UNIDAD 3

Transporte de Energía

Prof. Mario Rodriguez
c. e.: mrodriguez@uncu.edu.ar

INTRODUCCIÓN

- **La Termodinámica estudia la E y sus transformaciones, hay dos E en tránsito: *trabajo y calor* y sólo existen cuando hay un intercambio de E entre dos sistemas o entre un sistema y sus alrededores.**
- **Cuando tal intercambio se produce sin transferencia de masa desde el sistema y sin que exista diferencia de T se dice que la E ha sido transferida por medio de trabajo. Si el intercambio se debe a una diferencia de T se dice que la E ha sido transferida por medio de un flujo calórico o calor. Aquí, trataremos sobre las características de este último tipo de transferencia de E.**

INTRODUCCIÓN

- **En general la transferencia de U es llamada "transferencia de calor", aunque termodinámicamente hablando el término es incorrecto pues no es el calor el que se transfiere, sino la U, y el flujo de calor es el "mecanismo" por el cual se transfiere dicha U. Sin embargo, el término se sigue usando como "transferencia de calor", aunque no sea tan apropiado desde el punto de vista termodinámico.**

- **Los procesos básicos de transferencia son:**

  a) Conducción, b) Convección y c) Radiación.

a) ***<u>Conducción de calor:</u>*** **es el mecanismo de transferencia de U por intercambio de E_c proveniente de las moléculas, por comunicación directa mediante movimientos vibracionales o por el movimiento de electrones (conducción de metales).**

La expresión de la velocidad correspondiente es:

$$q = -k\,\Delta T \qquad (3.1)$$

Donde: q, es el flujo calórico, E por unidad de A y t; T, la temperatura y k, es el coeficiente de conductividad térmica dependiente del medio donde se produce la conducción y de la T (supone medio isotrópico, válido en fluidos y soluciones homogéneas).

b) ***<u>Convección de Calor</u>*****, transporte de U debido a movimientos de los elementos de fluido. Es decir, transferencia generada por el mezclado de las distintas porciones del fluido por movimiento macroscópico de elementos del mismo (se da en líquidos y gases).**

Si el movimiento del fluido es causado por: medios mecánicos externos (bomba) se llama *"convección forzada"* y si es por diferencias de ρ creadas por desigualdades de T existente en el fluido, el proceso se llama *"convección natural"*.

En principio, pues ya se analizará más adelante en detalle, definiremos la expresión fenomenológica de transporte de energía por convección como:

$$Q = h\,A\,\Delta T \qquad (3.2)$$

donde: Q, es la cantidad de calor transferida por unidad de t; A, el área de transferencia; ΔT, la diferencia de T entre los puntos en que se transfiere la energía y *h*, el llamado *"coeficiente de transferencia de calor"*.

c) ***<u>Radiación:</u>*** **es la E que se transfiere mediante un mecanismo electromagnético sin necesidad de un medio material y a la velocidad de la luz.**

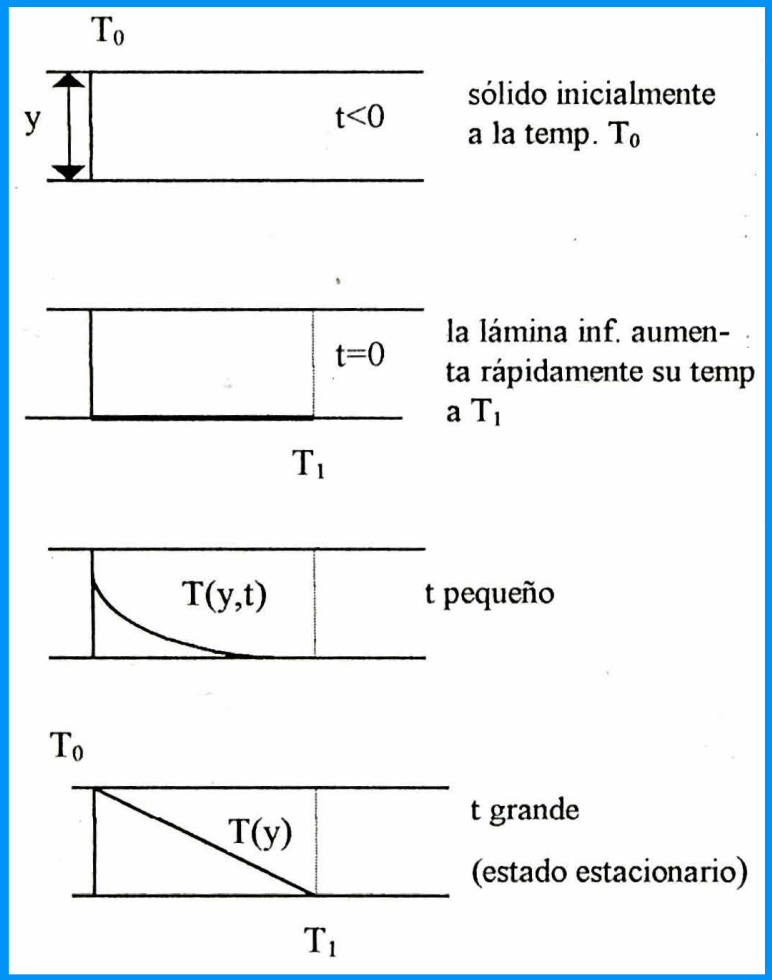
La expresión de velocidad de transferencia es la *ley de Stefan-Boltzmann,* que estipula que la velocidad de transferencia de calor desde un cuerpo negro es proporcional a la cuarta potencia de la temperatura absoluta.

$$Q = K\ A\ T^4 \qquad (3.3)$$

Siendo: *K*, la constante de Stefan-Boltzmann = 1,355 x 10^{-2} cal/ seg cm^2; K^4 = 0.1712 x 10^{-8} BTU hs^{-1} ft^{-2} R^{-4}.

CONCEPTO DE CONDUCTIVIDAD CALORÍFICA

Empezaremos por establecer la Ley de Fourier que define la conductividad calorífica de un gas, líquido o sólido.



Formación del perfil de T en E-E en una placa sólida situada entre dos láminas.

Para t<0 el material sólido está a T_o.

En t=0, la lámina inferior se pone bruscamente a T_1, ligeramente superior a T_o, que se mantiene constante.

A t>0 el perfil de T varía en la placa y finalmente se alcanza una distribución lineal de la T "E-E".

