UNIDAD 2

Transporte de Cantidad de Movimiento

Prof. Mario Rodriguez
c. e.: mrodriguez@uncu.edu.ar

INTRODUCCIÓN

- **Recordando que el objetivo de la Ingeniería y la Tecnología Química es el Diseño, es decir obtener las dimensiones de un futuro equipo (para ciertas condiciones de entrada y salida) o predecir las condiciones de trabajo de un equipo ya existente.**

- **Hasta ahora hemos analizado una serie de sistemas con complejidad creciente tendiente siempre a determinar la distribución de v, P o τ. También es útil hallar otros valores como $\langle v \rangle$, τ sobre la pared, caída de P, etc.**

- Las ecuaciones de cambio son las herramientas para el diseño de un sistema dado. La resolución de dichas ecuaciones se van restringiendo a medida que aumenta la complejidad del sistema, surgiendo las siguientes posibilidades:

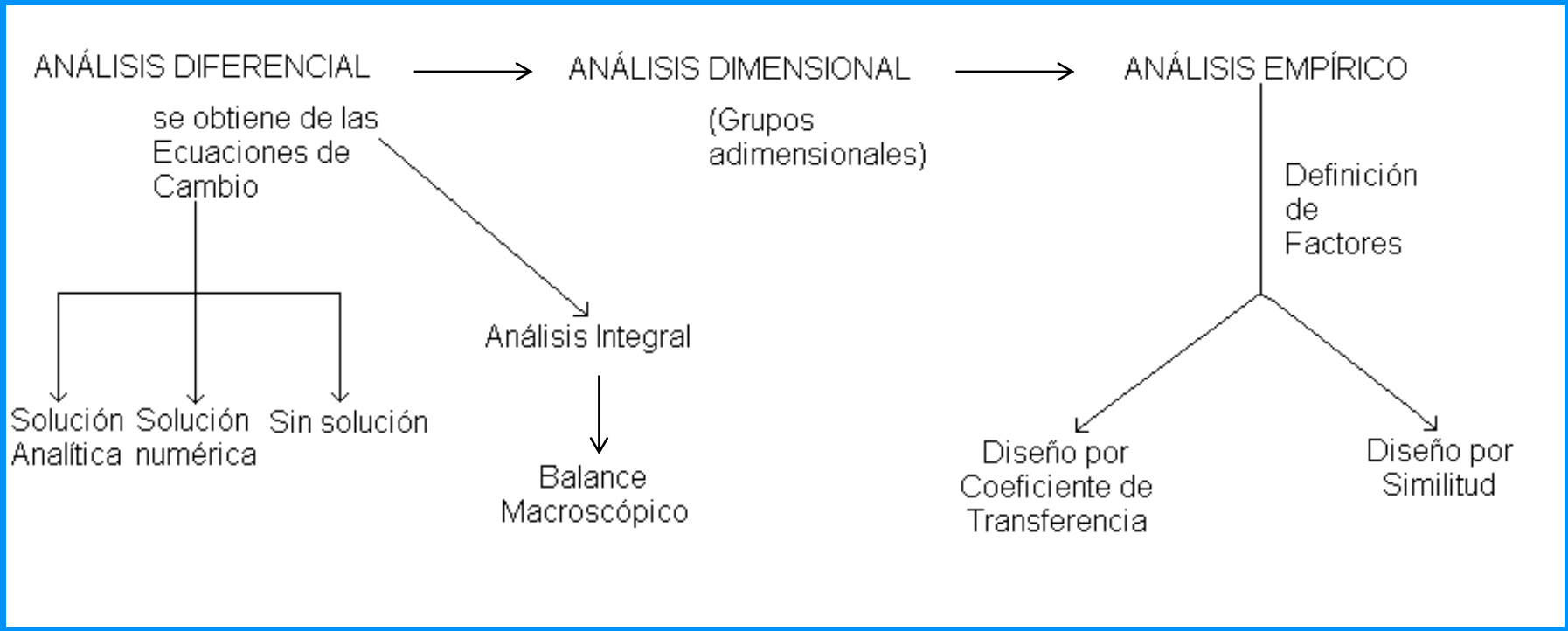
a) que tenga solución analítica. Esto permite conocer el valor de las variables dependientes en cualquier instante y en cualquier zona del equipo.

b) que no tenga solución analítica pero sí numérica. Este caso implica la utilización de computadoras.

c) que no tenga solución debido a la complejidad del sistema. A pesar de todo es el caso más frecuente.

- **En la actualidad la solución de la ecuación diferencial del sistema no se ha logrado aún. Para ello se apela a métodos experimentales que simulen la ausencia de dicha solución, la cual es conocida como *análisis empírico*, comprendiendo los dos métodos más usados en problemas tecnológicos.**

