Unidad 2

Polinomios y expresiones algebraicas

En este apunte los estudiantes encontrarán contenidos básicos de:

- Polinomios
- Operaciones: suma, resta, multiplicación y división. Teorema del Resto y Regla de Ruffini.
- Factorización.
- Expresiones algebraicas racionales
- Operaciones: simplificación, suma, resta, multiplicación y división

Índice

1. Breve introducción histórica **3**

2. El lenguaje algebraico **3**
Expresiones algebraicas . . . 3
Clasificación de expresiones algebraicas . . . 4

3. Monomios **4**
Grado de un monomio . . . 5
Monomios semejantes . . . 5

4. Operaciones con monomios **5**
Suma y resta . . . 5
Suma de monomios . . . 6
Resta de monomios . . . 6
Multiplicación . . . 6
División . . . 7

5. Polinomios **8**
Introducción a los polinomios . . . 8
Polinomio completo y ordenado . . . 9
Función polinómica asociada a un polinomio . . . 10
Raíces de la función polinómica . . . 11

6. Operaciones con polinomios **11**
Suma y resta . . . 11
Propiedades de la suma . . . 11
Resta . . . 12
Multiplicación . . . 12
Propiedades de la multiplicación de polinomios . . . 14
Propiedad Distributiva . . . 14
Productos notables . . . 14
División . . . 15
Regla de Ruffini . . . 17
Teorema del resto . . . 18

7. Factorización de polinomios **19**
Teorema fundamental del álgebra . . . 21
Factorización completa . . . 21
Polinomios primos . . . 21
Métodos de factorización . . . 22
Factor común . . . 22
Factor común por grupos . . . 23
Trinomio cuadrado perfecto . . . 24
Trinomio cuadrado no perfecto . . . 25
Cuatrinomio cubo perfecto . . . 26
Diferencia de cuadrados . . . 27
Suma y diferencia de potencias de igual grado . . . 27
Ejemplo 1: Suma de potencias con exponente impar . . . 28
Ejemplo 2: Resta de potencias con exponente impar . . . 29
Ejemplo 4: Resta de potencias con exponente par . . . 29
Observaciones importantes: . . . 29
Pasos generales para la factorización de polinomios . . . 30
Síntesis . . . 30

8. Máximo común divisor y mínimo común múltiplo **31**

9. Expresiones algebraicas fraccionarias **32**
Simplificación 32
Operaciones 34
Suma y Resta 34
Multiplicación 35
División 35

1. Breve introducción histórica

El Álgebra es una invención de los árabes que introdujeron en la peninsula Ibérica en el siglo XII. En el Siglo XIII en Toledo el príncipe Alfonso X .El Sabioçreó la Escuela de Traductores donde las ciencias griega y árabe se esparcieron por toda Europa. El principal tratado de Álgebra del siglo XIIIse debe a un italiano, Fibonacci (a quien mencionamos en el módulo de numeración ya que, entre otras cosas, introdujo la barra horizontal para anotar los números racionates), influido por la cultura árabe.
En el Renacimiento, siglo XVI, se destacaron como algebristas, Cardano (italiano) y Vietta (francés). Este último fue el que representó números arbitrarios por letras en las ecuaciones y fórmulas algebraicas.
En el siglo XVII, el progreso del álgebra sirvió a Descartes para combinarla con la geometría creando una herramienta matemática poderosa: la Geometría Analítica con la que se pudo resolver algunos problemas geométricos planteados por los griegos en el siglo III a.C.

2. El lenguaje algebraico

Expresiones algebraicas

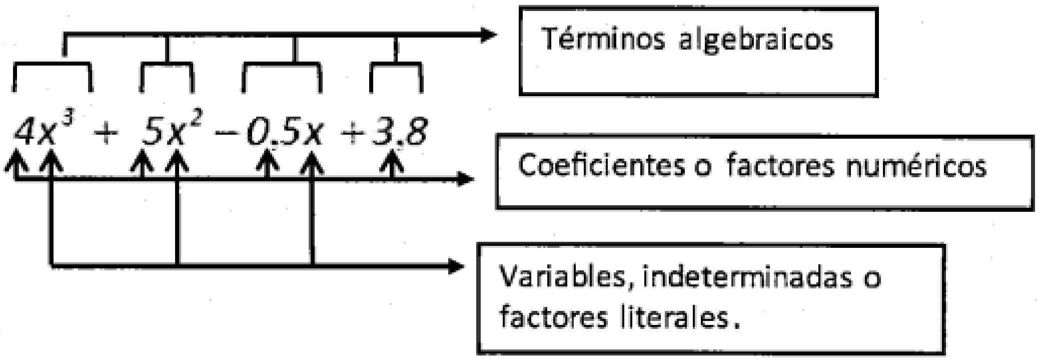
Sabemos que la Aritmética se ocupa de los conjuntos numéricos, las operaciones y sus propiedades. Pero por ejemplo, al enunciar las propiedades de las operaciones, interpretar y resolver problemas, escribir y/o obtener relaciones es conveniente utilizar símbolos específicos de la Matemática y letras que representan cualquier número. Para estas ocasiones se utiliza un lenguaje simbólico, llamado **lenguaje algebraico**

Ejemplos:

- $2xy$
- $5a^3bx$
- $3ab^2x - 10ab + 5$
- $x - \sqrt{3}$

Se denomina **expresión algebraica** a una combinación cualquiera de números representados por letras, o por letras y cifras, relacionadas entre sí por las operaciones de suma, resta, multiplicación, división, radicación y potenciación.

Antes de seguir avanzando, te proponemos que observes el siguiente esquema en el que se han señalado algunos conceptos que serán útiles para clasificar las expresiones algebraicas.
En el caso de los polinomios diremos que x es la *indeterminada*, mientras que reservaremos el término *variable* para el estudio de las funciones que veremos más adelante.



Clasificación de expresiones algebraicas

Las expresiones algebraicas se clasifican en:

- **Racionales**: Cuando las variables no aparecen bajo radicales o con exponentes fraccionarios.
    - **Enteras**: Las variables tienen exponentes enteros no negativos. También llamadas **polinomios**
    - **Fraccionarias**: Alguna variable o indeterminada aparece en el denominador o con alguna potencia negativa
- **Irracionales**: Cuando alguna variable o indeterminada aparece bajo un radical o con exponente fraccionario.

Empezaremos el estudio de las expresiones, con los polinomios.

3. Monomios

Recordaremos en este apartado algunos conceptos importantes como apoyo para encarar polinomios. Para ello nos centraremos en reconocer los monomios, determinar su grado, identificar monomios semejantes y las operaciones con los mismos.

Comenzamos definiendo:

> Una expresión algebraica de sólo un término, cuyas indeterminadas son potencias de exponente natural o cero, recibe el nombre de **monomio**.

Ejemplos:

- $-2ab^2c^2$
- $-5xz^3$
- $7x^2z$
- -8

Cada uno de ellos está formado por un factor numérico, que llamamos *coeficiente* y la parte literal, la indeterminada.

Grado de un monomio

El grado de un monomio es la suma de los exponentes de sus indeterminadas.
Ejemplo:

- $-2ab^2c^3$ tiene grado $1 + 2 + 3 = 6$
- -8 tiene grado 0

En general estudiaremos monomios en una sola indeterminada, pero es posible encontrar (y durante la carrera será el caso) polinomios en más de una indeterminada.

Monomios semejantes

Por último, nos referiremos a los monomios semejantes. Para ello le proponemos que observe los siguientes términos y particularmente preste atención a los factores literales de cada uno de ellos y a su grado:

$$\sqrt{5}x^2y \quad 3x^2y \quad \frac{1}{2}x^2y$$

Estamos de acuerdo que presentan exactamente los mismos factores literales, tienen el mismo grado pero difieren en los coeficientes. Por la particularidad de tener los mismos factores literales e igual grado decimos que los tres monomios son semejantes.

Definimos entonces que

Dos o más monomios son **semejantes** si tienen el mismo grado y los factores literales o indeterminadas están elevados a los mismos exponentes.

Trabajo Práctico
Ejercicio 1. Identifica los grupos de monomios semejantes en cada uno de los siguientes ítems:

a. **Grupo A:** $3x^2y \quad -5xy^2 \quad \frac{1}{2}x^2y \quad 7x^2y$

b. **Grupo B:** $4ab^3 \quad -2a^3b \quad \sqrt{3}ab^3 \quad 5a^2b^2$

c. **Grupo C:** $-7m^2n^3 \quad 0{,}5mn^2 \quad 3m^2n^3 \quad \frac{2}{5}m^2n^3$

d. **Grupo D:** $9p^4q \quad -2pq^4 \quad p^4q \quad 6p^3q^2$

---

4. Operaciones con monomios

Suma y resta

Para realizar estas operaciones, necesariamente los monomios deben ser semejantes de modo tal que el resultado sea también un monomio.

Suma de monomios

Observe y analice los pasos que se realizan a continuación para sumar los monomios:

$$3x^3y^4 \quad \text{y} \quad 10x^3y^4$$

se tiene:

$$3x^3y^4 + 10x^3y^4 = (3 + 10)x^3y^4 = 13x^3y^4$$

Luego de haber analizado los pasos anteriores podemos concluir entonces que:

> La suma de monomios semejantes es igual a un monomio cuyo coeficiente es igual a la suma de los coeficientes de los monomios dados y cuyo factor literal es el factor literal de los monomios dados.

Resta de monomios

Seguimos con el cálculo de resta de monomios. Para ello nuevamente le proponemos que observe y analice los pasos para realizar este cálculo:

$$5x^3y^4 \quad \text{y} \quad 10x^3y^4$$

y restamos:

$$5x^3y^4 - 10x^3y^4 = (5 - 10)x^3y^4 = -5x^3y^4$$

Terminado el análisis de cada uno de los pasos, concluimos que:

La resta de monomios semejantes es igual a un monomio cuyo coeficiente es igual a la resta de los coeficientes de los monomios dados y cuyo factor literal es el factor literal de los monomios dados.