Luego, debe existir una velocidad constante de flujo de calor Q a través de la placa para que se mantenga la diferencia de T, $\Delta T = T_1 - T_o$, para valores suficientemente pequeños de ΔT, se cumple que:

$$\frac{Q}{A} = k\frac{\Delta T}{y} \qquad (3.4)$$

Es decir, el flujo de calor por unidad de área es ∝ a la ↓T con la distancia, siendo la constante de proporcionalidad la "conductividad calorífica" de la placa. Se cumple para gases y líquidos siempre que no haya convección y radiación.

$$q_y = -k\frac{dT}{dy}$$

Ley de Furrier (conducción del calor)

(3.5)

En un medio isotrópico *k* tiene el mismo valor en las tres direcciones, aún cuando *T* varía en el espacio, es decir:

(3.6)

$$q_x = -k\frac{\partial T}{\partial x} \qquad q_y = -k\frac{\partial T}{\partial y} \qquad q_z = -k\frac{\partial T}{\partial z}$$

por lo tanto el *vector densidad de flujo de calor* :

$$q = -k\,\nabla T$$

(3.7)

Existe una semejanza entre la ecuación para la densidad de flujo unidimensional de E y la correspondiente a la densidad de flujo unidimensional de C-M.

$$q_y = -k\frac{\partial T}{\partial y} \quad \Longleftrightarrow \quad \tau_{yx} = -\mu\frac{\partial x}{\partial y}$$

En ambos casos la densidad de flujo es proporcional a un gradiente negativo de una variable macroscópica y los coeficientes de proporcionalidad son propiedades físicas que dependen de las sustancias y de los valores locales de *P* y *T*.

Según la definición de la ec. (3.5), las unidades son:

$$q_y = -k\frac{dT}{dy}$$

$$k\frac{q_y}{dt/dy}[=]\frac{cal/cm^2 seg}{K/cm}[=]cal/cm\,seg\,K\,[=]BTU/ft\,hr\,R$$

Difusividad Térmica

$$\alpha = \frac{k}{\rho\,Cp}[=]\frac{cm^2}{seg} \qquad \textbf{(3.8)}$$

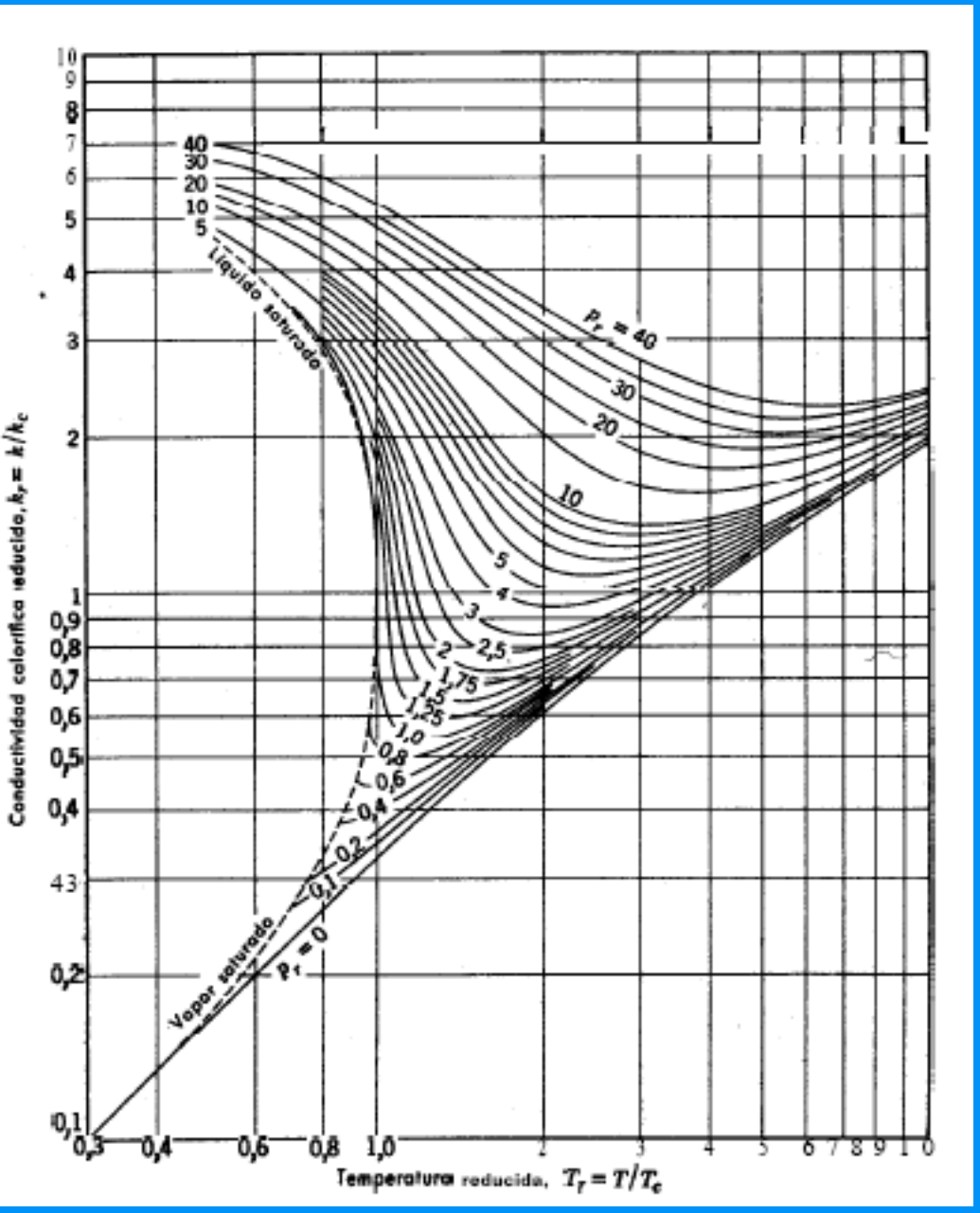
Comparando con la Viscosidad Cinemática

$$\gamma = \frac{\mu}{\rho}[=]\frac{cm^2}{seg}$$

PREDICCIÓN DE LA *k*

Como vimos *k* queda definido por la ley de Fourier y su predicción puede hacerse con dos tipos de datos: a) Teóricos y b) Empíricos. Los primeros se basan en la concepción de la materia, interpretando la transferencia de calor según los mecanismos moleculares, que difieren dependiendo del medio: gaseoso, líquido o sólido, por lo que los analizaremos por separado.

Estas correlaciones se basan en el análisis de un gran número de datos experimentales de diferentes fluidos, mediante la aplicación del principio de los estados correspondientes. En la Figura siguiente se muestra una representación de la k reducida $k_r = k/k_c$ en función de la T reducida ($T_r = T/T_c$) y la P reducida ($P_r = P/P_c$).



k_r de gases monoatómicos, en función de la T_r y P_r (Gráfica de Owens-Thodos)

- Dada para gases monoatómicos y aproximada para poliatómicos.