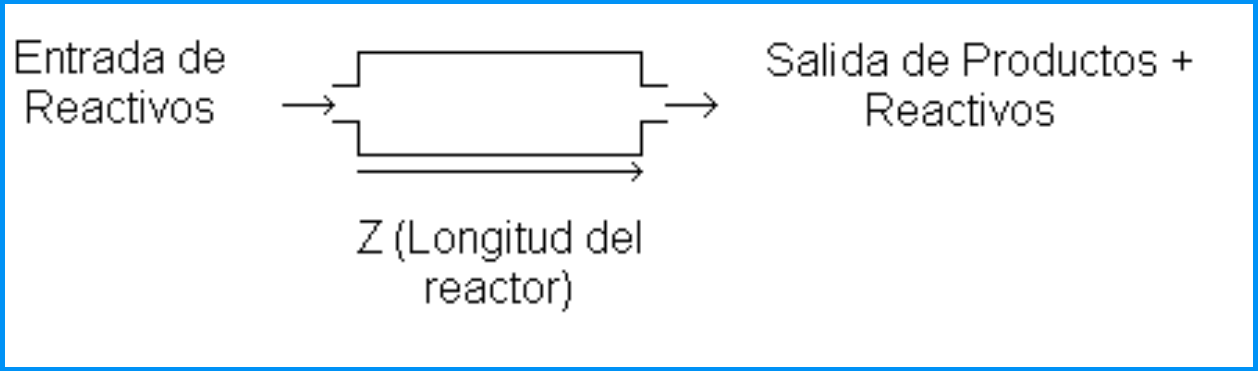
- **Resumen**



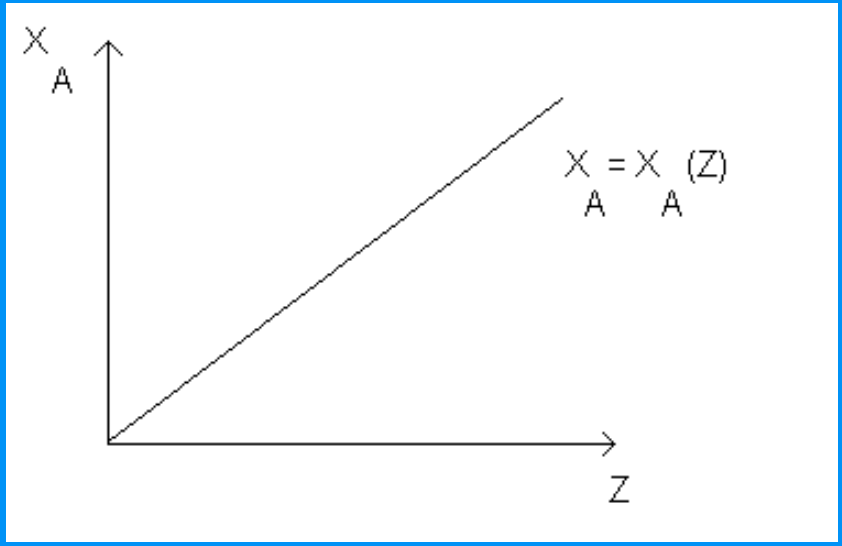
GRUPOS ADIMENSIONALES

- **Vamos a analizar como es afectada la X con las distintas variables del sistema, para el caso del una reacción química que ocurre en un reactor químico isotérmico.**

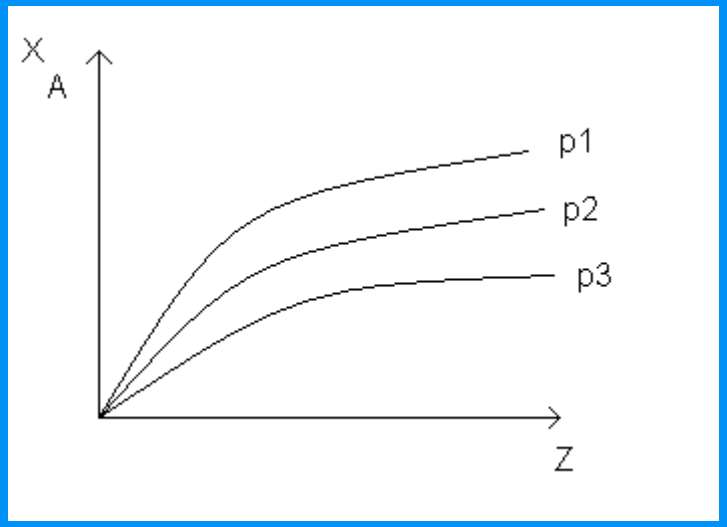
- Vamos a analizar tres casos:



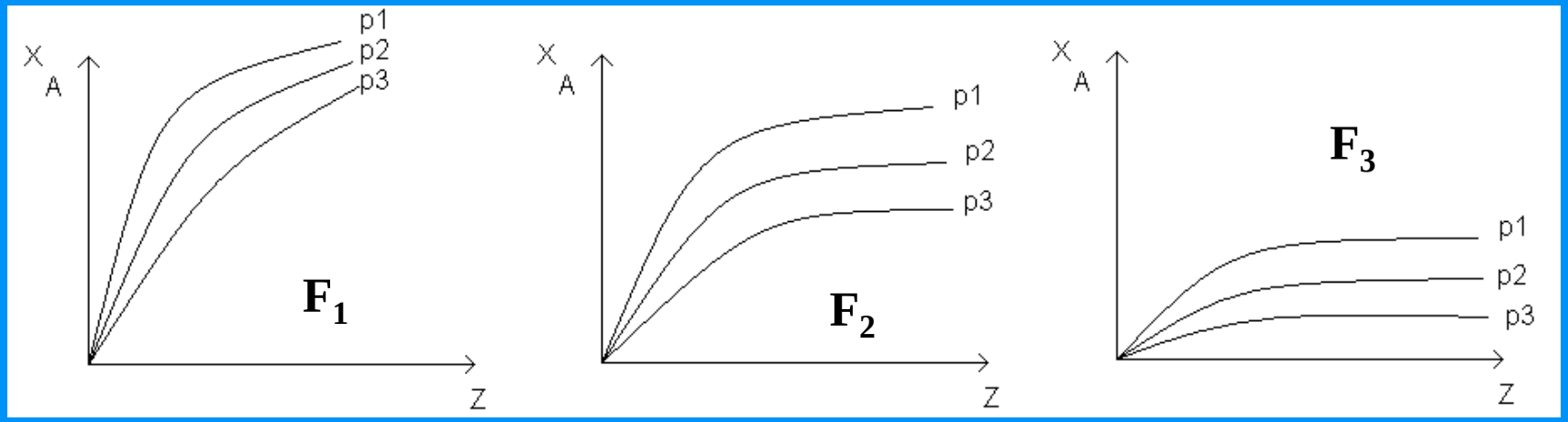
1- La conversión varía con la longitud



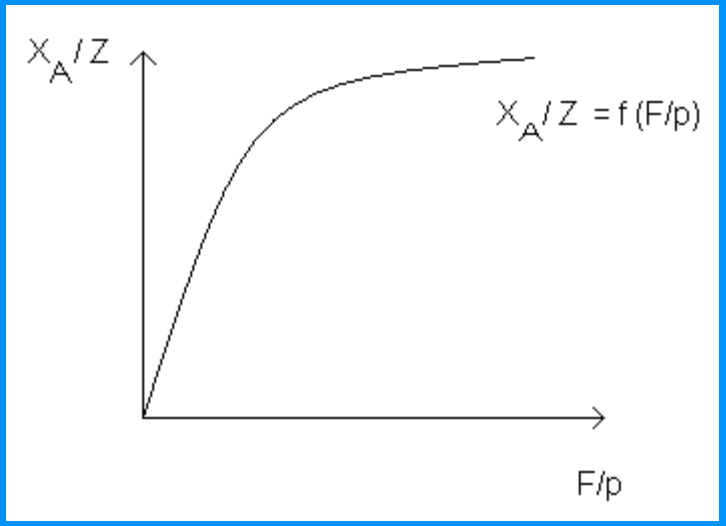
2- La conversión varía con la longitud y la presión:



3- La conversión varía con la longitud, la P y el caudal (F):



Si realizo el cociente $(X_A)/z = f(F/P)$, en lugar de trabajar con 4 variables, se trabaja con 2, simplificando notablemente el problema.



El *análisis dimensional* consiste en asociar variables claves del sistema de forma tal de obtener parámetros adimensionales (independientes de las dimensiones) que representen el comportamiento del mismo. Por ej., el Re, que establece una relación entre las fuerzas de inercia respecto a las viscosas.

$$Re = \frac{\rho < v > D}{\mu}$$

Grupo Adimensional

Si dos sistemas tienen igual Re (para diferentes dimensiones y fluidez), significa que tienen un comportamiento de flujo idéntico en cuanto a la relación de fuerza de inercia y viscosas.

El Re caracteriza "parcialmente", otros grupos lo hacen "totalmente".

A través de los grupos adimensionales se puede expresar el comportamiento de un sistema en términos del mínimo de variables independientes.

Los grupos adimensionales brindan las siguientes ventajas:

- **Al agrupar una serie de variables claves del sistema en forma adecuada, el grupo se hace característico del comportamiento del mismo.**
- **Al agrupar una serie de variables (↓ el número de variables independientes) simplifica notablemente el análisis de un determinado problema.**

  Por ejemplo, cuando se analiza el flujo en un fluido en un conducto, puede llegar a reducirse el número de variables de las que depende el flujo (D, <v>, ρ, μ , L) a dos (Re, L/D). Esto reduce el número de experiencias a realizar en un estudio.

¿Cómo surgen estos grupos?

Para determinar estos grupos es necesario ADIMENSIONALIZAR las ecuaciones de cambios. Esto significa reemplazar las variables dependientes e independientes en la ecuación diferencial por variables adimensionales. Es claro que esta adimensionalización puede llevarse a cabo por muchas vías. En general, se procede a dividir las variables mediante un valor de la misma, que se considera característico del sistema o, en su defecto, por un grupo de parámetros que generen iguales dimensiones.

¿Cuales son estas variables características?

Para las variables dependientes: por ej. para la v es común tomar como parámetro de referencia un valor característico del sistema <v> (velocidad media).

Para las variables independientes: si corresponde a distancias (x, y, z) se adimensionaliza dividiendo por una longitud característica del sistema (por ej. diámetro del tubo).

Si corresponde al tiempo, el caso se complica. Por lo general, se opta por un tiempo que surge de una combinación de otros parámetros utilizados, por ejemplo: en tubos, el tiempo característico = D diámetro /<v> velocidad media).

El número de parámetros que permiten escribir las variables de un sistema en forma adimensional es igual al número de dimensiones.

¿Qué requisitos deben cumplir los parámetros?

- **Entre los *n* parámetros elegidos se deben formar las *n* dimensiones que caracterizan al sistema.**
- **Los *n* parámetros deben ser independientes.**
- **Los parámetros elegidos deben ser realmente característicos en nuestro régimen de flujo.**

Por ejemplo, en C-M:

Las variables son: v, P, x, y, z, y 3 dimensiones: masa, longitud y tiempo (M, L y t). La terna de parámetros más usada es: ρ, D y v.

Adimensionalizar: v, t, x, y, z, P

$$v^* = \frac{v}{\langle v \rangle} \qquad (2.1)$$

$$t^* = t\frac{\langle v \rangle}{D} \qquad (2.2)$$

$$x^* = \frac{x}{D} \qquad y^* = \frac{y}{D} \qquad z^* = \frac{z}{D} \qquad (2.3)$$

$$P^* = \frac{P - P^0}{\rho \langle v \rangle^2} \qquad (2.4)$$

Es incorrecto definir $p^* = p/p^0$, pues la P está relacionada con la v y en consecuencia corresponde adimensionalizarla con el valor característico de v.

ANÁLISIS EMPÍRICO DE TRANPORTE INTERFACIAL DE CANTIDAD MOVIMIENTO

Muchos de los problemas aplicados de flujo pertenecen a dos grandes grupos; a saber:

Flujo en conductos; bombeo de petróleo por tuberías, flujo de agua en canales abiertos, extrusión de plásticos, flujo de un fluido a través de filtros. En las problemas de flujos en conductos se trata de obtener la relación entre la caída de P y la velocidad volumétrica de flujo.

Flujo alrededor de objetos sumergidos; movimiento del aire alrededor de las alas de un avión; movimiento de fluidos alrededor de partículas de sedimentación. En estos problemas, lo usual es obtener la relación entre la velocidad de aproximación fluido y la fuerza resistente.