Multiplicación

Al multiplicar dos o más monomios, el resultado es otro monomio, no importa si son semejantes o no.

El producto de dos o más monomios es un monomio cuyo:

- Coeficiente es el producto de los coeficientes de los monomios dados
- Factor literal es el producto de los factores literales de estos mismos monomios

El grado del monomio producto es:

- La suma de los grados de los factores literales, si estos no son nulos
- Cero si alguno de los monomios es el monomio nulo (en cuyo caso el producto es el monomio nulo)

Luego, para multiplicar monomios debe tener presente la propiedad asociada al producto de potencias de igual base. Por ejemplo, si queremos multiplicar los siguientes monomios:

$$6\,a^2\,x^2\,y^4\,(-2\,x^3\,y^5)\,a\,x^2\,y$$

Para obtener el producto:

- Primero se multiplican los coeficientes:

$$6 \cdot (-2) = -12$$

- Luego se multiplican los factores literales, aplicando la propiedad del producto de potencias de igual base cuando sea necesario:

$$(a^2 \cdot a) \cdot (x^2 \cdot x^3 \cdot x^2) \cdot (y^4 \cdot y^5 \cdot y) =$$
$$a^3 \cdot x^7 \cdot y^{10}$$

Con lo cual, el monomio resultante es: $-12\,a^3\,x^7\,y^{10}$

División

Para calcular el cociente entre dos monomios, será necesario que tenga presente la propiedad asociada al cociente de potencias de igual base. Veremos que el resultado no siempre es un monomio.

Preste atención a cada uno de los ejemplos analizados, paso a paso, a continuación, para entender las conclusiones posteriores:

a. $(4\,a^6\,x^4\,y^2) : (2\,a^2\,x^3\,y)$ que tiene como expresión equivalente a:

$$\frac{4a^6\,x^4\,y^2}{2a^2\,x^3\,y}$$

Al dividir los coeficientes y operar con los factores literales resulta:

$$\frac{4a^6\,x^4\,y^2}{2a^2\,x^3\,y} = 2\,a^{(6-2)}\,x^{(4-3)}\,y^{(2-1)} = 2a^4\,x\,y$$

b. $5a^2b^3c^2 : 3a^4bc^3 = \frac{5a^2b^3c^2}{3a^4bc^3} =$

$$= \frac{5}{3}a^{-2}b^2c^{-1}$$

¿La expresión obtenida es un monomio?

Obviamente que no lo es. De acuerdo a la caracterización de los monomios, los factores literales son potencias con exponentes naturales o cero.

Concluimos entonces que:

- El cociente de dos monomios **no** siempre es otro monomio.

- El cociente de dos monomios es otro monomio, sólo si las indeterminadas del monomio del numerador tienen exponente mayor o igual que las respectivas indeterminadas del monomio del denominador.

Trabajo Práctico
Ejercicio 2.Dados los siguientes monomios:

$$A = 3x^2y \quad B = -5xy^2 \quad C = \frac{1}{2}x^2y \quad D = 4ab^3 \quad E = -2a^3b$$

Calcula, si es posible:

a. $A + C$	c. $C - A$	e. $A \cdot B$	g. $A : C$
b. $B + D$	d. $E - B$	f. $D \cdot E$	h. $D : B$

---

5. Polinomios

Introducción a los polinomios

Seguramente ha estudiado "polinomios". Pero... ¿qué son y para qué sirven los polinomios? Le proponemos el siguiente problema para introducirnos en el tema:

Matías compró un terreno y quiere instalar una pileta de natación de forma rectangular. El arquitecto le dijo que:

- El largo debe ser el doble del ancho ($l = 2a$)
- La profundidad debe ser la mitad del ancho ($p = \frac{a}{2}$)

Costos asociados

- Material para paredes y piso: \$65/m^2
- Soldadura para juntas: \$20/m
- Excavación: \$30/m^3
- Traslado de materiales: \$100 (costo fijo)

Se pretende:

a) Encontrar una fórmula para calcular el costo en función del ancho a

b) Calcular el costo para $a = 5$ m

c) Determinar si es posible construir con \$15,000 cuando $a = 6$ m

Resolver esta situación es lo que se conoce en Matemática como *modelado* o *modelizado*. Para el primero de los items, buscamos un polinomio que permita representar la situación; mientras que los items 2 y 3 implican el uso de la *función asociada* a ese polinomio, que estudiaremos en la próxima unidad.

Por el momento, en este espacio te proponemos que escribas el polinomio que permita modelizar la situación:

Respuesta: ....

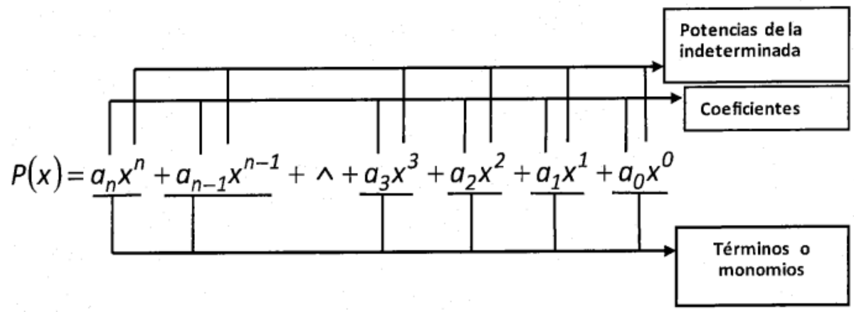
Definimos entonces:

Un **polinomio** en la indeterminada x es una expresión de la forma:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

- $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ son los coeficientes ($a_n \neq 0$)
- a_n es el coeficiente principal
- a_0 es el término independiente

La siguiente imagen nos resume lo anterior:



Polinomio completo y ordenado

Un polinomio está **ordenado** si sus términos están ordenados en forma creciente o decreciente respecto de sus potencias.

Un polinomio de grado n es **completo** cuando contiene todos los exponentes sucesivos respecto a la variable o indeterminada desde cero hasta el n-ésimo.

En caso que el polinomio esté incompleto, se agregan los términos que faltan con coeficiente cero, para obtener una expresión equivalente a la dada.

Ejemplo:

$$P(x) = 4x^4 - 3x^2 - 0{,}5$$

es un polinomio incompleto.

Su equivalente completo, y ordenado en forma decreciente es:

$$P(x) = 4x^4 + 0x^3 - 3x^2 + 0x - 0{,}5$$

Un polinomio es **nulo** cuando todos los coeficientes del mismo son nulos, y en este caso el polinomio no tiene grado. En símbolos:

$$P(x) = 0x^n + 0x^{n-1} + \cdots + 0x + 0 \quad \text{o, simplemente} \quad P(x) = 0$$

Dado un polinomio $P(x)$ cualquiera, su **opuesto** $-P(x)$ es aquel que:

- Tiene el mismo grado que $P(x)$
- Sus coeficientes son los opuestos a los coeficientes de $P(x)$

Ejemplo Si se tiene el polinomio:

$$p(x) = 4x^4 - 3x^2 - 0{,}5$$

su polinomio opuesto será:

$$-p(x) = -4x^4 + 3x^2 + 0{,}5$$

Trabajo Práctico
Ejercicio 3. Indique si cada una de las siguientes expresiones es o no un polinomio.

a. $p(x) = 2x - 4x^2 - 3$

b. $q(x) = x^{-1} + x^2$

c. $s(t) = 3t^2 + 6$

d. $u(x, y) = 2xy + 4x - 3y + y^{-2}$

e. $m(a) = \sqrt{2a + a^2} - 5$

f. $t(a) = 5$

g. $u(y) = \frac{1}{y} + 2y - 5y^4$

h. $v(x) = 3 + \frac{1}{2}x - \sqrt{3}x^{10} + \frac{6}{7}x^2$

A. En las expresiones que no sean polinomios, explique el motivo.

B. En las expresiones que son polinomios, indique: grado, si está completo y si está ordenado.

Función polinómica asociada a un polinomio

Todo polinomio $P(x)$ define naturalmente una **función polinómica** $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$) que asigna a cada número a el valor obtenido al sustituir formalmente x por a y realizar las operaciones indicadas. Nos ocuparemos de algunos de esos casos en las Unidades 3 y 4.

Nota 1. *En muchos contextos, por abuso de lenguaje, se dice que $P(a)$ es el "valor del polinomio" en a, identificando así el polinomio formal con su función asociada. Estrictamente:*

- *El **polinomio** es la expresión algebraica formal*
- *La **función polinómica** es la aplicación numérica que induce*

Aunque parece una difernencia sutil, no lo es; ya que un polinomio y su función asociada son objetos matemáticos distintos.

Raíces de la función polinómica

Un número a (real o complejo) se denomina **raíz** de la función polinómica asociada a $P(x)$ cuando y sólo cuando:

$$P(a) = 0$$

Nota 2. *Por extensión del lenguaje, es común decir que a es "raíz del polinomio $P(x)$", aunque técnicamente son raíces de su función asociada. También retomaremos este concepto en las unidades siguientes.*

Ejemplo:
Sea el polinomio $P(x) = x^2 - 4$. Su función asociada evaluada en $x = 3$ es:

$$P(3) = 3^2 - 4 = 9 - 4 = 5$$

Las raíces se encuentran resolviendo $P(x) = 0$:

$$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$$

Por tanto, $x = 2$ y $x = -2$ son raíces de la función polinómica (y comúnmente llamadas raíces del polinomio). Mientras que $x = 3$ no lo es.