- Se observa que la *k* de un gas a ↓P tiende a una función límite con la *T*. Para la > parte de los gases, el límite se alcanza prácticamente a la P de 1 atm.

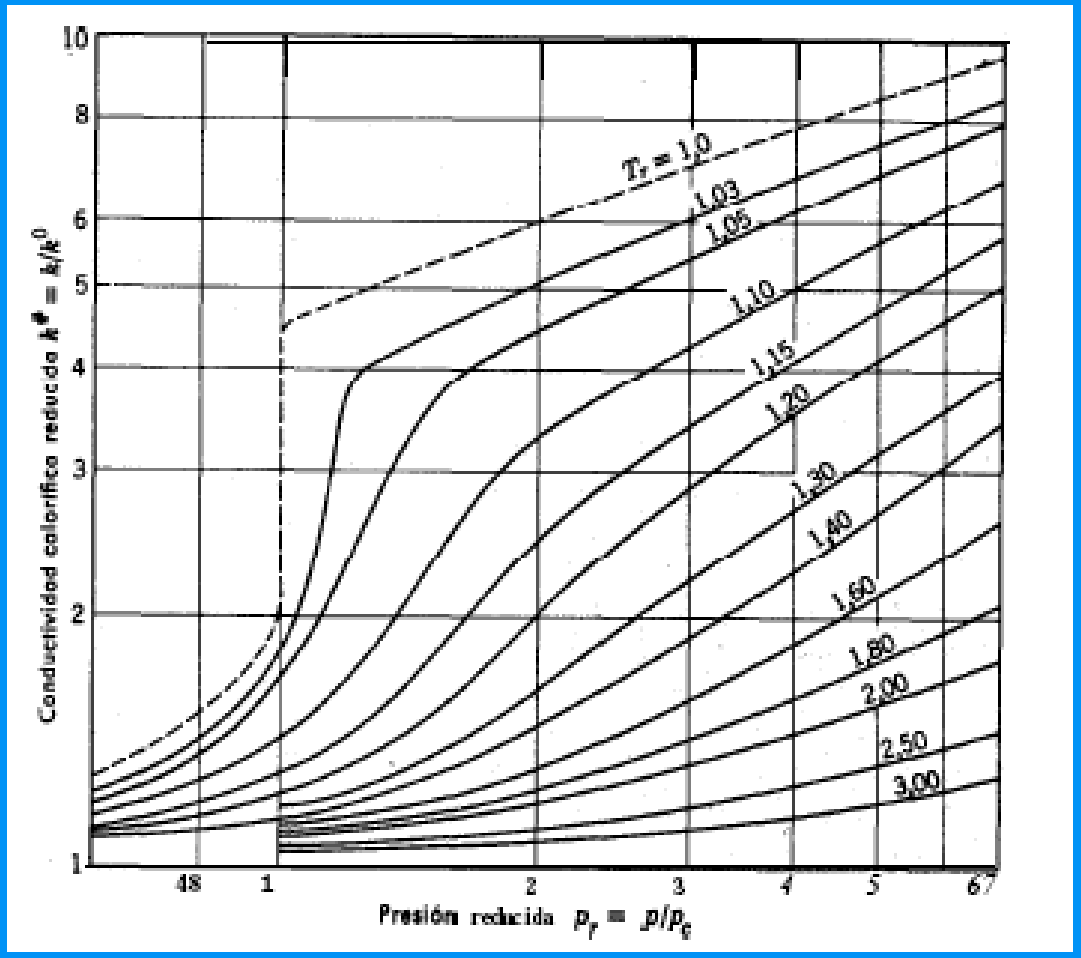
La *k* de los gases a ↓ρ ↑T, mientras que para la > parte de los líquidos ↓ al ↑T, en la región líquida la correlación es menos satisfactoria, y los líquidos asociados o polares, como el agua, pueden presentar un máximo de la curva *k* frente a *T*.

Generalmente, no se dispone de valores experimentales de k_c entonces, pueden estimarse siguiendo uno de los dos caminos siguientes:

a) **si se conoce k a una determinada T y P, a ser posible en condiciones próximas a las que se desea k_c, se puede leer k_r de la gráfica y calcular $k_c=k/k_r$, o bien;**

b) **se puede estimar k en la región de $\downarrow\rho$ mediante la teoría cinética y proceder después de la misma manera que en (a).**

En la figura se representa $k^{\#}=k/k°$, donde $k°$ es la conductividad calorífica a 1 atm y T de trabajo.



$k°$ puede evaluarse a partir de la T-C de gases a ↓ρ. Para gases poliatómicos ninguna de las dos correlaciones es muy exacta.

k de mezclas puede estimarse por métodos pseudocríticos.

k_r en función de la T_r y la P_r

Se sabe muy poco acerca de la exactitud de los procedimientos pseudocríticos aplicados a la k, debido a que existen muy pocos datos experimentales para mezclas a P↑.

Teoría de la *k* de los Gases a ↓ρ

Las *k* de los gases monoatómicos diluidos se conocen y pueden predecirse con exactitud mediante la T-C. En cambio la T-C de los gases poliatómicos se ha desarrollado en forma parcial, aunque hay algunas aproximaciones de interés.

Al igual que para la μ, analizaremos primero la predicción obtenida a partir de la T-C simplificada; las consideraciones y expresiones.

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m}}$$

Valor medio de la velocidad molecular **(A)**

$$z = \frac{1}{4} n \bar{v}$$

Frecuencia de colisión molecular por unidad de área **(B)**

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\,\pi\, d^2\, n}$$

Recorrido libre medio **(C)**

Además, es válida la siguiente expresión para la E promedio de una molécula en un gas ideal, E.

(D) $$E = \frac{3}{2} K_B T$$ **K_B es la constante de Boltzmann**

Recordemos que para aquellos sistemas levemente desplazados del equilibrio se obtenía la siguiente expresión para la densidad de flujo de una propiedad transportada a través de un plano:

$$\Gamma = \Gamma_{y(-)} - \Gamma_{y(+)} = -\frac{1}{2} n \bar{v} \lambda (d\varphi / dy)$$ **(E)**

donde: φ es la propiedad transportada.