Definición de factores de fricción

Vamos a considerar el flujo estacionario de un fluido de ρ = constante en c/u de los siguientes sistemas:

a) el fluido circula por una conducción recta de sección uniforme;

b) el fluido circula alrededor de un objeto sumergido que tiene un eje o plano de simetría paralelo a la velocidad de aproximación del fluido. El fluido ejercerá una fuerza F sobre la superficie sólida que puede desdoblarse en dos:

$$\underset{\text{F. que ejercería el fluido en reposo}}{F} = \underset{\text{F. adicional relacionada c/ el comp. cinético del fluido}}{F_s + F_k} \qquad (2.5)$$

En los sistemas del tipo a) F_k tiene la misma dirección que la <v> en la conducción y en los sistemas del tipo b) F_k es de la misma dirección que la velocidad de aproximación v_∞.

El valor de la fuerza F_k puede expresarse arbitrariamente para ambos sistemas como el producto de:

$$F_k = A\,K\,f \qquad (2.6)$$

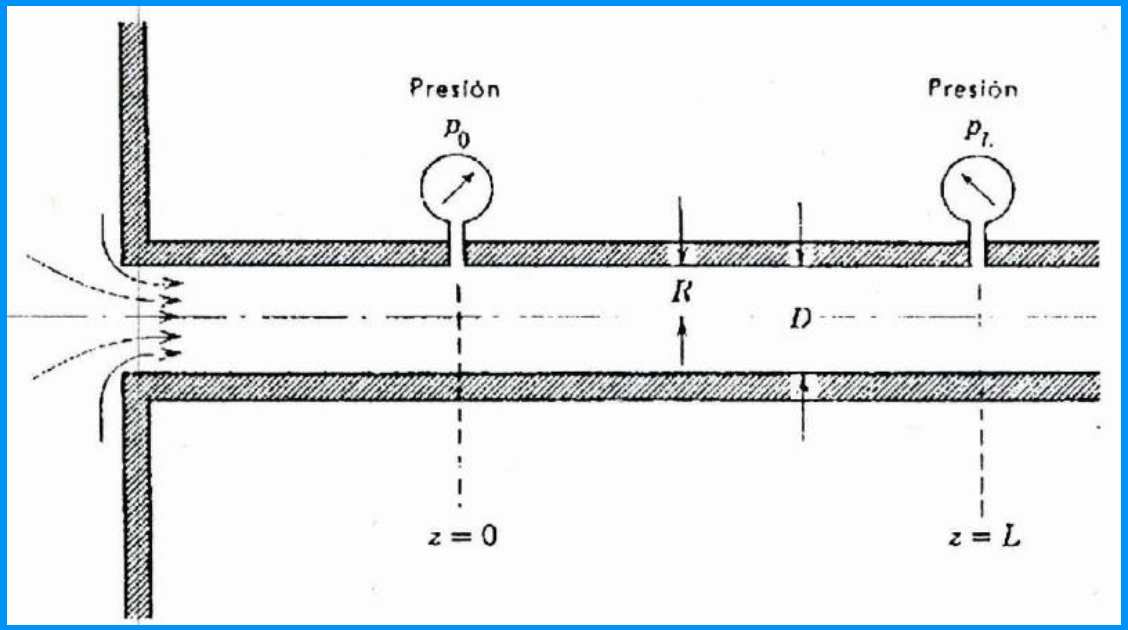
donde: A, es el área característica; K, E cinética por unidad de V y

f = número adimensional denominado factor de fricción.

Esta ecuación es la definición de f, es evidente que para un determinado sistema de flujo, f, no está definido mientras no se especifican A y K. Esta definición resulta útil porque como se verá más adelante, el número f, puede representarse como una función sencilla del Re y de la forma del sistema.

Antes de presentar estas correlaciones vamos a dar algunas relaciones para ver cómo puede obtenerse f a partir de datos experimentalmente:

***Caso 1: flujo en conductos*: supongamos tener un tubo circular de radio R y longitud L, donde fluye en E-E en fluido a ρ = cte.**



Sección de un conducto tubular.

En estos casos generalmente se toma para A la superficie mojada y para K la magnitud 1/2 $\rho \langle v \rangle^2$ por lo tanto, f, está definido por:

$$F_k = (2\pi R\, L)\left(\frac{1}{2}\rho \langle v \rangle^2\right) f \qquad (2.7)$$

Generalmente, la magnitud que se mide no es F_k sino la caída de presión $p_0 - p_L$ y la diferencia de altura un $h_0 - h_L$. Aplicando un balance de fuerza al fluido entre 0 y L en la dirección del flujo, cuando está completamente desarrollado, se tiene que:

$$F_R = A.\tau_{rz}|_{r=R} = 2\pi RL\left(-\frac{dv_z}{dr}\right)_{r=R} \mu$$

$$\left.\frac{dv_z}{dr}\right|_{r=R} = -\left(\frac{P_0 - P_L}{2\mu L}\right) R$$

Generalmente, la magnitud que se mide no es F_k sino la caída de

$$F_k = \left[(p_0 - p_L) + \rho\, g(h_0 - h_L)\right]\pi R^2 = (P_0 - P_L)\pi R^2 \qquad (2.8)$$

Combinando las ecuaciones (2.7) y (2.8) (para D = 2 R) se tiene:

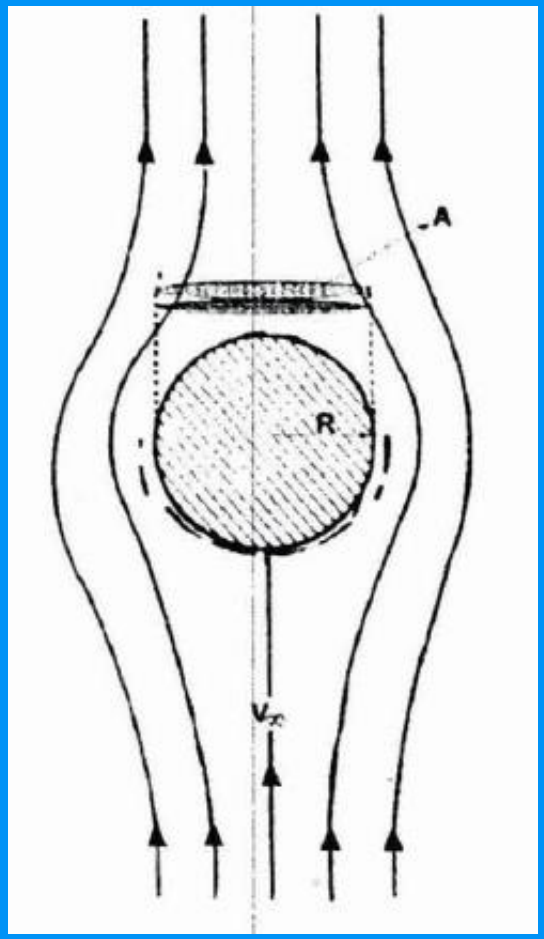
$$F_k = (2\pi R\, L)\left(\frac{1}{2}\rho < v >^2\right) f \qquad (2.7)$$

$$f = \frac{1}{4}\left(\frac{D}{L}\right)\left(\frac{P_0 - P_L}{\frac{1}{2}\rho < v >^2}\right) \qquad (2.9)$$

Esta ecuación muestra explícitamente como se calcula f a partir de los datos experimentales. El f se denomina a veces "Factor de Fricción de Fanning".

Caso 2 - flujo alrededor de objetos sumergidos

Vamos a considerar que el objeto sumergido es una esfera que cae en un fluido en estado estacionario.



Representación de una esfera en caída libre

El área característica se obtiene al proyectar el sólido en un plano perpendicular a la velocidad de aproximación del fluido y $K = 1//2\ \rho\ v_\infty^2$, siendo v, la velocidad con que se aproxima el fluido al objeto a una gran distancia de este.

Para este caso de esfera de radio R, f se define por:

$$F_k = (\pi R^2)\left(\frac{1}{2}\rho v_\infty{}^2\right) f \qquad (2.10)$$

La magnitud que luego se mide generalmente es la velocidad límite del objeto cuando cae en el fluido (esta velocidad limite es por lo tanto v_∞). Para la caída en E-E de una esfera en el seno de un fluido, la fuerza F_k se equilibra exactamente mediante la fuerza de gravitación que actúa sobre la esfera menos la fuerza de flotación.

$0 = F_{total}$ = Fuerza Gravitacional – Fuerza de Flotación

(2.11)

$$F_k = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_{esf}\, g - \frac{4}{3}\pi R^3 \rho g \qquad (2.12)$$

Combinando (2.10) y (2.12) se tiene que: $F_k = (\pi R^2)\left(\frac{1}{2}\rho\, v_\infty{}^2\right) f$ **(2.10)**

$$f = \frac{4}{3}\frac{g\,D}{v_\infty^2}\left(\frac{\rho_{esf} - \rho}{\rho}\right) \qquad (2.13)$$

Esta expresión puede utilizarse para calcular f a partir de datos experimentales de velocidad límite. El coeficiente de fricción definido en (2.10) y (2.13) se lo suele denominar "coeficiente de resistencia".

Factores de fricción para el flujo en tubos

La fuerza del fluido sobre la pared interna de la tubería, tanto para flujo laminar como turbulento viene dada por:

$$dF_k = \tau_{rz}\, r\, d\theta\, dz = \left(-\mu \frac{\partial v_z}{\partial r} r \right) d\theta\, dz \qquad (2.14)$$

$$F_k = \int_0^L \int_0^{2\pi} \left(-\mu \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \Big|_{r=R} R\, d\theta\, dz \qquad (2.15)$$

igualando (2.15) con (2.7) se tiene

$$F_k = (2\pi R L)\left(\frac{1}{2} \rho < v >^2 \right) f \qquad (2.7)$$

$$f = \frac{\int_0^L \int_0^{2\pi} \left(-\mu \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \Big|_{r=R} R\, d\theta\, dz}{(2\pi R L)\left(1/2 \rho \langle v \rangle^2 \right)} \qquad (2.16)$$

A continuación vamos a introducir las magnitudes adimensionales, recordemos que:

$$v_z^* = v_z / \langle v \rangle$$

$$r^* = r / D$$

$$Re = \frac{D \langle v \rangle \rho}{\mu}$$

$$p^* = (p - p_0) / \rho \langle v \rangle$$

$$z^* = z / D$$

por lo tanto:

$$dz = D\, dz^* \qquad (2.17)$$

$$v_z = \langle v \rangle v_z^* \qquad (2.18)$$

$$\frac{d}{dr} = \frac{1}{D} \frac{d}{dr^*} \qquad (2.19)$$

$$\frac{dv_z}{dr} = \frac{\langle v \rangle}{D} \frac{dv_z^*}{dr^*} \qquad (2.20)$$

reemplazando (2.17) a (2.20) en (2.18)

$$f = \frac{\mu R D \langle v_z \rangle}{D 2\pi R L \frac{1}{2} \rho \langle v_z \rangle^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{L/D} \left(-\frac{dv_z^*}{dr^*} \right)_{r^* = \frac{1}{2}} dz^* d\theta$$

(2.21)

$$f = \frac{1}{\pi} \left(\frac{D}{L} \right) \frac{1}{Re} \int_0^{2\pi} \int_0^{L/D} \left(-\frac{\partial v_z^*}{\partial r^*} \right)_{r^* = \frac{1}{2}} dz^* d\theta$$

