es una propiedad de la materia, se traslada o transporta con ella.

$$\text{Cant. de mov.} = m \cdot v \begin{cases} m \cdot v_x \\ m \cdot v_y \\ m \cdot v_z \end{cases}$$

$$m \cdot v / t = \text{flujo de cantidad de movimiento}$$

$$m \cdot v / t \cdot A = \text{densidad de cant. de mov.}$$



Representación del elemento de volumen y el T-C-M en la componente x

velocidad de acumulación de cant. de movimiento	=	velocidad de entrada de cant. de movimiento	-	velocidad de salida de cant. de movimiento	+	suma de las fuerzas que actúan sobre el sistema
---	---	---	---	--	---	---

(2.38)

La C-M que entra y sale del elemento ocurre por dos mecanismos:

- a) Por convección, es decir debido al flujo global del fluido.
- b) Por transporte molecular (viscoso), o sea a causa de los gradientes de velocidad.

La velocidad con la que E por convección el componente x de la C-M por la cara situada en x ($\Delta y \Delta z$), puede expresarse como:

$$\frac{m v_x}{t A} \frac{\Delta x}{\Delta x} = \rho v_x \frac{\Delta x}{t} = \rho v_x v_x \tag{2.39}$$

Esta ρ de C-M para todas las direcciones y componentes está esquematizada en la siguiente tabla.

componente dirección	x	y	z
x	$\rho v_x v_x$	$\rho v_x v_y$	$\rho v_x v_z$
y	$\rho v_y v_x$	$\rho v_y v_y$	$\rho v_y v_z$
z	$\rho v_z v_x$	$\rho v_z v_y$	$\rho v_z v_z$

Multiplicando estas ρ de C-M por sus respectivas áreas de E y S se obtendrán c/u de las velocidades o flujo de C-M. Para la componente x, el flujo convectivo neto de C-M en el elemento de volumen es:

$$\left(\rho v_x v_x \Big|_x - \rho v_x v_x \Big|_{x+\Delta x}\right)\Delta y \Delta z + \left(\rho v_y v_x \Big|_y - \rho v_y v_x \Big|_{y+\Delta y}\right)\Delta x \Delta z + \left(\rho v_z v_x \Big|_z - \rho v_z v_x \Big|_{z+\Delta z}\right)\Delta x \Delta y$$

Ya se definió la densidad de flujo viscoso (τ_{yx}) de la C-M mediante la ley de Newton. Ahora determinaremos el aporte viscoso al transporte global de C-M. Al igual que el aporte convectivo, esta densidad de flujo por efecto difusivo o molecular para todas las direcciones y componentes puede esquematizarse como sigue:

componente dirección	x	y	z
x	τ_{xx}	τ_{xy}	τ_{xz}
y	τ_{yx}	τ_{yy}	τ_{yz}
z	τ_{zx}	τ_{zy}	τ_{zz}

Multiplicando estas densidades por sus respectivas áreas de E y S, se obtendrán las velocidades de C-M debido a las fuerzas viscosas. Para la componente x , el flujo neto viscoso de la C-M en el elemento de volumen es:

(2.40)

$$\left(\tau_{xx} \Big|_x - \tau_{xx} \Big|_{x+\Delta x} \right) \Delta y \Delta z + \left(\tau_{yx} \Big|_y - \tau_{yx} \Big|_{y+\Delta y} \right) \Delta x \Delta z + \left(\tau_{zx} \Big|_z - \tau_{zx} \Big|_{z+\Delta z} \right) \Delta x \Delta y$$

τ_{xx} es el esfuerzo normal que actúa sobre la cara x y τ_{yx} , es el esfuerzo tangencial (o cortante) que actúa sobre la cara x y se transmite en la dirección y y τ_{zx} , esfuerzo tangencial en la cara x y se transmite en la dirección z .

Para analizar las fuerzas que actúan sobre el sistema, como se expresó en el balance dado por la ec. (2.38), solamente nos limitaremos a dos fuerzas, a saber: aquellas provenientes de la gravedad (g) y las originadas por efecto de presión (P), ya analizadas en el tema de la fluido-estática.