6. Operaciones con polinomios

Suma y resta

Dados dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$, su suma es otro polinomio $S(x)$ cuyos términos son la suma de los términos semejantes de los polinomios sumandos.

El grado del polinomio suma es menor o igual que el grado de los polinomios sumandos.

Para sumar dos o más polinomios se agrupan los monomios semejantes y se suman sus coeficientes.

Observe además que dos polinomios siempre se pueden escribir en forma equivalente de modo que todos los términos de uno tengan un semejante en el otro. Por ejemplo:

Dados:

$$P(x) = 2x^2 - 3 \quad \wedge \quad Q(x) = x$$

pueden describirse como:

$$P(x) = 2x^2 + 0x - 3 \quad \wedge \quad Q(x) = 0x^2 + x + 0$$

Vemos que estas últimas expresiones son equivalentes a los polinomios originales, y nos permite ver los términos semejantes entre ellos.

Propiedades de la suma

Sean $P(x)$, $Q(x)$ y $R(x)$ polinomios cualesquiera en una variable, se verifican las siguientes propiedades:

Nombre propiedad	Propiedad	Explicación
Asociativa	$[P(x)+Q(x)]+R(x)=P(x)+[Q(x)+R(x)]$	Esta propiedad nos permite sumar tres o más polinomios entre sí.
Conmutativa	$P(x)+Q(x)=Q(x)+P(x)$	Esta propiedad nos permite sumar polinomios sin tener que preocuparnos por el orden de los mismos.
Elemento Neutro	$P(x)+O(x)=O(x)+P(x)=P(x)$	Si a cualquier polinomio se le suma $O(x)$, el resultado es ese mismo polinomio.
Elemento Inverso	$P(x)+[-P(x)]=-P(x)+P(x)=O(x)$	Para cada polinomio siempre se puede encontrar otro polinomio (su opuesto), de modo que sumados dan $O(x)$.

Si observas atentamente, la suma de polinomios cumple las mismas propiedades que la suma de números enteros (o también, que los reales).

Recuerda que para obtener el polinomio opuesto o el polinomio inverso aditivo de un polinomio dado, basta con cambiar el signo de cada uno de sus términos.

Resta

La resta de dos polinomios es otro polinomio obtenido sumándole al polinomio minuendo el polinomio opuesto al sustraendo:

$$P(x)-Q(x)=P(x)+[-Q(x)]$$

Multiplicación

La multiplicación de un número por un polinomio es otro polinomio obtenido multiplicando cada coeficiente del polinomio por el número dado.

Ejemplo:
Si $P(x)=2x^3-3x^2+4x-2$ y se multiplica por 5, se obtiene:

$$\begin{aligned} R(x)=5\cdot P(x) &= 5\cdot(2x^3-3x^2+4x-2) \\ &= 10x^3-15x^2+20x-10 \end{aligned}$$

La multiplicación de un monomio por un polinomio da un polinomio obtenido multiplicando el monomio por cada uno de los monomios que forman el polinomio.

Ejemplo:
Si $P(x)=2x^3-3x^2+4x-2$ y se multiplica por $Q(x)=\frac{3}{2}x^2$, se obtiene:

$$\begin{aligned}
R(x) = Q(x) \cdot P(x) &= \frac{3}{2}x^2 \cdot (2x^3 - 3x^2 + 4x - 2) \\
&= \frac{3}{2}x^2 \cdot 2x^3 + \frac{3}{2}x^2 \cdot (-3x^2) + \frac{3}{2}x^2 \cdot 4x + \frac{3}{2}x^2 \cdot (-2) \\
&= 3x^5 - \frac{9}{2}x^4 + 6x^3 - 3x^2
\end{aligned}$$

La multiplicación de polinomios da otro polinomio obtenido multiplicando cada monomio que forma el primer polinomio por el segundo polinomio.

El grado del polinomio producto es igual a la suma de los grados de los polinomios factores.

Por ejemplo, realicemos el producto entre $P(x) = 3x^4 - 5x^2 + 11$ y $Q(x) = x^3 + 2x^2 + 4$:

$$\begin{aligned}
P(x) \cdot Q(x) &= (3x^4 - 5x^2 + 11)(x^3 + 2x^2 + 4) \\
&= 3x^4 \cdot x^3 + 3x^4 \cdot 2x^2 + 3x^4 \cdot 4 \\
&\quad - 5x^2 \cdot x^3 - 5x^2 \cdot 2x^2 - 5x^2 \cdot 4 \\
&\quad + 11 \cdot x^3 + 11 \cdot 2x^2 + 11 \cdot 4 \\
&= 3x^7 + 6x^6 - 5x^5 + (12x^4 - 10x^4) + 11x^3 + (22x^2 - 20x^2) + 44 \\
&= 3x^7 + 6x^6 - 5x^5 + 2x^4 + 11x^3 + 2x^2 + 44
\end{aligned}$$

La multiplicación de los polinomios dados lo hemos realizado en forma horizontal. También la podemos efectuar colocando los polinomios en columna, alineando los términos semejantes del siguiente modo:

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & & & 3x^4 & & -5x^2 & +11 \\
\times & & & & & x^3 & +2x^2 & +4 \\
\hline
 & & & & 12x^4 & & -20x^2 & +44 \\
 & & 6x^6 & & -10x^4 & & +22x^2 & \\
 & 3x^7 & & -5x^5 & & +11x^3 & & \\
\hline
 & 3x^7 & +6x^6 & -5x^5 & +2x^4 & +11x^3 & +2x^2 & +44
\end{array}$$

Propiedades de la multiplicación de polinomios

Sean $P(x)$, $Q(x)$ y $R(x)$ polinomios cualesquiera, se verifican:

Nombre	Propiedad	Explicación
Asociativa	$[P(x) \cdot Q(x)] \cdot R(x) = P(x) \cdot [Q(x) \cdot R(x)]$	Cuando se multiplican tres polinomios, no importa cuál producto se realice primero, el resultado es el mismo.
Conmutativa	$P(x) \cdot Q(x) = Q(x) \cdot P(x)$	El orden de los factores no altera el polinomio resultante.
Elemento Neutro	$P(x) \cdot I(x) = I(x) \cdot P(x) = P(x)$	Multiplicar por $I(x) = 1$ deja el polinomio invariante.
Elemento Absorbente	$P(x) \cdot O(x) = O(x) \cdot P(x) = O(x)$	Multiplicar por el polinomio nulo $O(x) = 0$ da como resultado el polinomio nulo.

La siguiente propiedad, que se cumple para cualquier terna de polinomios $P(x)$, $Q(x)$ y $R(x)$ involucra a la suma y al producto de ellos:

Propiedad Distributiva

$$P(x) \cdot [Q(x) + R(x)] = P(x) \cdot Q(x) + P(x) \cdot R(x)$$

Observe que las operaciones suma y producto de polinomios cumplen las mismas propiedades que la suma y producto de números enteros.

Trabajo Práctico

Ejercicio 4. Resuelva las operaciones que se piden y simplifique.

a. $3(x-1)+4(x+2)$

b. $(3x^2+x+1)+(-2x^2-x-3x^3-5)$

c. $(2x^2+3y^2)^2$

d. $(x^2-a^2)(x^2+a^2)$

e. $(2x+3)(x-6)$

f. $\sqrt{x}\,(x-\sqrt{x})$

g. $(3x^2+x+1)\cdot(2x^2-3x^3)$

h. $2(2-5t)+t^2(t-1)-(t^4-1)$

i. $(1+a^3)^3$

Productos notables

Existen algunos productos que tienen una estructura determinada, y algunos autores los llaman "productos notables". Además, se usarán con mucha frecuencia y por eso es conveniente tenerlos presentes; sin embargo no es recomendable memorizarlos, si no mejor comprender el desarrollo y tener presente que sólo son casos particulares de la multiplicación.

Para comprobar los resultados realice las multiplicaciones correspondientes.

Diferencia de cuadrados

$$(x+a)(x-a) = x^2 - a^2$$

Trinomio cuadrado perfecto

$$(x+a)(x+a) = (x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$$

$$(x-a)(x-a) = (x-a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$$

Cuatrinomio cubo perfecto

$$(x+a)(x+a)(x+a) = (x+a)^3 = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3$$

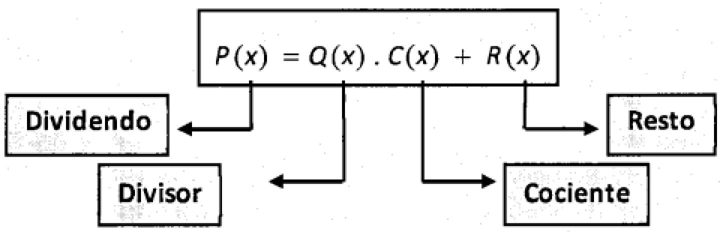
División

La división de polinomios no siempre es posible, deben cumplirse ciertas condiciones. Cuando es posible sigue un algoritmo similar a la división numérica, que resumimos en la imagen. A este proceso lo denominamos *algoritmo de la división*

Se llama división entera de un polinomio P(x) de grado m entre otro Q(x) de grado n, con $m \geq n$, al algoritmo por el cual se obtienen otros dos polinomios C(x) y R(x) que cumplen:

$$P(x) = Q(x) \,.\, C(x) + R(x) \qquad (1)$$

Grado de $C(x) = m - n$ y grado de $R(x) \leq n-1$
o $R(x)$ no tiene grado



Para obtener los polinomios cociente y resto a partir de los polinomios dividendo y divisor, se deben tener presente este conjunto de instrucciones:

- El grado del polinomio dividendo debe ser mayor o igual que el del polinomio divisor.
- Ambos polinomios se ordenan en forma decreciente y se completan antes de comenzar a dividir.
- El grado del resto debe ser menor que el del divisor o ser el polinomio nulo.