Relación válida para flujo laminar o turbulento en tubos circulares

Existe una amplia información experimental sobre la pérdida de P con la <v>, por lo tanto se puede calcular f a partir de la ec. (2.11). Graficando f vs. Re para tubos lisos se obtiene las curvas de trazo continuo que se muestra en la siguiente Figura. Estas curvas refuerzan el comportamiento laminar y turbulento para el flujo de fluidos en tubos circulares, lisos y largos.

$$f = \frac{1}{4}\left(\frac{D}{L}\right)\left(\frac{P_0 - P_L}{\frac{1}{2}\rho < v >^2}\right)$$

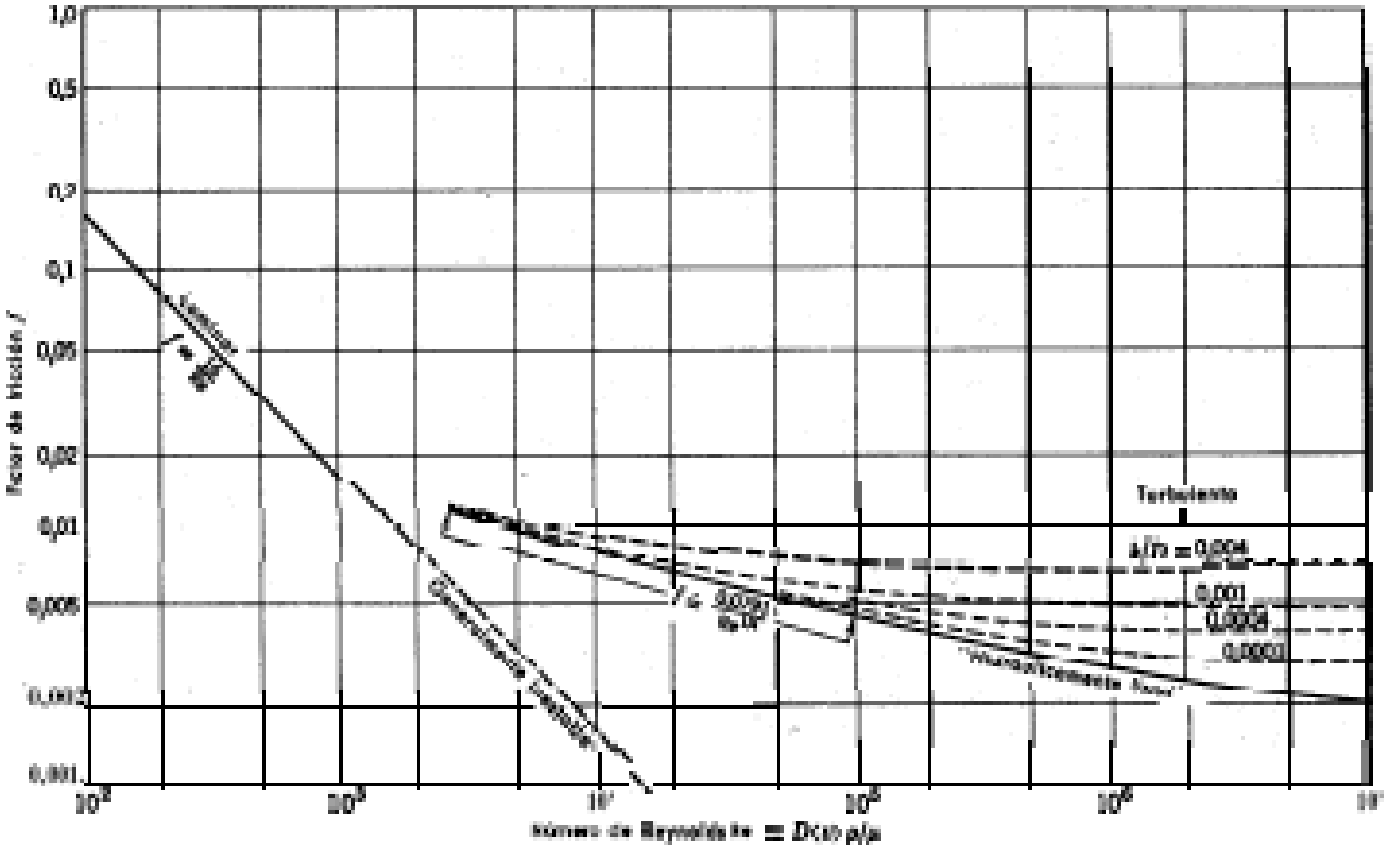


Figura 3.3. Factores de fricción en función del Re para flujo en tubos.

La curva laminar de la Figura corresponde a una representación gráfica de la Ley de Hagen-Poiseuille. Esto se demuestra de la siguiente manera: la Ley de Hagen-Poiseuille establece que:

$$Q = < v > \pi R^4 = \frac{\pi (P_0 - P_L) R^4}{8 \mu L} \qquad (2.22)$$

despejando <v> y reemplazando su igual en la ec. (2.9)

$$f = \frac{1}{4}\left(\frac{D}{L}\right)\left(\frac{P_0 - P_L}{\frac{1}{2}\rho < v >^2}\right)$$

$$f = \frac{16\mu}{D\langle v\rangle \rho} = \frac{16}{Re} \qquad (2.23)$$

Si Re < 2,1 10^3 estable y Re > 2,1 10^3 inestable

El procedimiento Gráfico para el Cálculo de ΔP y <v>

Supongamos tener, los siguientes datos: D, ρ, μ, L, $(P_0 - P_L)$, *k/D*, Y queremos calcular <v>. Hay dos modos de hacerlo:

a) si se conoce k/D y de la curva correspondiente de la Figura se puede construir una nueva gráfica de Re vs. Re $(f)^{1/2}$ (este no contiene <v>)

$$\mathrm{Re}\sqrt{f} = \frac{D\langle v\rangle\rho}{\mu}\sqrt{\frac{(P_o - P_L)D}{2L\rho\langle v\rangle^2}} = \frac{D\rho}{\mu}\sqrt{\frac{(P_o - P_L)D}{2L\rho}} \qquad (2.23)$$

Este término Re $(f)^{1/2}$ se puede calcular y el Re se puede leer del gráfico de Re vs. Re $(f)^{1/2}$. La <v> puede calcularse a partir del Re.