Si estamos considerando el transporte de E térmica, la propiedad está ahora identificada con la E promedió de una molécula ($\bar{\varepsilon}$). De acuerdo a la ec. (D) podemos escribir:

$$\varphi = \bar{\varepsilon} = \frac{3}{2} K_B T \qquad (3.9)$$

Si llamamos q_y a la densidad de flujo a lo largo de la coordenadas y, y sustituyendo la ec. (3.9) en (E) queda:

$$q_{y(-)} = \frac{3}{4} n \bar{v} K \lambda (dT/dy) \qquad (3.10)$$

comparando con la ley de Fourier ec. (3.5), se tiene que

$$k = \frac{3}{4} n \bar{v} K \lambda \qquad (3.11)$$

El calor específico por molécula de un gas monoatómico (a) puede calcularse a partir de su definición ($\partial\bar{\varepsilon}/\partial T)_V$ y usando la ecuación (3.9), se tiene que:

$$C_v = \frac{3}{2} K \qquad (3.12)$$

combinando la ec. (3.12) con (3.11) se obtiene una expresión alternativa.

$$k = \frac{1}{2} \rho \bar{v} C_v \lambda \qquad (3.13)$$

Introduciendo las ecs. (A) y (C) en (3.11) y (3.13)

$$k = \frac{3}{2}\frac{1}{d^2}\sqrt{\frac{K^3 T}{\pi^3 m}} = \frac{C_v}{d^2}\sqrt{\frac{K T}{\pi^3 m}} \qquad (3.14)$$

Recordando la expresión de la μ obtenida a partir de la T-C simplificada:

$$\mu = \frac{1}{2} n m \bar{v} \lambda = \frac{1}{2} \rho \bar{v} \lambda$$

comparando con la ec. (3.13) se tiene

(3.15)

$$k = C_v \mu$$

Un tratamiento más riguroso implica aplicar la teoría del potencial de interacción entre las moléculas.
De acuerdo a la *teoría de Chapman-Enskog, k* está dado por:

$$k = 1.98910^{-4} \frac{\sqrt{T/M}}{\sigma^2 \Omega_k} [=] \frac{cal}{cm\ seg\ K} \qquad (3.16)$$

para gases monoatómicos a ↓P. T (K), σ = diámetro de colisión (Å), Ω_k es la función integral de colisión Ω_μ y que es ligeramente decreciente con la T*=k T/ε . $\Omega_k = \Omega_\mu$ para el modelo del potencial intermolecular de Lenard-Jones

Comparando (3.16) con la μ

$$\mu = 2{,}6693\, 10^{-5} \frac{\sqrt{M T}}{\sigma \Omega_\mu}$$

se tiene:

$$k = \frac{15\ R}{2\ n} \mu = \frac{5}{2} C_v\ \mu \qquad (3.17)$$

En gases poliatómicos las moléculas, además, de la E de translación poseen E de rotación y vibración, y en consecuencia cabe la posibilidad de que puedan intercambiarse en una colisión. Para ello, Eucken desarrolló un método semiempírico sencillo (gases poliatómicos de ↓ρ) basado en la estimación del número de Prandtl:

$$Pr = \frac{C_p\,\mu}{k} = \frac{C_p}{C_p + 1{,}25\,R}; \qquad k = \left[C_p + \frac{5}{2}\,R\right]\frac{\mu}{M}$$

donde C_p = cal/mol K; Cp = cal/g K (3.18)

Los valores estimados de *k* con (3.18) muestran concordancia para gases monoatómicos y diatómicos (a excepción del H_2), pero para gases más complejos es menos satisfactoria. Para gases poliatómicos es conveniente, siempre que sea posible, usar datos experimentales.

Actualmente, se dispone de un método más satisfactorio para gases poliatómicos y polares, basado en la T-C.

(4.19)

***k* de *mezclas gaseosas a* ↓ρ puede estimarse por el *método de Wilke.* (desviación del 4% gases no polares).**

$$k_{mez} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i k_i}{\sum_{j=1}^{n} x_j \Phi_{ij}}$$

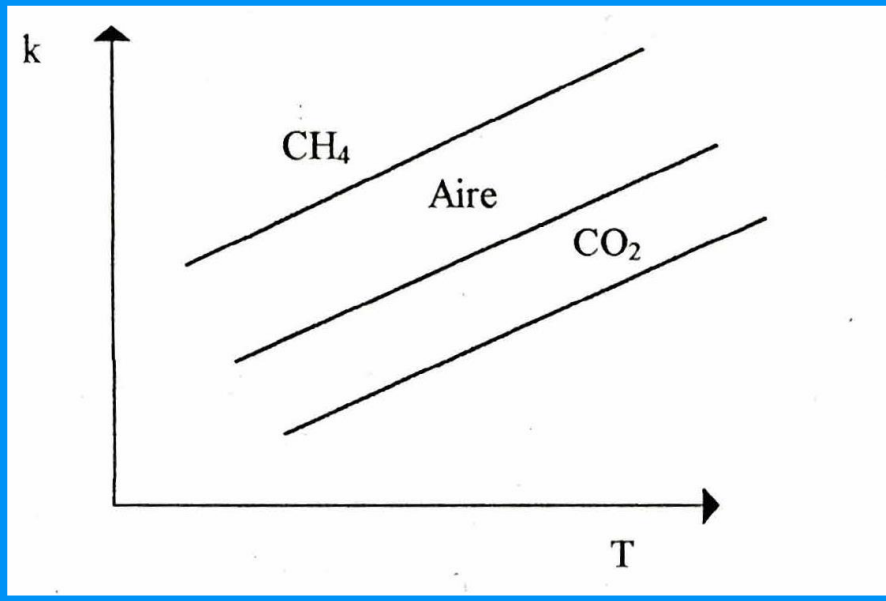
X_i= fracción molar; k_i= conductividad calorífica de los componentes puros y

$$\Phi_{ij} = \frac{1}{\sqrt{8}} \left(1 + \frac{M_i}{M_j}\right)^{-1/2} \left[1 + \left(\frac{\mu_i}{\mu_j}\right)^{1/2} \left(\frac{M_j}{M_i}\right)^{1/4}\right]^2 \qquad (4.20)$$

Los valores de μ y *k* de estas ecuaciones están dados a ↓ρ y a una T determinada, la restricción anterior (gases a ↓ρ) "situación que no siempre está presente". Resulta útil analizar las posibilidades de interpolación a diferentes T y P mediante correlaciones basadas en el principio de los estados correspondientes.