Enumeramos los pasos del algoritmo con un ejemplo y resumimos con una imagen:
I) Se divide el primer término del dividendo por el primer término del divisor, con lo que se obtiene el primer término del cociente:

$$\frac{3x^4}{x^2} = 3x^2$$

II) Se multiplica el primer término del cociente por el divisor:

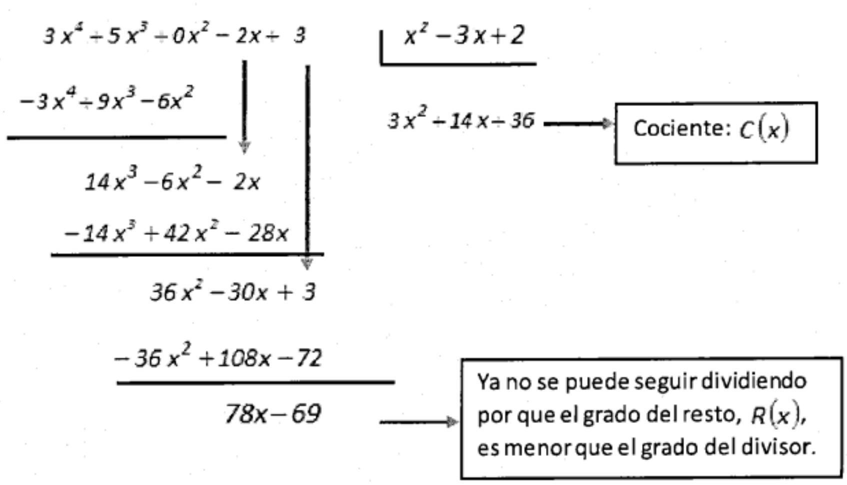
$$3x^2\left(x^2 - 3x + 2\right) = 3x^4 - 9x^3 + 6x^2$$

III) El polinomio obtenido se resta del dividendo, obteniéndose un nuevo dividendo:

$$\left(3x^4 + 5x^3 - 2x + 3\right) - \left(3x^4 - 9x^3 + 6x^2\right) = 14x^3 - 6x^2 - 2x + 3$$

Observe que el polinomio obtenido luego de aplicar una iteración del algoritmo tiene al menos un grado menos que el divisor.

IV) Con el dividendo obtenido, se repiten las operaciones de los pasos I, II y III hasta obtener un resto igual a cero o de menor grado que el del divisor.



Dejamos como tarea verificar que en el ejemplo anterior se verifica:

$$P(x) = Q(x) \cdot C(x) + R(x)$$

- Si el resto es distinto de cero, la división se llama entera y se cumple la relación:

$$P(x) = Q(x) \cdot C(x) + R(x)$$

- Si el resto es cero, la división se llama exacta, es decir, el dividendo es un múltiplo del divisor y se cumple la relación:

$$P(x) = Q(x) \cdot C(x)$$

Si la división es exacta, las siguientes expresiones son equivalentes:

- El dividendo es múltiplo del divisor o el dividendo es divisible por el divisor.
- El dividendo es múltiplo del cociente o el dividendo es divisible por el cociente.
- El dividendo es igual al producto entre el divisor y el cociente.

Trabajo Práctico
Ejercicio 5.Calcule en cada caso el polinomio pedido:

a. $P(x)$ que dividido por $(x+1)$ tiene por cociente $C(x) = 3x^2 + 2x + 3$ y resto 2.

b. $R(x)$ que al sumarle $S(x) = -2x + 3 \cdot x^2$ da como resultado $5x + 6$

c. $P(x)$ al multiplicarlo por $(x-2)$ da como resultado $x^3 - 8$

Regla de Ruffini

Es un método abreviado para dividir un polinomio por un binomio de la forma $(x-a)$. Es importante destacar que **sólo aplica** a los divisores de la forma expresada anteriormente.
Veamos el método con un ejemplo práctico:
Para dividir: $(5x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 6)$; $(x+2)$ aplicando la Regla de Ruffini, se deben realizar los siguientes pasos:

1. **Preparación inicial**
   - Polinomio completo: $5x^4 - 3x^3 + 6x^2 + 0x - 6$
   - Consideramos los coeficientes en orden $5, -3, 6, 0, -6$
   - Raíz del divisor $(x+2=0)$: -2

$$\begin{array}{r|rrrrr} -2 & 5 & -3 & 6 & 0 & -6 \\ \hline & 5 & & & & \end{array}$$

2. **Primera operación**
   - Bajamos el primer coeficiente y multiplicamos por -2 = $\boxed{-10}$
   - Escribimo debajo del siguiente coeficiente y sumamos de acuerdo a signos: $-3 + \boxed{-10} = -13$

$$\begin{array}{r|rrrrr} -2 & 5 & -3 & 6 & 0 & -6 \\ & 5 & \boxed{-10} & & & \\ \hline & 5 & -13 & & & \end{array}$$

3. **Segunda operación**
   - Repetimos el paso anterior. Multiplicamos -13 por -2 = $\boxed{26}$
   - Escribimos debajo de la columna siguiente y sumamos: $6 + \boxed{26} = 32$

$$\begin{array}{r|rrrrr} -2 & 5 & -3 & 6 & 0 & -6 \\ & 5 & -10 & \boxed{26} & & \\ \hline & 5 & -13 & 32 & & \end{array}$$

4. **Tercera operación**
   - Multiplicamos 32 por -2 = $\boxed{-64}$
   - Sumamos: $0 + \boxed{-64} = -64$

$$\begin{array}{r|rrrrr} -2 & 5 & -3 & 6 & 0 & -6 \\ & 5 & -10 & 26 & \boxed{-64} & \\ \hline & 5 & -13 & 32 & -64 & \end{array}$$

5. **Cuarta operación**
   - Multiplicamos -64 por -2 = $\boxed{128}$
   - Sumamos: $-6 + \boxed{128} = 122$ (resto)

$$\begin{array}{r|rrrrr} -2 & 5 & -3 & 6 & 0 & -6 \\ & 5 & -10 & 26 & -64 & \boxed{128} \\ \hline & 5 & -13 & 32 & -64 & 122 \end{array}$$

6. **Resultado final**
   - Cociente: $5x^3 - 13x^2 + 32x - 64$ (coeficientes de la última fila, ordenados)
   - Resto: 122

Teorema del resto

Considere la división del polinomio $P(x) = x^4 - 8x^2 - 7x + 2$ dividida por $Q(x) = x - 3$, usando la Regla de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 0 & -8 & -7 & 2 \\ 3 & & 3 & 9 & 3 & -12 \\ \hline & 1 & 3 & 1 & -4 & \boxed{-10} \end{array}$$

Al evaluar la función polinómica asociada a $P(x)$ en $x = 3$:

$$\begin{aligned} P(3) &= 3^4 - 8 \cdot 3^2 - 7 \cdot 3 + 2 \\ &= 81 - 72 - 21 + 2 \\ &= -10 \end{aligned}$$

Esta coincidencia entre la función asociada al polinomio $P(x)$ en $x = 3$ y el resto de la división $P(x) : (x - 3)$ no es casual, de hecho se puede probar que para cualquier división de este tipo será así. Esta propiedad general se enuncia en el siguiente teorema:

Teorema del Resto

El resto de la división de un polinomio $P(x)$ por $(x - a)$ coincide con el valor de la función polinómica asociada evaluada en $x = a$, es decir:

$$R(x) = P(a)$$

- **Restricción**: Solo aplica para divisiones por binomios de la forma $(x \pm a)$.
- **Utilidad**: Permite calcular el resto sin realizar la división completa.

Trabajo Práctico
Ejercicio 6.Resuelva las siguientes divisiones, indique el cociente, resto y cuando sea posible verifique aplicando el Teorema del Resto:

a. $(x^5 + 7x^3 - 5x + 1) \div (x^3 + 2x)$

b. $(8x^4 - x^3 - 2 + x^2) \div (x - 2)$

c. $(2x^4 - 3x^3) \div (x + 2)$

Ejercicio 7: Determine los números a y b para que $P(x) = 5x^3 - 2x^2 + ax - b$ sea divisible por $Q(x) = x^2 + 1$.

Ejercicio 8. Calcule "a"si el resto de la división de $P(x)$ por $Q(x)$ es:

a. $P(x) = x^4 + ax^3 - 3x^2 + 4x + 5$; $Q(x) = x + 1$; $R(x) = 3$

b. $P(x) = x^5 + ax^3 + x - 1$; $Q(x) = x - 2$; $R(x) = 9$

c. $P(x) = -3x^4 + 6x^2 - 3a^2x + 3$; $Q(x) = x + 1$; $R(x) = 11$

Ejercicio 9. Encuentre en cada caso, si es posible, el valor del número real m para que el polinomio $P(x)$ sea divisible por $Q(x)$, siendo:

a. $P(x) = x^2 - 9x + m + x^2$ y $Q(x) = x + 1$

b. $P(x) = 3x^3 + x - \frac{1}{2}m$ y $Q(x) = x - 4$

c. $P(x) = mx^4 - (m + 1)x^2 - x + 1$ y $Q(x) = x + 1$

---

7. Factorización de polinomios

También los polinomios pueden ser expresados como el producto de dos o más factores algebraicos. A este proceso se lo llama factorización.

Recordemos que... es posible expresar los números enteros como producto de otros números enteros que son divisores del mismo, como por ejemplo:

- $6 = 2 \cdot 3$ o también $6 = -2 \cdot (-3)$
- $-10 = 2 \cdot (-5)$ o también $-10 = -2 \cdot 5$

Anteriormente vimos productos notables, en virtud de eso:

$$x^2 - 25 = (x-5)(x+5)$$

Aquí, el segundo miembro de la igualdad es un producto de dos factores, mientras que el primero es un binomio. Se dice que "factorizamos el binomio", porque ese binomio tiene como expresión equivalente un producto.