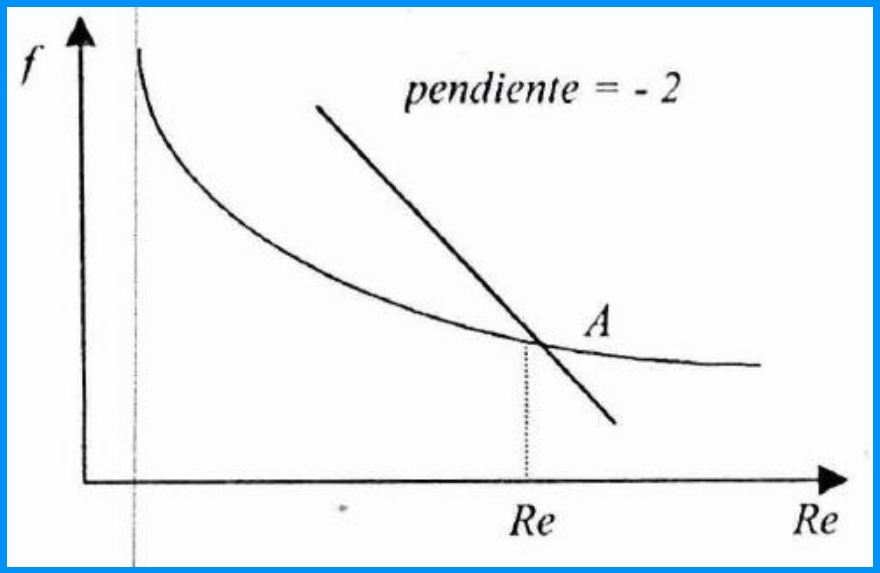
b) Se puede resolver en forma gráfica dos ecuaciones simultáneas, estas son:

$$f = f\ (Re, k/D)$$

Curva de la Figura 3.3

$$f = (Re, \sqrt{f}\,)^2 / Re^2$$

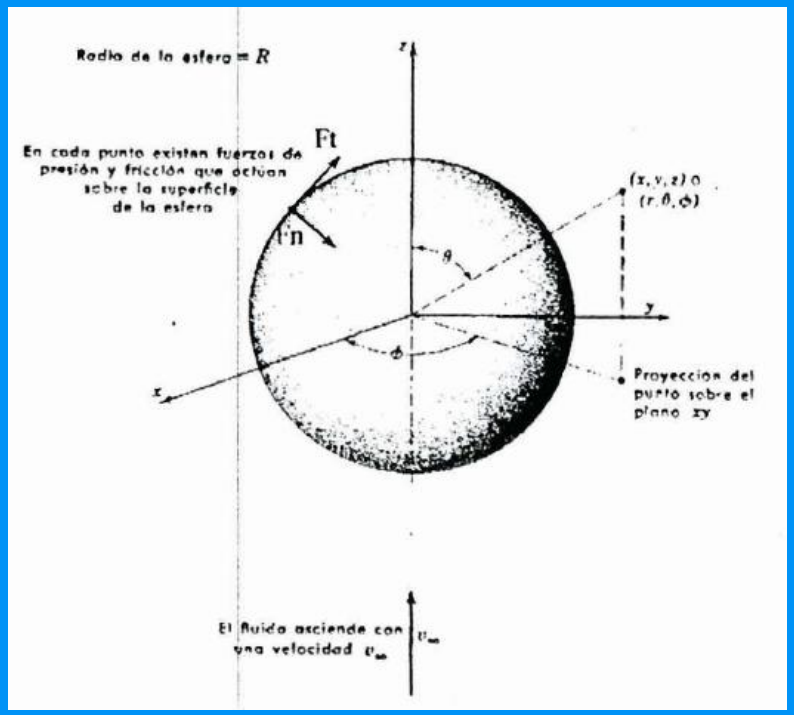
Figura log-log da una reta de pendiente = - 2



punto de corte A solución de las dos ecuaciones

Factores de fricción para el flujo alrededor de esferas

En este punto se utiliza la definición de f de la ecuación (2.10), juntamente con el análisis dimensional ec. de continuidad ($\nabla^* v^*$) y de C-M adimensionalizada, con el fin de determinar la dependencia de f. Nuevamente, se limita el estudio a fluidos de ρ = cte. y, el sistema de coordenadas de la figura.



Fk = fuerza debido a la cinética

Fs = fuerzas de flotación o gravitacional

Fn = fuerza normal (arrastre de presión o de forma)

$$Fn = \int_A p \, _A dA$$

Ft = fuerza tangencial (arrastre de piel)

$$Ft = \int_A \tau \, _A dA$$

Sistema coordenado utilizado para describir el flujo de un fluido alrededor de una esfera rígida.