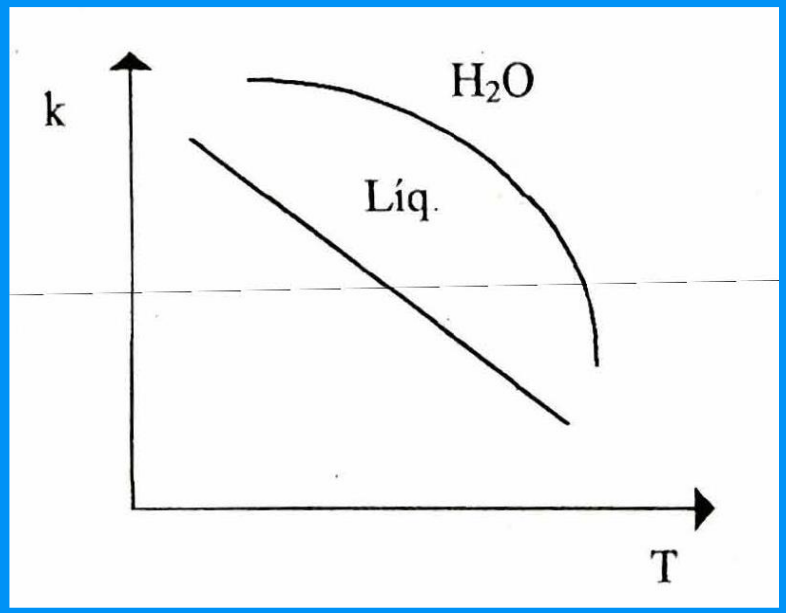
k en Gases

En gases y vapores k crece con la T y la dependencia es prácticamente lineal.



k en Líquidos

En general, en líquidos *k* ↓ con la T existiendo excepciones, como el agua que es poco sensible a la T, especialmente para P lejos del punto crítico



k en Sólidos

Las k de sólidos deben determinarse experimentalmente, son numerosos los factores de los cuales depende.

En *sólidos porosos,* la k depende fuertemente de la fracción de huecos, del tamaño y del fluido contenido en los poros.

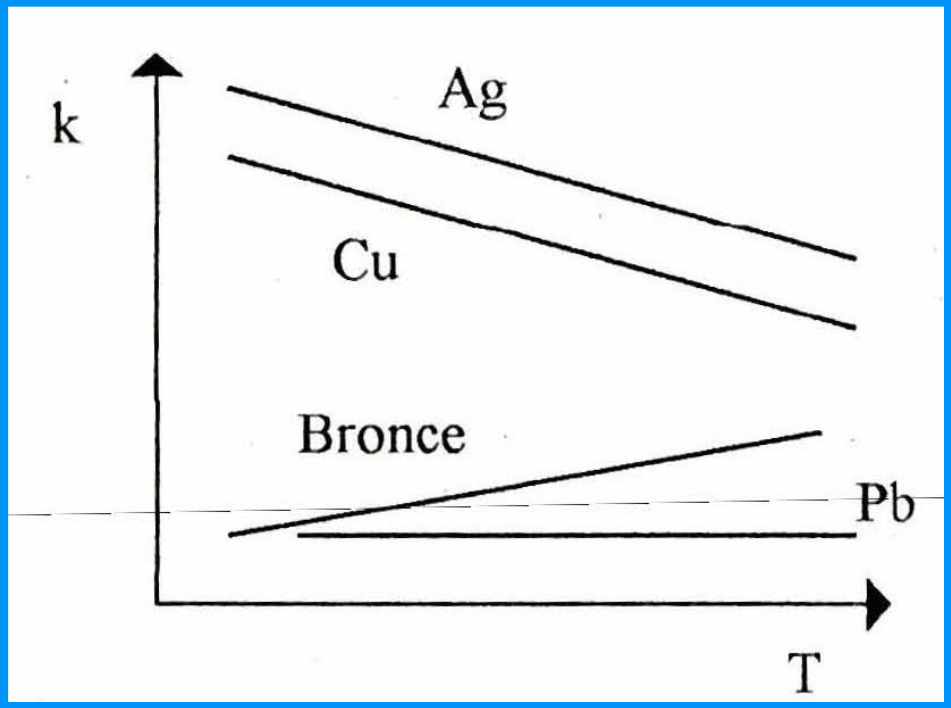
En *materiales cristalinos* tienen importancia las fases y el tamaño de los cristales. En *sólidos amorfos* ejerce un efecto considerable el grado de orientación molecular.

Para metales puros, la conductividad calorífica (*k*) y la eléctrica (k_e) cumplen con la conocida *ecuación de Wiedmann-Franz y Lorenz.*

$$\frac{k}{k_e T} = L = Cte \qquad (3.21)$$

L, número de Lorenz = 22 a 29 x 10^{-9} voltios^2 /K^2 para los metales puros a 0°C y varía ligeramente con la T por encima de 0°C, siendo típico un ↑ del 10 al 20% por cada 1000°C. Para *aleaciones* tiene una utilidad limitada, puesto que L varía con la composición y la T. No es válida para no-metales, en los que la concentración de electrones libres es tan baja que predomina la transición de energía mediante el movimiento molecular.