Para factorizar polinomios, en general, se aplican diversos recursos algebraicos como el de los productos notables y/o el de las raíces o ceros de un polinomio.

Anteriormente hemos visto que un número a (real o complejo) es una raíz o cero de un polinomio $P(x)$, si la función asociada se anula para ese valor de x.

En forma simbólica se escribe:

$$x = a \quad \text{es raíz de } P(x) \text{ si y sólo si } P(a) = 0$$

Si combinamos el teorema del resto y el algoritmo de la división de un polinomio $P(x)$ por un binomio de la forma $(x-a)$:

$$P(x) = (x-a) \cdot C(x) + P(a)$$

Si $P(a) = 0$ entonces, una consecuencia importante estará dada por la expresión:

$$P(x) = (x-a) \cdot C(x)$$

De esta igualdad se extraen dos conceptos fundamentales:

- **Factorización de polinomios**: La expresión descompuesta del polinomio como producto de factores
- **Divisibilidad**: La propiedad que indica que $(x-a)$ divide exactamente a $P(x)$

El polinomio $P(x)$ queda expresado como el producto del divisor $(x-a)$ por el cociente $C(x)$. Esto representa la factorización de $P(x)$ a partir de su raíz en $x = a$. Equivalentemente, puede expresarse como:

$$\frac{P(x)}{(x-a)} = C(x)$$

lo que indica que $P(x)$ es **divisible** por $(x-a)$, implicando que el resto de esta división es exactamente cero.

Formalmente, cuando al dividir dos polinomios obtenemos un resto nulo:

$$P(x) = Q(x) \cdot C(x) + 0$$

decimos que $P(x)$ es divisible por $Q(x)$. Este concepto, análogo al de divisibilidad en los números enteros, resulta esencial para la factorización de polinomios.

Teorema fundamental del álgebra

Sobre las raíces de la función polinómica asociada a $P(x)$, que son los valores $x = a$ donde $P(a) = 0$, surge la pregunta natural: ¿Cuántas raíces posee un polinomio dado? La respuesta la proporciona el siguiente teorema:

Teorema Fundamental del Álgebra

Todo polinomio no constante de grado n con coeficientes complejos tiene exactamente n raíces reales o imaginarias (contando multiplicidades).

Las raíces (o ceros) de la función polinómica asociada a $P(x)$ son importantes porque:

- Permiten hallar la **expresión factorizada** del polinomio
- Simplifican expresiones algebraicas
- Resuelven ecuaciones de grado ≥ 2
- Indican los ceros o raíces de la función asociada.

Factorización completa

Si la función asociada un polinomio de grado n con coeficiente principal a_n tiene n raíces $x_1, x_2, \ldots, x_n$, su expresión factorizada es:

$$P(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n)$$

Nota: Esta factorización existe por el Teorema Fundamental del Álgebra. Para coeficientes reales, las raíces complejas vienen en pares conjugados, en algunos casos; pero nosotros no nos ocuparemos de estos casos en el curso.

Polinomios primos

Recordamos que: al número 60 lo podemos escribir: $60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$, es decir, lo hemos expresado como producto de los factores 2, 3 y 5, ya que 60 es divisible por ellos. Decimos que 60 es número compuesto.

No sucede lo mismo con 61, ya que no es divisible por otros números que no sean él mismo y la unidad. A estos números se los llama números primos.

Con los polinomios sucede algo parecido, es decir, algunos de ellos se pueden factorizar y otros no. Definimos entonces entonces:

> Cuando a un polinomio de grado no nulo, no es posible expresarlo como producto de polinomios de grado menor, se dice que es un **polinomio primo** o **irreducible**.

La factorización de un polinomio, conocidas sus raíces, no es la única forma de expresar un polinomio como un producto de polinomios primos.

Recordaremos otras maneras que son muy útiles cuando se trabaja con operaciones entre expresiones algebraicas enteras y fraccionarias.

Ejemplo: Consideremos el polinomio $P(x) = -x^2 + 4x - 3$ donde:

- Coeficiente principal: -1 (no es factor común de todos los términos)
- Sabemos que $x = 1$ es raíz de la función polinómica asociada

1. **Verificación de la raíz**:
$$P(1) = -(1)^2 + 4(1) - 3 = -1 + 4 - 3 = 0$$
2. **División por** $(x-1)$ usando Ruffini:
$$\begin{array}{c|ccc} 1 & -1 & 4 & -3 \\ & & -1 & 3 \\ \hline & -1 & 3 & 0 \end{array}$$
Obtenemos el cociente: $C(x) = -x + 3$
3. **Factorización completa**:
$$P(x) = (x-1)(-x+3)$$
$$P(x) = -1(x-1)(x-3) \quad \text{(forma factorizada)}$$

Aunque las últimas dos expresiones son equivalentes, por lo general se prefiere la última expresión; pues permite simplificar o resolver otras operaciones.

Métodos de factorización

Factor común

Observe el polinomio: $P(x) = 2x^4 + 4x^2$
Podemos factorizarlo encontrando las raíces, pero también podemos extraer los factores comunes a ambos términos.

Para ello seguimos el siguiente procedimiento que consiste en:

- Calcular el mayor divisor común de los coeficientes.
- Identificar la variable x, con el menor exponente de todos los términos.

Volviendo al polinomio $P(x) = 2x^4 + 4x^2$ observamos que:

- 2 es el mayor divisor común de los coeficientes 2 y 4
- x^2 es el factor literal con menor exponente de los términos dados

Luego, el factor común es: $2x^2$
Si dividimos cada término del polinomio por el factor común obtenemos:
$$\frac{2x^4}{2x^2} = x^2 \quad \text{y} \quad \frac{4x^2}{2x^2} = 2$$
por lo tanto:
$$P(x) = 2x^4 + 4x^2 = 2x^2(x^2 + 2)$$

¿Es posible verificar si esta factorización es correcta? ¿Qué propiedad debemos utilizar?

Dejamos esta inquietud para que la resuelva y verifique el resultado.

Trabajo Práctico
Ejercicio 10.Obtenga el factor común en cada expresión:

a. $2x^4 + 4x^3 - 14x^2$

b. $6m^2 - 9m + 3m^3$

c. $5a^3b^2 - 10a^2b^3 + 15ab^4$

d. $12m^2n^3 - 18m^3n^2 + 24mn^4$

Factor común por grupos

No siempre es posible factorizar un polinomio a partir del factor común. Sin embargo, hay polinomios que presentan una estructura que nos permite formar grupos, asociando, con el mismo número de términos y que presentan un factor común para cada uno de esos grupos.

$$ax + ay + bx + by = a(x + y) + b(x + y)$$

Analicemos este ejemplo:

$$ax + ay + bx + by$$

En él es posible observar que los dos primeros términos tienen de común el factor a y los dos últimos, el factor b. Si asociamos los dos primeros y los dos últimos términos:

$$ax + ay + bx + by = (ax + ay) + (bx + by)$$

y luego, de cada paréntesis, extraemos el factor común, obtenemos:

$$ax + ay + bx + by = a(x + y) + b(x + y)$$

Observamos que han quedado dos términos que tienen como factor común $(x+y)$, entonces extraemos ese factor común:

$$ax + ay + bx + by = (x + y)(a + b)$$

Note que la agrupación puede ser no ser única de acuerdo al polinomio.
Recuerde:
Los polinomios que se pueden factorizar de esta forma cumplen con el siguiente requisito:

- Los grupos de términos que tienen factores comunes deben tener el mismo número de términos.

Trabajo Práctico
Ejercicio 11.Factorice la expresión agrupando términos.

a. $x^3 + 4x^2 + x + 4$

b. $2x^3 + x^2 - 6x - 3$

c. $-9x^3 - 3x^2 + 3x + 1$

d. $x^5 + x^4 + x + 1$

Trinomio cuadrado perfecto

Recuerde el resultado de $(x + a)^2$ cuando se comentaron los casos particulares o productos notables de la multiplicación. La expresión que se obtiene se denomina trinomio cuadrado perfecto, que factorizada, es el cuadrado de un binomio.

Un trinomio cuadrado perfecto consta de tres términos, que cumplen las siguientes condiciones:

a) Dos de los términos son cuadrados.

b) Un término que es el doble del producto de las bases de los cuadrados.

El cuadrado de un binomio es el producto del binomio por sí mismo y si aplicamos la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma, obtenemos:

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a \cdot a + a \cdot b + b \cdot a + b \cdot b = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Cuadrado de un binomio   Trinomio cuadrado perfecto

Ejemplos

- El trinomio $25x^2 + 10xy^2 + y^4$ es un trinomio cuadrado perfecto porque:
  a) El primer término es el cuadrado de $5x$ ya que: $(5x)^2 = 25x^2$
  b) El tercer término es el cuadrado de y^2 ya que: $(y^2)^2 = y^4$
  c) El segundo término es el doble producto de las bases de esos cuadrados, es decir: $2 \cdot 5x \cdot y^2 = 10xy^2$

  Luego, el trinomio cuadrado perfecto dado se factoriza:

  $$25x^2 + 10xy^2 + y^4 = (5x + y^2)^2$$

- El trinomio $9 - 6x + x^2$ se puede factorizar de dos maneras:

  $$9 - 6x + x^2 = (3 - x)^2$$

  $$9 - 6x + x^2 = (x - 3)^2$$

Nota: Siempre que el término del doble producto aparezca con signo negativo, en el trinomio cuadrado perfecto, podemos factorizarlo de las dos maneras.