Las fuerzas originadas por la gravedad están vinculadas con la masa mediante la expresión:

$$F = m g \quad \text{donde } g \text{ (vector)} \left\{ \begin{array}{l} g_x \\ g_y \\ g_z \end{array} \right.$$

Si se multiplica y divide por el elemento de volumen para el componente x de la aceleración de la gravedad se tiene que:

$$m g_x \frac{\Delta x \Delta y \Delta z}{\Delta x \Delta y \Delta z} = \rho g_x \Delta x \Delta y \Delta z \quad (2.41)$$

La fuerza proveniente de las presiones puede representarse como (para la fuerza incidente en x , cara $\Delta y \Delta z$).

$$F = p \cdot A = p \Delta y \Delta z$$

que tiene unidades de flujo de cantidad de movimiento. Analizando lo que entra y lo que sale del elemento de volumen por efecto de P tendremos que para la dirección x es:

$$(p|_x - p|_{x+\Delta x}) \Delta y \Delta z \quad (2.42)$$

Finalmente, la velocidad de acumulación de C-M x en el elemento de volumen se puede expresar como:

$$\frac{\Delta m v_x}{\Delta t} = \frac{\Delta m v_x}{\Delta t} \frac{\Delta x \Delta y \Delta z}{\Delta x \Delta y \Delta z} = \frac{\Delta \rho v_x}{\Delta t} \Delta x \Delta y \Delta z \quad (2.43)$$

Sustituimos ahora las ecs. (2.39), (2.40), (2.41), (2.42) y (2.43) en la ec. (2.38) nos queda:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \rho v_x}{\Delta t} \Delta x \Delta y \Delta z = & \left(\rho v_x v_x \Big|_x - \rho v_x v_x \Big|_{x+\Delta x} \right) \Delta y \Delta z + \left(\rho v_y v_x \Big|_y - \rho v_y v_x \Big|_{y+\Delta y} \right) \Delta x \Delta z + \\ & \left(\rho v_z v_x \Big|_z - \rho v_z v_x \Big|_{z+\Delta z} \right) \Delta x \Delta y + \left(\tau_{xx} \Big|_x - \tau_{xx} \Big|_{x+\Delta x} \right) \Delta y \Delta z + \left(\tau_{yx} \Big|_y - \tau_{yx} \Big|_{y+\Delta y} \right) \Delta x \Delta z + \\ & \left(\tau_{zx} \Big|_z - \tau_{zx} \Big|_{z+\Delta z} \right) \Delta x \Delta y + \rho g_x \Delta x \Delta y \Delta z + (p \Big|_x - p \Big|_{x+\Delta x}) \Delta y \Delta z \end{aligned} \quad (2.44)$$

Dividiendo esta ecuación por $\Delta x \Delta y \Delta z$ y tomando el límite para cuando Δt , Δx , Δy y $\Delta z \rightarrow 0$ se obtiene el componente x de la ecuación de movimiento.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho v_x = & - \left(\frac{\partial}{\partial x} \rho v_x v_x + \frac{\partial}{\partial y} \rho v_y v_x + \frac{\partial}{\partial z} \rho v_z v_x + \right) \\ & - \left(\frac{\partial}{\partial x} \tau_{xx} + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{yx} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{zx} + \right) - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x \end{aligned} \quad (2.45)$$

Los componentes y, z se obtiene de manera análoga, estos son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho v_y = & - \left(\frac{\partial}{\partial x} \rho v_x v_y + \frac{\partial}{\partial y} \rho v_y v_y + \frac{\partial}{\partial z} \rho v_z v_y + \right) \\ & - \left(\frac{\partial}{\partial x} \tau_{xy} + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{yy} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{zy} + \right) - \frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y \end{aligned} \quad (2.46)$$

Los componentes y, z se obtiene de manera análoga, estos son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho v_z = & - \left(\frac{\partial}{\partial x} \rho v_x v_z + \frac{\partial}{\partial y} \rho v_y v_z + \frac{\partial}{\partial z} \rho v_z v_z + \right) \\ & - \left(\frac{\partial}{\partial x} \tau_{xz} + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{yz} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{zz} + \right) - \frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z \end{aligned} \quad (2.47)$$

Los signos menos (-) aparecen de considerar en el balance C-M que se acumula en la unidad de tiempo, (esto implica que la cantidad de salida es menor que la de entrada) y en este caso las derivadas están indicando una pérdida de velocidad de la propiedad considerada.

Análogamente, τ_{xx} , τ_{xy} , τ_{zx} ... etc. son los nueve componentes del tensor τ (tensor esfuerzo). Como las ecuaciones (2.45), (2.46) y (2.47) ocupan mucho espacio es conveniente combinarlas y obtener una expresión vectorial más compacta, multiplicando previamente por los versores respectivos, resulta:

$\frac{\partial}{\partial t} \rho \mathbf{v} =$	$- [\nabla \rho \mathbf{v} \mathbf{v}]$	$- \nabla p$	
velocidad de aumento de cantidad de movimiento por unidad de volumen	velocidad de ganancia de cantidad de movimiento por convección, por unidad de volumen	fuerza de presión que actúa sobre el elemento por unidad de volumen	
	$- [\nabla \tau]$	$+ \rho \mathbf{g}$	(2.48)
	velocidad de ganancia de cantidad de movimiento por transporte viscoso por unidad de volumen	fuerza de gravitación que actúa sobre el elemento de volumen por unidad de volumen	

(2.48)