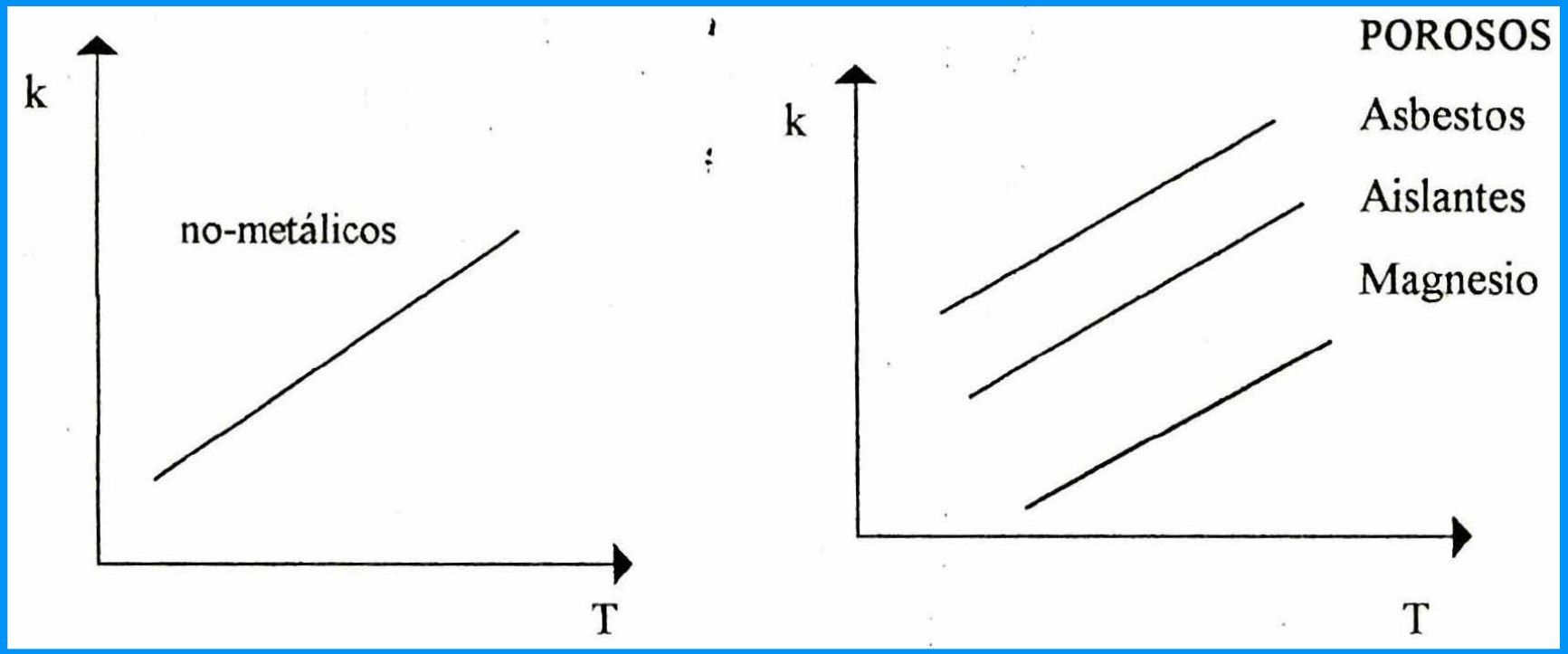
k en Sólidos



Ag y Cu muy buenos conductores de la electricidad

En general, en los metales puros *k*↓ con ↑T, mientras que en las aleaciones ↑.

En sólidos no-metálicos el mecanismo de conducción es distinto y consistiría en vibraciones entre átomos vecinos por lo que no resulta raro que en la mayoría de los no-metales k ↑ con T. En los materiales porosos, depende de la porosidad, tamaño y fluido contenido en los poros, la k es ↓ (son usados como aislantes) y ↑ T.



ANÁLISIS DIFERENCIAL DEL TRANSPORTE DE ENERGÍA

Balance de Energía

A partir de un (Δx, Δy, Δz) en E-E a través del cual fluye un líquido puro. Escribiendo la ley de conservación de la E para el fluido contenido en el interior de este elemento en un determinado instante tenemos:

$$\begin{pmatrix}\text{velocidad de}\\ \text{acumulacion}\\ \text{de energia cinetica}\\ \text{e interna}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{Veloc. de entrada}\\ \text{de } E_C \text{ e Interna por}\\ \text{Conveccion}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{Veloc. de salida}\\ \text{de } E_C \text{ e Interna por}\\ \text{Conveccion}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{Veloc. neta de}\\ \text{adicion de calor}\\ \text{por conduccion}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{Veloc. neta de}\\ \text{Trabajo comu -}\\ \text{nicado por el sis}\\ \text{tema a los alrededores}\end{pmatrix}$$

(A) (B) (C) (D) **(3.22)**

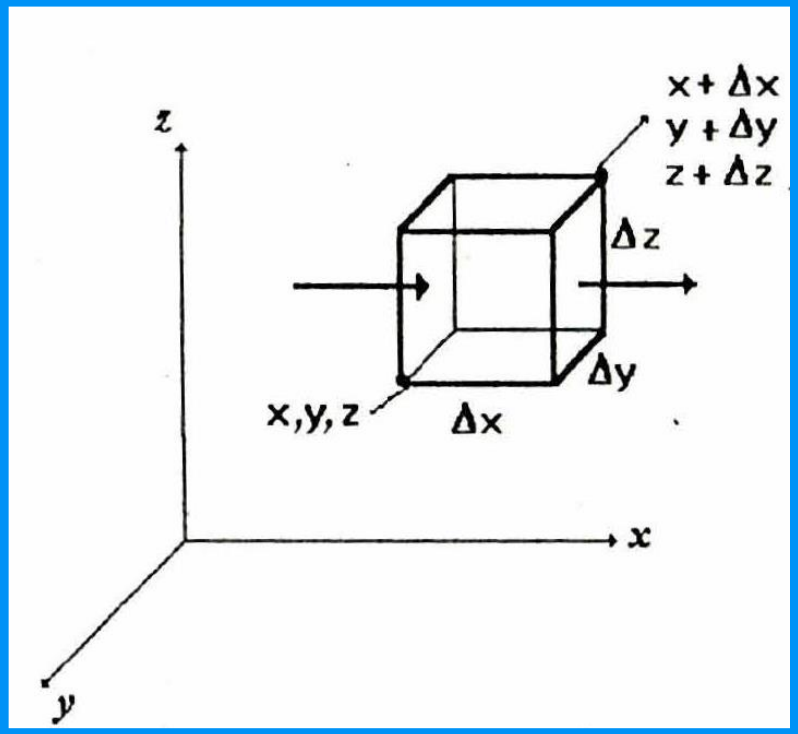
Este es el Primer Principio de la Termodinámica, para un sistema "abierto".

Se considera aquí que ciertas formas de E y transporte de E permanecerán constantes por ejemplo: electromagnética, nuclear, radiactiva, etc.

La energía cinética, Ec, corresponde a la E relacionada con el movimiento del fluido y se tomará como bases la unidad de volumen así:

$$E_c = \frac{1}{2}\rho v^2 \qquad (3.23)$$

La U , será la E en relación con los movimientos fortuitos de traslación e internos de las moléculas más, la E de interacción entre ellas. Es decir que, la U dependerá de la T y de la ρ del fluido. La E potencial no aparece en forma explícita en la ec. (3.22) ya que se ha incluido en el término de trabajo como se verá después:



$$\text{Flujo de } E_i + E_c = \frac{m\,\hat{U} + 1/2\,m\,v^2}{\Delta t}$$

$$\text{Densidad de Flujo de } E_i + E_c = \frac{m\,\hat{U} + 1/2\,m\,v^2}{\Delta y\,\Delta z\,\Delta t}$$

Multiplicando y dividiendo por Δx queda:

$$= \frac{m\,\hat{U} + 1/2\,m\,v^2\,\Delta x}{\Delta y\,\Delta z\,\Delta t\,\Delta x} \text{ o } (\rho\,\hat{U} + 1/2\,\rho\,v^2)\,v_x$$

Necesitamos el balance de flujo de energía

$$(\rho\,\hat{U} + 1/2\,\rho\,v^2)\,v_x\,\Delta y\,\Delta z \text{ en direc. x}$$

(A) Término Acumulativo

$$\frac{\Delta(\rho\hat{U}+1/2\rho v^2)\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z}{\Delta t} \qquad (3.24)$$

(B) Término Convectivo, tomando la dirección x

$$\left\{(\rho\hat{U}+1/2\rho v^2)\,v_{x\,|x}-(\rho\hat{U}+1/2\rho v^2)\,v_{x\,|x+\Delta x}\right\}\Delta y\,\Delta z \qquad (3.25)$$

Invierto y multiplico y divido por Δx

$$-\left\{(\rho\hat{U}+1/2\rho v^2)_{x+\Delta x}-(\rho\hat{U}+1/2\rho v^2)_{x}\Big/\Delta x\right\}v_x\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z \qquad (3.26)$$

Análogamente para las otras dos direcciones

(C) Término de transmisión de C por Conducción será:

Recordemos que la densidad de flujo de calor por conducción q, tiene 3 componentes: q_x, q_y y q_z.