Trinomio cuadrado no perfecto

Consideremos el trinomio:

$$P(x) = x^2 - x - 6$$

Vemos que no es un trinomio cuadrado perfecto, ya que no tenemos los términos de cuadrado perfecto y el doble producto. Sin embargo, podemos factorizarlo de la siguiente manera, que sirve también para polinomios que verifican la estrategia anterior:

- **Paso 1: Identificar coeficientes**
  Para la fórmula de Bhaskara o fórmula resolvernte

  $$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

  tomamos:

  $$a = 1, \quad b = -1, \quad c = -6$$

- **Paso 2: Aplicar fórmula de Bhaskara**

  $$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{25}}{2 \times 1} = \frac{1 \pm 5}{2}$$

  Obteniendo las raíces:

  $$x_1 = \frac{1+5}{2} = 3, \quad x_2 = \frac{1-5}{2} = -2$$

  En caso de obtener números imaginariso en este paso, diremos que el polinomio no se puede factorizar.

- **Paso 3: Factorización**
  Con las raíces $x_1 = 3$ y $x_2 = -2$, el polinomio se factoriza como:

  $$P(x) = (x-3)(x+2)$$

Dejamos como tarea la verificación para obtener el trinomio original.

Trabajo Práctico
Ejercicio 12.Factorice los siguientes trinomios

a. $x^2 + 6x + 9 =$

b. $4x^2 - 12x + 9$

c. $x^2 + 2x - 4$

d. $9x^2 + 30x + 25$

e. $x^2 - 5x + 6$

f. $2x^2 + 7x + 3$

Cuatrinomio cubo perfecto

En forma similar, comentamos el resultado al realizar $(x+a)^3$?

La expresión obtenida se denomina **cuatrinomio cubo perfecto**, que factorizada es el cubo de un binomio.

Un cuatrinomio cubo perfecto de la forma $x^3+3x^2a+3xa^2+a^3$ consta de cuatro términos que cumplen las siguientes condiciones:

a) Dos de los términos son cubos: x^3 y a^3

b) Un tercer término $3x^2a$, es el triple del cuadrado de la base del primer término por el segundo término.

c) El cuarto término $3xa^2$, es el triple de la base del primer término por el cuadrado de la base del segundo.

Para desarrollar el cubo de un binomio, desarrollamos primero el cuadrado y luego multiplicamos la expresión que obtuvimos por el binomio original:

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)^2(a+b) = (a^2+2ab+b^2)(a+b)\\ &= a^3+a^2b+2a^2b+2ab^2+ab^2+b^3\\ (a+b)^3 &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\end{aligned}$$

Cubo de un binomio   Cuatrinomio cubo perfecto

Nota Recuerde el caso del cubo de una resta, es decir:

$$\begin{aligned}(a-b)^3 &= [a+(-b)]^3\\ &= a^3+3a^2(-b)+3a(-b)^2+(-b)^3\\ &= a^3-3a^2b+3ab^2-b^3\end{aligned}$$

Una vez más insistimos que no es requisito saber de memoria los desarrollos del cuadrado o cubo de un binomio, aunque signifiquen un ahorro de tiempo. Siempre puede obtener la expresión multiplicando cada binomio por sí mismo.

Trabajo Práctico

Ejercicio 13.Factorice los siguientes cuatrinomios:

a. x^3+3x^2+3x+1

b. $8x^3-12x^2+6x-1$

c. $x^3+6x^2+12x-8$

d. $27x^3+27x^2+9x+1$

Diferencia de cuadrados

En forma similar a las estrategias anteriores anteriores, tenemos un caso particular del producto $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$
Para aplicar esta factorización, **debe tratarse siempre de una resta de dos términos al cuadrado**. La expresión debe tener exactamente la forma $a^2 - b^2$ donde:

- Ambos términos (a^2 y b^2) son cuadrados perfectos
- Los términos están vinculados por una resta

No se puede aplicar este método a sumas de cuadrados ($a^2 + b^2$) ni cuando los términos no son cuadrados perfectos.
Ejemplo:
Consideremos el polinomio $9x^2 - 16y^4$:

1. Identificamos los cuadrados perfectos:
   - $9x^2 = (3x)^2$ (Primer término al cuadrado)
   - $16y^4 = (4y^2)^2$ (Segundo término al cuadrado)
2. Escribimos como producto:

$$9x^2 - 16y^4 = (3x + 4y^2)(3x - 4y^2)$$

Trabajo Práctico
Ejercicio 14. Factorice las siguientes expresiones:

a. $x^2 - 16$

b. $9a^2 - 25b^2$

c. $x^4 + y^4$

d. $16x^2 - \frac{1}{9}$

Suma y diferencia de potencias de igual grado

Los siguientes polinomios son particularmente binomios que presentan la siguiente expresión:

$$P(x) = x^n + a^n \quad \text{o} \quad P(x) = x^n - a^n$$

Recuerde que n debe ser un número natural.
Para factorizarlos es de suma importancia tener presente dos propiedades enunciadas anteriormente:

- Todo polinomio de grado n tiene n raíces (números reales o complejas, iguales o distintas).

- Si de un polinomio de grado n conocemos sus n raíces: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ (siendo el coeficiente principal a_n), podemos escribir su expresión factorizada:

$$P(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\cdots(x - x_n)$$

Para llevar a cabo la factorización utilizaremos dos conceptos:

- Estas expresiones son divisibles por un binomio de la forma $(x - a)$ siempre que a sea un cero o raíz del polinomio dado. Luego: $P(x) = (x - a)C(x)$
- La regla de Ruffini para calcular los coeficientes de $C(x)$ y verificar si efectivamente el valor hallado para a es un cero del polinomio.

Debemos averiguar si $x^n + a^n$ o $x^n - a^n$ son divisibles por $(x + a)$ o $(x - a)$. En ambos casos, la divisibilidad depende si el exponente n (número natural) es par o impar.

Ya que estamos trabajando con división de polinomios, siendo el divisor un binomio de primer grado en x podemos aplicar el Teorema del Resto. Si es divisible, el resto será cero y podremos factorizar como:

$$x^n \pm a^n = (x \pm a)C(x)$$

A continuación analizaremos algunos ejemplos particularizando si el grado es un número natural par o impar. Para ello comprobaremos que las siguientes divisiones son exactas aplicando el teorema del resto y calcularemos el cociente aplicando regla de Ruffini.

Ejemplo 1: Suma de potencias con exponente impar

$$(x^3 + 27) : (x + 3) = (x^3 + 3^3) : (x + 3)$$

- Aplicando el teorema del resto para $x = -3$ resulta: $(-3)^3 + 3^3 = 0$ y la división es exacta.
- Resolviendo la división con la regla de Ruffini, obtenemos el cociente:

$$(x^3 + 27) : (x + 3) = x^2 - 3x + 9$$

Utilizamos en la igualdad el algoritmo de la división y de esta forma obtenemos la expresión factorizada:

$$x^3 + 27 = (x + 3)(x^2 - 3x + 9)$$

Ejemplo 2: Resta de potencias con exponente impar

$$(x^3 - 8) : (x - 2) = (x^3 - 2^3) : (x - 2)$$

- Teorema del Resto para $x = 2$: $(2)^3 - (2)^3 = 0$ (división exacta)
- Regla de Ruffini:

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & 0 & 0 & -8 \\ & & 2 & 4 & 8 \\ \hline & 1 & 2 & 4 & 0 \end{array}$$

  Cociente: $x^2 + 2x + 4$

Expresión factorizada:

$$x^3 - 8 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$$

Ejemplo 3: Suma de potencias con exponente par Consideremos el polinomio:

$$P(x) = x^4 + 16$$

Intentemos dividir por $(x - a)$ donde a es una posible raíz:

- Para $x = 2$:
$$P(2) = 2^4 + 16 = 16 + 16 = 32 \neq 0$$
- Para $x = -2$:
$$P(-2) = (-2)^4 + 16 = 16 + 16 = 32 \neq 0$$

Conclusión: No existen raíces reales que anulen el polinomio ($P(a) \neq 0$ para todo $a \in \mathbb{R}$). Por lo tanto, la expresión $x^4 + 16$ **no es factorizable** en los números reales porque:

- Es una suma de cuadrados perfectos
- No cumple con ninguna identidad notable para factorización real

Ejemplo 4: Resta de potencias con exponente par

$$(x^6 - 64) : (x^2 - 4) = (x^6 - 2^6) : (x^2 - 4)$$

- Teorema del Resto para $x = 2$: $(2)^6 - (2)^6 = 0$ (división exacta)
- Factorización completa:
$$x^6 - 64 = (x^3 - 8)(x^3 + 8) = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)(x + 2)(x^2 - 2x + 4)$$

Observaciones importantes:

- Las sumas con exponente par $x^{2n} + a^{2n}$ no son factorizables en los reales
- Las restas con exponente par admiten doble factorización:
$$x^4 - 16 = (x^2 - 4)(x^2 + 4) = (x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)$$
- Para polinomios en varias indeterminadas se aplican los mismos métodos

---

Trabajo Práctico

Ejercicio 15. Factorice las siguientes sumas/diferencias de potencias impares:

a) $x^3 + 8$

b) $27a^3 - b^3$

c) $x^5 - 32$

d) $y^7 + 1$

Pasos generales para la factorización de polinomios

A continuación mencionamos los pasos generales a tener en cuenta para la factorización de polinomios:

1. **Sacar factor común** si es posible.
2. Si el polinomio no queda totalmente factorizado, se aplica alguno de los otros casos analizados o el método de las raíces.

Para utilizar el método de la factorización a partir de los ceros o raíces reales del polinomio tenemos en cuenta:

a) Calcular alguna raíz entera a partir de los divisores enteros del término independiente.

b) Verificar si los divisores son raíces del polinomio utilizando el teorema del resto.

c) Calcular el cociente $C(x)$ entre $P(x)$ y el divisor $(x - a)$ utilizando la Regla de Ruffini, de modo que:

$$P(x) = (x - a)C(x)$$

d) Se repite lo realizado en el punto c) en caso de que $C(x)$ sea factorizable.