La contribución de F_k a la fuerza que actúa sobre una esfera en un fluido que circula en la dirección +z, es la fuerza total ($F = F_n + F_k$), menos la fuerza F_s, por lo tanto:

$$F_k = (F_n - F_s) + F_t$$
$$= F_{\substack{\text{resistencia} \\ \text{de forma}}} + F_{\substack{\text{resistencia} \\ \text{de fricción}}} \qquad (2.24)$$

$$F_n = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \{-p|_{r=R} \cos\theta\} R^2 \operatorname{sen}\theta \, d\theta \, d\phi \qquad (2.25)$$

$$F_s = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \{-(p_0 - \rho g z)|_{r=R} \cos\theta\} R^2 \operatorname{sen}\theta \, d\theta \, d\phi \qquad (2.26)$$

$$F_t = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \left\{-\mu \left[r \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right]\Bigg|_{r=R} \operatorname{sen}\theta\right\} R^2 \operatorname{sen}\theta \, d\theta \, d\phi \qquad (2.27)$$

Aquí, P_0 es la presión en el plano z=o, que pasa por el ecuador de la esfera. Si se desdobla ahora f en dos contribuciones de acuerdo a la F dada por la ec. (2.24).

$$f = f(\text{forma}) + f(\text{fricción}) \qquad (2.28)$$

$$f_{\text{forma}} = \frac{2}{\Pi} \int_0^{2\Pi} \int_0^{\Pi} \left\{ -P^* \cos\theta \right\} \operatorname{sen}\theta \, d\theta \, d\phi \qquad (2.29)$$

$$f_{\text{friccion}} = \frac{4}{\pi} \frac{1}{Re} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \left\{ -\left[r^* \frac{\partial}{\partial r^*} \left(\frac{v_\theta^*}{r^*} \right) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial v_r^*}{\partial \theta} \right] \right\}_{r^*=1} \operatorname{sen}^2\theta \, d\theta \, d\phi$$

(2.30)

Las soluciones de las ecuaciones de variación de cantidad de movimiento y continuidad, con las condiciones límites apropiadas se tiene que:

$$P^* = P^*(x^*, y^*, z^*, Re) \equiv P^*(r^*, \theta, \phi, Re)$$

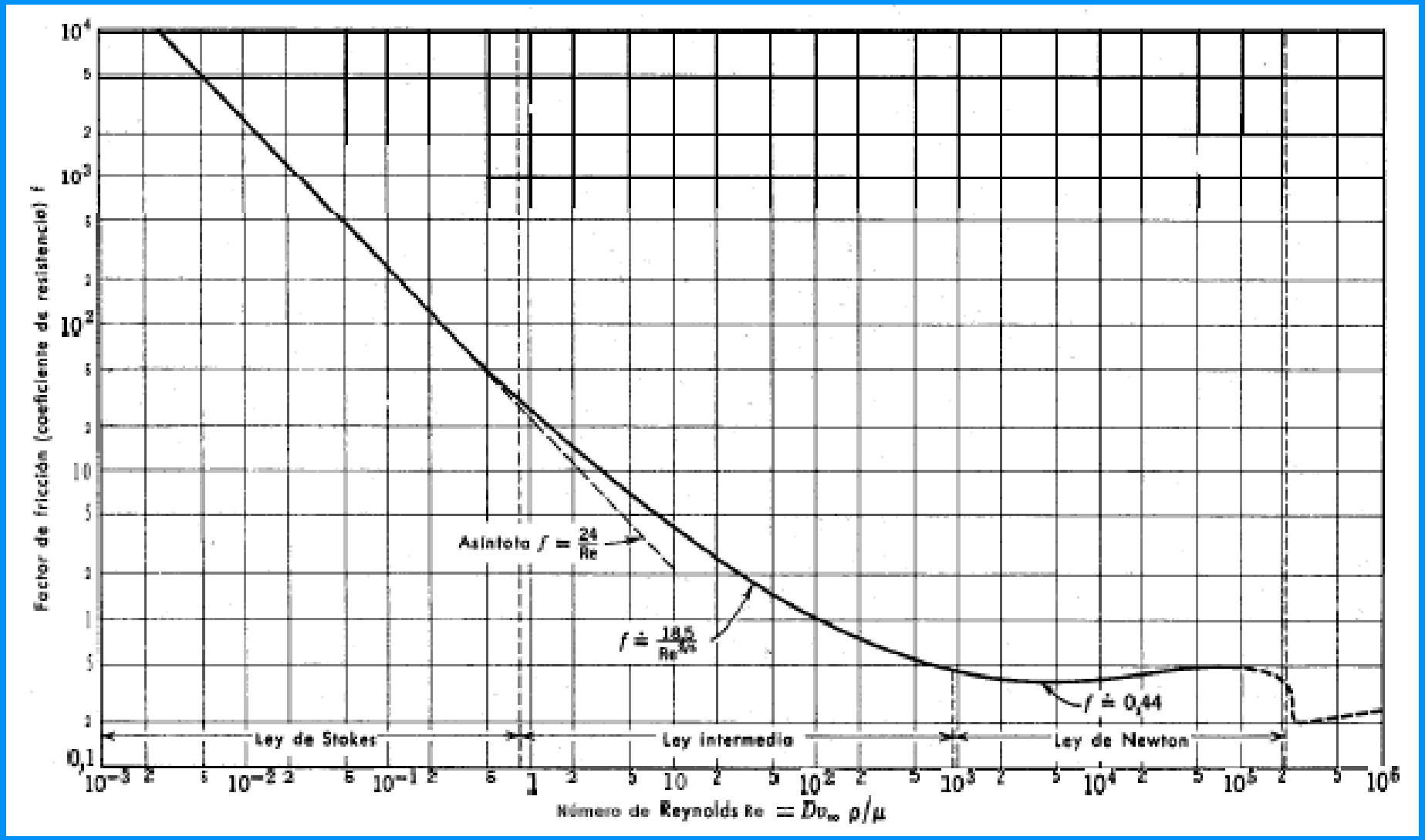
$$v^* = v^*(x^*, y^*, z^*, Re) \equiv v^*(r^*, \theta, \phi, Re)$$

y se llega a

$$f = f(Re)$$

estando definido

$$Re = \frac{D v_\infty \rho}{\mu} = \frac{2R v_\infty \rho}{\mu} \qquad (2.31)$$

donde D y R son el diámetro y radio respectivamente de la esfera.

Se han determinado muchos datos experimentales para el flujo alrededor de esferas, de forma que se dispone de una gráfica de f frente a Re para esferas lisas (Figura).