Para la dirección x, el FLUJO será: q, Δy Δz:

Haciendo el balance será:

$$-\frac{\left(q_x\big|_{x+\Delta x} - q_x\big|_x\right)}{\Delta x}\Delta x \Delta y \Delta z \qquad (3.27)$$

D) Término de Trabajo comunicado por el sistema

Vamos a considerar el trabajo realizado por 3 fuerzas:

1) **Viscosas**
2) **Gravitatorias**
3) **Presión**

1) Trabajo debido a fuerzas viscosas

La densidad de flujo de C-M por ej.: τ_{xx}, (para la componente x en la dirección x).

$\tau_{xx}\Delta y\Delta z$ tiene unidades de Fuerza (Newton)

$$\frac{\text{Trabajo}}{\text{Unid.de tiempo}} = \frac{\text{Fuerza x distancia en direc. de la F}}{t} = \frac{\tau_{xx}\Delta y\Delta z\Delta x}{t} = \tau_{xx}\, v_x\, \Delta y\, \Delta z$$

Haciendo el balance:

(3.28)

$$\left\{\left(\tau_{xx}v_x + \tau_{xy}v_y + \tau_{xz}v_z\right)\Big|_{x+\Delta x} - \left(\tau_{xx}v_x + \tau_{xy}v_y + \tau_{xz}v_z\right)\Big|_{x}\right\}\Delta y\Delta z$$

2) Trabajo debido a Fuerzas Gravitatorias: Actúan sobre el volumen

$$\frac{\text{Fuerza}}{\text{Volumen}} = \rho g_x \quad ; \quad \frac{\text{trabajo}}{\text{tiempo}} = \frac{\rho g_x \Delta_x}{t} = \rho g_x v_x \Delta x\Delta y\Delta z$$

(3.29)

El aporte en las tres direcciones

$$-(\rho g_x v_x + \rho g_y v_y + \rho g_z v_z)\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z$$

3) Trabajo debido a Fuerzas de Presión

$$\text{Fuerza: } P|_x \Delta y \Delta z \quad ; \quad \frac{\text{trabajo}}{\text{tiempo}} = \frac{P|_x \Delta y \Delta z \Delta x}{t} \qquad (3.30)$$

En la dirección x $\left(p|_{x+\Delta x}\, v_x - p|_x\, v_x\right)\Delta y \Delta z$

Tomando el término (1) e igualando con la suma de las contribuciones en las tres direcciones de los términos (2, 3, 4, 5, 6), sacando limite Δx Δy Δz → 0 y Δt → 0, queda en forma vectorial

$$\frac{\partial \rho(\hat{U} + 1/2\, v^2)}{\partial t} = -\left(\nabla.\rho V(\hat{U} + 1/2\, v^2)\right) - \nabla q + \rho(Vg) - (\nabla p V) - (\nabla.[\tau.V])$$

(1) (2) (3) (4) (5) (6)

(3.31)

$$\frac{\partial \rho(\hat{U}+1/2\ v^2)}{\partial t} = -\left(\nabla.\rho V(\hat{U}+1/2\ v^2)\right) - \nabla q + \rho(Vg) - (\nabla p V) - (\nabla.[\tau.V])$$

(1) (2) (3) (4) (5) (6)

(Veloc. de ganan. de energia por unid. de vol.) = (Veloc. de entrada de E por unid. de vol. debido a conveccion) (Veloc. de entrada de E por unid. de vol. por conduccion) (Veloc. de trabajo comunicado al fluido por u. de vol. debido a las F de gravedad) (Veloc. de trab comunicado al fluido por u. de vol. debido a las F de presion)

(1) (2) (3) (4) (5)

(veloc. de trabajo comunicado al fluido por unidad de volumen debido a las F viscosas) (6)

Forma Sustancial

Diferenciando el término (1) y (2) de la ecuación (3.31)

$$\frac{\partial \rho\left(\hat{U}+1/2\,v^2\right)}{\partial t}=\rho\frac{\partial\left(\hat{U}+1/2\,v^2\right)}{\partial t}+\left(\hat{U}+1/2\,v^2\right)\frac{\partial \rho}{\partial t} \qquad \text{término (1)}$$

$$-\left(\nabla.\rho V\left(\hat{U}+1/2\,v^2\right)\right)=-\rho v\nabla\left(\hat{U}+1/2\,v^2\right)-\left(\hat{U}+1/2\,v^2\right)\nabla\rho v \qquad \text{término (2)}$$

Operando con ambos términos y considerando que:

- por ec. de Continuidad $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \rho v = 0$

- $$\rho \frac{D\left(\hat{U} + 1/2\, v^2\right)}{Dt} = \rho \frac{\partial\left(\hat{U} + 1/2\, v^2\right)}{\partial t} + \rho v \nabla\left(\hat{U} + 1/2\, v^2\right)$$

$$\boxed{\rho \frac{D\left(\hat{U} + 1/2\, v^2\right)}{Dt} = -\nabla q + \rho(vg) - (\nabla p v) - \left(\nabla.[\tau.V]\right)} \quad (3.32)$$

(3) (4) (5) (6)

Describe los intercambios de E en el fluido desde el punto de vista de un observador que se mueve con el fluido.

Ecuación de Energía Térmica o Energía Interna

Recordando la ecuación de energía mecánica

Trabajo por gravedad

$$\rho \frac{D\left(1/2\, v^2\right)}{Dt} = p(\nabla v) + \rho(vg) - (\nabla pv) - \left(\nabla.[\tau.V]\right) + (\tau:\nabla V) \qquad (3.33)$$

E_c — Conv. Rever- E_c en E_i — Trabajo por P — Trabajo por μ — Converción irreversible de E_c en E_i

(3.34)

$$\rho \frac{D(\hat{U})}{Dt} = -\nabla q - (p\nabla v) - (\tau:\nabla v)$$

(1) (2) (3) (4)

Restando la ec. (3.32) de (3.31) queda:

1) Velocidad de ganancia de E_i por unidad de V.
2) Velocidad de entrada de E_i por unidad de V debido a la conducción.
3) Velocidad reversible de ↑ de E_i por unidad de V debido a la compresión. Puede ser (+) o (-) depende si el fluido se comprime o se expande.
4) Velocidad irreversible de aumento de E_i debido a la disipación viscosa por unidad de V. Es siempre (+).