Síntesis

Algoritmo de factorización

1. Buscar factor común en todos los términos
2. Identificar si corresponde a algún caso especial:
3. Aplicar el método de raíces para polinomios de grado mayor:
4. Verificar la factorización multiplicando los factores

Nota importante: La factorización completa se logra cuando todos los factores obtenidos son polinomios primos (irreducibles) en el campo considerado.

Trabajo Práctico
Ejercicio 16.Factorice totalmente las expresiones:

a. $2x^2 + 5x + 3$
b. $5ab - 8abc$
c. $9x^2 - 36x - 45$
d. $x^2 - 36$
e. $49 - 4y^2$
f. $8x^3 + 125$
g. $3x^3 - 27x$
h. $y^3 - 3y^2 - 4y + 12$
i. $3x^3 + 5x^2 - 6x - 10$
j. $(x - 2)^2 - 9y^2$
k. $x^3 + x^2y - x - y$
l. $4x^2 + 2x - 2$

8. Máximo común divisor y mínimo común múltiplo

Una aplicación útil de la factorización de polinomios es calcular, para dos polinomios, el mínimo común múltiplo o múltiplo común menor, $\text{mcm}(P(x), Q(x))$; y el máximo común divisor $\text{mcd}(P(x), Q(x))$, los que a su vez permitirán trabajar con funciones racionales.

Estos conceptos los vimos en el módulo de números reales. Si tiene alguna duda respecto de ellos, repase antes de continuar.

El máximo común divisor de dos o más polinomios, mcd $(P(x), Q(x))$, es el polinomio de grado máximo que sea divisor de todos los polinomios dados.

El mínimo común múltiplo de dos o más polinomios es el polinomio de grado mínimo que sea múltiplo de todos ellos.

Pasos para el cálculo del máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de dos o más polinomios:

a) Se factorizan los polinomios dados.

b) El máximo común divisor es el producto de los factores comunes a los polinomios dados, elevados a su menor exponente con que aparezcan en una de las factorizaciones de los polinomios.

c) El mínimo común múltiplo es el producto de los factores comunes y no comunes a los polinomios dados, elevados a su mayor exponente con que aparezcan en una de las factorizaciones de los polinomios.

Ejemplo:
Calcularemos el mcd y el mcm de los polinomios:

$$P_1(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2x - 3$$
$$P_2(x) = x^4 - 1$$
$$P_3(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$$

Primero factorizaremos cada polinomio. Le proponemos que analice y escriba para cada polinomio el/los casos de factoreo utilizados:

a) $2x^3 - 3x^2 + 2x - 3 = 2x(x^2 + 1) - 3(x^2 + 1) = (x^2 + 1)(2x - 3)$

b) $x^4 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$

c) $x^3 - 2x^2 + x - 2 = x^2(x-2) + (x-2) = (x^2+1)(x-2)$

Es importante tener en cuenta que:

- El mcd de dos o más polinomios debe dividir en forma exacta (con resto cero) a todos ellos, por lo tanto es el producto de los factores comunes con su menor exponente.

  En nuestro caso es $\text{mcd}(P_1(x), P_2(x), P_3(x)) = x^2 + 1$.

- El mcm de dos o más polinomios es el polinomio de menor grado que es divisible por todos los polinomios. Por ello se obtiene multiplicando los factores comunes y no comunes con su mayor exponente.

  En nuestro ejemplo es: $\text{mcm}(P_1(x), P_2(x), P_3(x)) = (x^2+1)(2x-3)(x-1)(x+1)(x-2)$.

9. Expresiones algebraicas fraccionarias

Dados dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ donde $Q(x) \neq 0$, la expresión $\frac{P(x)}{Q(x)}$ es una expresión racional fraccionaria. Es decir, es un cociente de dos polinomios. También se las conoce como fracciones algebraicas. Como por ejemplo:

a) $\frac{3x+y}{x-2}$ b) $\frac{a+b^2}{x+y^3}$ c) $\frac{2ab}{3b-a}$

Las fracciones algebraicas se comportan como las fracciones numéricas, es decir, podemos simplificarlas, sumarlas, restarlas, multiplicarlas y dividirlas.

Simplificación

Cuando se trabaja con fracciones algebraicas, la simplificación consiste en factorizar el numerador y denominador con el objeto de eliminar los factores comunes que existan en ellos.

Este procedimiento se repite hasta que los dos polinomios resulten primos entre sí. En este caso, decimos que la fracción está reducida a su más simple expresión y recibe el nombre de irreducible.

Antes de comenzar a simplificar hay que tener en cuenta que se deben excluir los valores de x que anulan el denominador de la expresión que se simplifica.

Ejemplo 1:

$$\frac{x+3}{x^2-9}$$

Si observa el numerador, no es posible factorizarlo, pero en cambio el denominador es una diferencia de cuadrados, luego:

$$x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$$

Reemplazando en la expresión fraccionaria y simplificando los factores iguales del numerador y denominador resulta:

$$\frac{(x+3)}{(x^2-9)} = \frac{(x+3)}{(x+3)(x-3)} = \frac{1}{(x-3)}$$

La expresión simplificada de

$$\frac{x+3}{x^2-9} \quad \text{es:} \quad \frac{1}{x-3}$$

Ejemplo 2:

$$\frac{-4x+4}{x^2+x-2}$$

Observamos que:

En el numerador se repite el factor 4 en cada término, entonces la expresión factorizada es: $-4(x-1)$

El denominador es un trinomio cuadrado, pero no es perfecto. Por lo que tendremos que calcular los ceros del polinomio. Es decir, hacemos:

$$x^2+x-2=0$$

Podemos calcular los posibles ceros, buscando los divisores del término independiente o bien resolviendo la ecuación de segundo grado.

Resultando entonces el denominador:

$$x^2+x-2=(x+2)(x-1)$$

Reemplazando las factorizaciones realizadas en el numerador y denominador:

$$\frac{-4x+4}{x^2+x-2}=\frac{-4(x-1)}{(x+2)(x-1)}$$

y simplificando factores iguales del numerador y denominador obtenemos:

$$\frac{-4x+4}{x^2+x-2}=\frac{-4(x-1)}{(x+2)(x-1)}=\frac{-4}{(x+2)}$$

Resultando la expresión simplificada de

$$\frac{-4x+4}{x^2+x-2} \quad \text{es:} \quad \frac{-4}{(x+2)}$$

Trabajo Práctico

Ejercicio 17. Simplifique las expresiones racionales:

a. $\dfrac{3(x+2)(x-1)}{6(x-1)^2}$

b. $\dfrac{x^2-x-2}{x^2-1}$

c. $\dfrac{x^2+6x+8}{x^2+5x+4}$

d. $\dfrac{y^2+y}{y^2-1}$

e. $\dfrac{6x-12}{4x}$

f. $\dfrac{x^2-4x+4}{12x}$

g. $\dfrac{1-x^2}{x^3-1}$

h. $\dfrac{z^2-3z}{z^2-2z-3}$

Operaciones

Suma y Resta

: Para sumar y/o restar expresiones fraccionarias es necesario que todas presenten el mismo denominador.

De no ser así, antes de operar deberá buscarse expresiones equivalentes con el mismo denominador. Este común denominador de los términos dados es conveniente que sea el mínimo común múltiplo de los denominadores dados.

Ejemplo

Dada la siguiente expresión, calcularemos su suma algebraica:

$$\frac{x+2}{1-x^2} - \frac{1}{1-x} + \frac{1}{x+x^2}$$

Aplicamos el procedimiento:

1. Se calcula el mcm de sus denominadores al que llamaremos mínimo común denominador:

$$P(x) = (1-x^2) = (1-x)(1+x)$$
$$Q(x) = (x+x^2) = x(1+x)$$
$$\text{mcm}(P(x), Q(x)) = (1+x)(1-x)x$$

2. Se divide el mínimo común múltiplo encontrado por cada uno de los denominadores y el resultado de cada cociente se multiplica por el numerador correspondiente:

$$\frac{(x+2)}{(1+x)(1-x)} - \frac{1}{1-x} + \frac{1}{x(1+x)} = \frac{x(x+2)-(1+x)x+(1-x)}{(1+x)(1-x)x}$$

3. Se realizan las operaciones que han quedado indicadas en el numerador:

$$\frac{x(x+2)-(1+x)x+(1-x)}{(1+x)(1-x)x} = \frac{x^2+2x-x-x^2+1-x}{(1+x)(1-x)x}$$

4. Luego se escribe el resultado de la operación que será la fracción algebraica que tiene como numerador la expresión obtenida en el paso (3) y como denominador el mínimo común múltiplo encontrado en el paso (1). Si es posible se factoriza el numerador para simplificarlo con factores del denominador, o se cancelan términos semejantes hasta que la fracción sea irreducible:

$$\frac{x^2+2x-x-x^2+1-x}{(1+x)(1-x)x} = \frac{1}{(1-x)(1+x)x}$$

Trabajo Práctico

Ejercicio 18. Resuelva las operaciones y simplifique:

a. $\dfrac{2x-1}{x+4}-1$

b. $\dfrac{1}{x+5}+\dfrac{2}{x-3}$

c. $\dfrac{x}{x-4}-\dfrac{3}{x+6}$

d. $\dfrac{x}{(x+1)^2}+\dfrac{2}{x+1}$

e. $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}$

f. $\dfrac{x}{x^2-x-6}-\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{2}{x-3}$

g. $\dfrac{x^2-x-12}{x^4-64x}+\dfrac{x^2+3x+13}{x^3+4x^2+16x}$

h. $\dfrac{x}{x+5}-\dfrac{1}{\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{x}{5}}$

Multiplicación

: El producto de dos o más expresiones fraccionarias es otra expresión fraccionaria cuyo numerador se obtiene de la multiplicación de los numeradores, y cuyo denominador resulta de multiplicar los denominadores.

Para hacer más sencillo este cálculo es práctico llevar a cada una de las expresiones fraccionarias a su expresión irreducible mediante la factorización y simplificación para luego obtener el resultado.

Ejemplo

$$\frac{x^3+8}{x+2}\cdot\frac{x+1}{x^2-2x+4}\cdot\frac{1}{x-1}$$

Factorizando el numerador x^3+8 como suma de cubos:

$$=\frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{x+2}\cdot\frac{x+1}{x^2-2x+4}\cdot\frac{1}{x-1}$$

Simplificando los factores comunes:

$$=\frac{x+1}{x-1}$$

División

: Recordemos cómo resolver la siguiente división, sin calculadora:

$$\frac{10}{9}\div\frac{5}{3}$$

El cocientes es $\frac{2}{3}$ y para llegar al resultado la mejor estrategia es multiplicar la primera fracción (dividendo), por el inverso multiplicativo de la segunda fracción (divisor). Y finalmente se simplifica y realiza la multiplicación.

Del mismo modo se realiza la división entre expresiones algebraicas fraccionarias.

La división entre expresiones fraccionarias es otra expresión hallada:

1. Factorizando las expresiones algebraicas dividendo y divisor;
2. Multiplicando al dividendo por el inverso de la expresión fraccionaria divisor;
3. Simplificando (si fuera posible);

4. Realizando la multiplicación indicada.

Ejemplo:
Dividir las siguientes expresiones fraccionarias:

$$\frac{x^2-4}{x^2-x-6} \div \frac{x^2+4x+4}{x^2-9}$$

Paso 1: Factorizamos todas las expresiones:

$$\begin{aligned} x^2-4 &= (x+2)(x-2) \\ x^2-x-6 &= (x-3)(x+2) \\ x^2+4x+4 &= (x+2)^2 \\ x^2-9 &= (x+3)(x-3) \end{aligned}$$

Paso 2: Reescribimos la división como multiplicación por el inverso:

$$\frac{(x+2)(x-2)}{(x-3)(x+2)} \times \frac{(x+3)(x-3)}{(x+2)^2}$$

Paso 3: Simplificamos factores comunes:

$$\frac{\cancel{(x+2)}(x-2)}{\cancel{(x-3)}\cancel{(x+2)}} \times \frac{(x+3)\cancel{(x-3)}}{(x+2)^{\cancel{2}}} = \frac{(x-2)(x+3)}{x+2}$$

Resultado final:

$$\frac{(x-2)(x+3)}{x+2}$$

Note que no es necesario volver a multiplicar los binomios del numerador, aunque dependerá de las aplicaciones de la expresión

---

Trabajo Práctico
Ejercicio 19. Resuelva las operaciones y simplifique:

a. $\frac{4x}{x^2-4} \cdot \frac{x+2}{16x}$

b. $\frac{4-x^2}{2x^2+2+x^3+x} \cdot \frac{4-2x}{x^2+1}$

c. $\frac{x^2+2x-3}{x^2-2x-3} \cdot \frac{3-x}{3+x}$

d. $\frac{t-3}{t^2+9} \cdot \frac{t+3}{t^2-9}$

e. $\dfrac{\frac{x^3}{x+1}}{\frac{x}{x^2+2x+1}}$

f. $\frac{a^2-6a+9}{(a+3)^2} \cdot \frac{a^3-3a^2}{a^2-9}$

g. $\frac{1+x}{4+x} \cdot \frac{3+2x-x^2}{x^2+x-12}$

h. $\frac{x+2}{3x} : \frac{x^2-4}{6x^2}$

i. $\left(\frac{1}{x^2-9} + \frac{1}{x-3}\right) : \left(1 + \frac{3}{x-3}\right)$

j. $\left(\frac{5}{x^2-16} - \frac{2}{x+4}\right) : \left(3 - \frac{4}{x+4}\right)$

k. $\left(\frac{2x}{x^2-4x+4} - \frac{3}{x-2}\right) \div \left(\frac{x+1}{x-2} - \frac{5}{x^2-4}\right)$

Trabajo Práctico - Ejercicios adicionales con respuestas

Ejercicio 1. Calcule el valor de $k \in \mathbb{R}$ sabiendo que $Q(x) = x - 5$ divide a $P(x) = kx^3 + x^2 - k$. **Solución:** $k = -\dfrac{25}{124}$

Ejercico 2. Encuentren, si existe, un polinomio $M(x)$ que verifique:

a. $3x^5 - 6x^4 - 3x + 6 = M(x) \cdot (x^3 - 2x^2 + x - 2)$
Solución: $M(x) = 3x^2 + 0x + 3$

b. $x^5 - x^4 - 16x + 16 = M(x) \cdot (-2x^2 + x)$
Solución: No existe $M(x)$ que cumpla la igualdad

Ejercicio 3. Factorice las siguientes expresiones

a. $x^5 + 32 = (x+2)(x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16)$

b. $-8a^3b^3 + 4ab^8 + 16a^5b = -4ab\,(2a^2b^2 - b^7 - 4a^4) = 4ab\,(-2a^2b^2 + b^7 + 4a^4)$

c. $36 - 25a^2 = (6 - 5a)(6 + 5a)$

d. $ap + aq + bp + bq = (a+b)(p+q)$

e. $x^2 - 8x + 16 = (x-4)^2$

f. $\frac{1}{8}x^6 + \frac{3}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2 + 1 = \left(\frac{1}{2}x^2 + 1\right)^3$

g. $cd - 4d + 5c - 20 = (c-4)(d+5)$

h. $16x^2 - 25y^2 = (4x - 5y)(4x + 5y)$

i. $\frac{1}{6}c^4 - \frac{1}{9}c^3 - \frac{1}{12}c^2 + \frac{2}{3}c = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}c^3 - \frac{1}{3}c^2 - \frac{1}{4}c + 2\right)$

j. $4m^4n^2 - 8mn^2 + 14m^5n^4 = 2mn^2\,(2m^3 - 4 + 7m^4n^2)$

k. $x^3 - 9x^2 + 27x - 27 = (x-3)^3$

l. $144 - x^2y^2 = (12 - xy)(12 + xy)$

m. $-xz - 5 + 5z + x = (5 - x)(z - 1)$

n. $y^5 - 1 = (y-1)(y^4 + y^3 + y^2 + y + 1)$

o. $\frac{4}{3}x - \frac{10}{3}y = \frac{2}{3}(2x - 5y)$

p. $ax + cy - bx + ay + cx - by = (a - b + c)(x + y)$

q. $36a^2 - 12a + 1 = (6a - 1)^2$

r. $16a^2b^4 + \frac{1}{9}x^6 - \frac{8}{3}ab^2x^3 = (4ab^2 - \frac{1}{3}x^3)^2$

s. $z^4 - 1 = (z-1)(z^3 + z^2 + z + 1)\delta(z+1)(z^3 - z^2 + z - 1)$

t. $-27a^2b^6 - 9a^2b^4 - a^2b^3 - 27a^2b^5 = (-3a^4b^2 - a^4b)^3$

u. $\frac{1}{4}t^2 + \frac{t}{3} - \frac{1}{9} =$ no puede factorizarse

v. $x^6 + 1$ no es factorizable

Ejercicio 4. Factorice totalmente la expresión.
Ayuda: empiece por factorizar la potencia más baja de cada factor común.

a. $x^{5/2} - x^{1/2} = \frac{1}{x^2}(x+1)(x-1)$

b. $x^{-3/2} + 2x^{-1/2} + x^{1/2} = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{(1-2x^2+x^1)} = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{(x-1)^2}$

c. $2x^{1/3}(x-2)^{2/3} - 5x^{4/3}(x-2)^{-1/3} = \frac{x^{\frac{1}{3}}}{(x-2)^{\frac{1}{3}}}[2(x-2)-5x] = \frac{x^{\frac{1}{3}}}{(x-2)^{\frac{1}{3}}}(-4-3x)$

Ejercicio 5. Simplifique la expresión.
Nota: Encontrarás expresiones similares en Cálculo I / Elementos de Cálculo I

a.
$$\frac{(x+h)^{-3} - x^{-3}}{h} = \frac{3x^2 + 3xh + h^2}{x^3(x+h)^3}$$

b.
$$\frac{1-(x+h)}{2+(x+h)} - \frac{1-x}{2+x} = \frac{-x^2 + 2x - xh - 3h}{h(2+x)(2+x+h)}$$

c.
$$\frac{3(x+2)^2(x-3)^2 - (x+2)^3(2)(x-3)}{(x-3)^4} = \frac{(x+2)^2[3(x-3)+2(x+2)]}{(x-3)^3}$$

d.
$$\frac{2(1+x)^{1/2} - x(1+x)^{-1/2}}{x+1} = \frac{(x+1)^{1/2}(2-x)}{x+1}$$

e.
$$\frac{(1-x^2)^{1/2} - x^2(1-x^2)^{-1/2}}{1-x^2} = \frac{(1-x^2)^{1/2}(1-2x^2)}{1-x^2}$$

Bibliografía

- Altman, S.; y Otros (2001): Matemática, Buenos Aires, Longseller.
- Larson, R y Otros. (2012). Precálculo (8va. ed.) México D. F., Cengage Learning Editores S.A. de C.V.
- Stewart, J y Otros. (2001). Precálculo (6ta ed.) México D. F., International Thomson Editores, S.A.
- Sullivan, M. (1997): Precálculo, (4ta ed.) , México, Pearson Educación, Prentice Hall, Addison Wesley. Faires, D