Ecuación de Variación de Energía Total (Incluye Término de Energía Potencial)

La fuerza externa g se expresa una función del gradiente de una función escalar

$$g = -\nabla\Phi$$

luego reemplazando en $\rho(\nabla g) = -\rho(v.\nabla\Phi)$ **(3.35)**

$$\frac{D\Phi}{Dt} = \frac{\partial\Phi}{\partial t} + v\nabla\Phi \quad \Rightarrow \quad -v\nabla\Phi = -\frac{D\Phi}{Dt} + \frac{\partial\Phi}{\partial t} \quad \text{luego} \quad -\rho(v\nabla\Phi) = -\rho\frac{D\Phi}{Dt} + \rho\frac{\partial\Phi}{\partial t}$$

Si Φ es independiente del tiempo la $\partial\Phi/\partial t = 0$ y reemplazo en la ec. (3.32)

$$\rho\,\frac{D\left(\hat{U} + 1/2\,v^2 + \Phi\right)}{Dt} = -\nabla q - (\nabla pv) - (\nabla.[\tau.V]) \qquad \textbf{(3.36)}$$

Para problemas terrestres en los que no intervienen más fuerzas que las de gravedad, Φ es independiente del tiempo y la ec. (3.36) es válida.

Ecuación de E Calorífica en Función de la T y el Calor Específico del Fluido

La ecuación de E calorífica se puede expresar teniendo en cuenta que la U puede considerarse como una función del V y la T. **(3.37)**

Así debido a que dU es una diferencial exacta, es posible escribir para una masa definida de un gas.

$$d\hat{U} = \left(\frac{\partial \hat{U}}{\partial \hat{V}}\right)_T d\hat{V} + \left(\frac{\partial \hat{U}}{\partial T}\right)_{\hat{V}} dT$$

$$= \left[-p + T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_{\hat{V}}\right] d\hat{V} + \hat{C}_v dT \qquad \text{siendo } \left(\frac{\partial \hat{U}}{\partial T}\right)_{\hat{V}} = \hat{C}_v$$

Si derivamos sustancialmente y multiplicamos por la ρ.

$$\rho \frac{D\hat{U}}{Dt} = \left[-p + T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_{\hat{V}}\right] \rho \frac{D\hat{V}}{Dt} + \rho\, \hat{C}_v \frac{DT}{Dt}$$

(3.38)

$$\rho = \frac{m}{V} \quad \text{si } m = 1 \;;\; \hat{V} = \frac{1}{\rho} \quad \text{y matematicamente } \frac{D\,1/\rho}{Dt} = \frac{D\rho^{-1}}{Dt} = \rho^{-2}\frac{D\rho}{Dt}$$

Teniendo en cuenta la ec. de continuidad el término

$$\Rightarrow \rho \frac{D\left(1/\rho\right)}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{D\rho}{Dt} = \nabla v$$

(3.39)

Luego la ec. (3.38) queda

$$\rho \frac{D\hat{U}}{Dt} = \left[-p + T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_{\hat{V}} \right] \nabla v + \rho \hat{C}_v \frac{DT}{Dt} \qquad (3.40)$$

Operando e Introduciendo la ec. (3.40) en la ec. (3.34)

$$-p(\nabla v) + T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_{\hat{V}} \nabla v + \rho \hat{C}_v \frac{DT}{Dt} = -\nabla q - (p\nabla v) - (\tau : \nabla v) \qquad (3.41)$$

Que queda

$$\rho \hat{C}_v \frac{DT}{Dt} = -\nabla q - T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_{\hat{V}} \nabla v - (\tau : \nabla v) \qquad (3.42)$$

En esta ecuación la E es función de la T del fluido, T se usa para calcular perfiles de temperatura. Basándonos en esta ecuación vamos a obtener formas simplificadas que tienen gran aplicación práctica.

1) Si expresamos q en función de los gradientes de T es decir:

$$q = -k\,\Delta T$$

2) Si expresamos τ en función de gradientes de velocidad, es decir:

$$\tau_{xx} = -2\mu\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{2}{3}\mu\nabla v$$

Obtenemos una función Φ_v, función disipación viscosa y su forma en coordenadas rectangulares se obtiene a partir de la ec. (3.42):

$$\phi_v = 2\left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)^2\right] + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)^2 -$$

$$-\frac{2}{3}\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right)^2$$

$$\rho\hat{C}_v\frac{DT}{Dt} = k\nabla^2 T - T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_{\hat{v}}\nabla v - \mu\phi_v \qquad (3.43)$$

$$\rho \hat{C}_v \frac{DT}{Dt} = k\nabla^2 T - T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_{\hat{v}} \nabla v - \mu \phi_v$$

Ecuación válida para un fluido newtoniano con C_V constante. Establece que la T de un elemento móvil de fluido varía debido a:

1) Conducción de calor
2) Efectos de expansión
3) Calentamiento por fuerzas viscosas

El término $\mu\ \Phi_v$ sólo aparece en casos muy especiales, así es cuando el gradiente de velocidad es muy grande como es la entrada de un proyectil a la atmósfera o la fricción de un cojinete.

1) Para un Gas Ideal

$$PV = nRT = \frac{m}{M}RT \quad \Rightarrow \quad P\hat{V} = \frac{1}{M}RT \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_{\hat{V}} = \frac{R}{\hat{V}M}$$

$$\text{pero} \quad \frac{P}{T} = \frac{R}{\hat{V}M} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_{\hat{V}} = \frac{P}{T}$$

Reemplazando en la ecuación (3.43) tenemos: (desaparece $\mu\Phi_v$, gas ideal):

$$\rho \hat{C}_v \frac{DT}{Dt} = k\nabla^2 T - P(\nabla v) \qquad (3.44)$$

2) Fluidos incompresibles (ρ= cte.).

$$\hat{C}_p = \hat{C}_v \qquad \nabla v = 0$$

Ecuación de continuidad

Luego, la ecuación (3.44) queda

$$\rho \hat{C}_p \frac{DT}{Dt} = k\nabla^2 T \qquad (3.45)$$

3) Para fluidos a P= cte. (y disipación viscosa despreciable)

$$\rho \hat{C}_p \frac{DT}{Dt} = k\nabla^2 T \qquad (3.46)$$

4) Para sólidos la ρ se considera generalmente cte. $\hat{C}p = \hat{C}v$ y las velocidades son cero, Luego:

$$\rho\hat{C}_p \frac{DT}{Dt} = \rho\hat{C}_p\left[\frac{\partial T}{\partial t} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} + v_z \frac{\partial T}{\partial z}\right]$$

$$\rho\hat{C}_p \frac{DT}{Dt} = k\nabla^2 T$$

(3.47)