Unidad 1

Nociones de Conjuntos. Conjuntos numéricos

En este apunte los estudiantes encontrarán contenidos básicos de:

- Teoría de Conjuntos
- Conjuntos Numéricos, haciendo énfasis en el Conjunto de los Números Reales.
- Propiedades de los Números Reales.
- Operaciones en $\mathbb{R}$
- Propiedades de las Operaciones.
- Una breve referencia a las operaciones con fracciones.
- Exponenciales.
- Radicales.

Índice

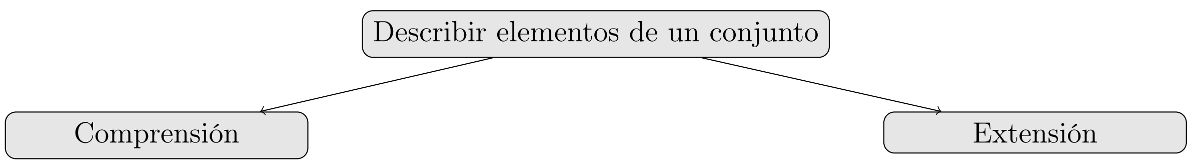
1 Teoría de conjuntos

Las bases de la Teoría de Conjuntos como la conocemos surge con Georg Cantor (1845-1918), un matemático Alemán que propone un estudio ordenado y sistemático de la idea de "conjuntos" para evitar ambigüedades.
A inicios del siglo XX (1910-1913) la teoría de Cantor obtuvo el auxilio inestimable del matemático, filósofo y sociólogo inglés Beltrand Russell, que ayudó a eliminar algunas de las paradojas de la teoría de los conjuntos de Cantor. Su trabajo hizo ver que hay una jerarquía de infinitos, cada uno "mayor" que su precedente. Su teoría es una de las piedras angulares de la matemática.
Presentamos los aspectos centrales de su teoría

- El concepto de conjunto es uno de los más fundamentales en matemáticas, incluso más que la operación de contar, pues se puede encontrar implícita o explícitamente, en todas las ramas de las matemáticas puras y aplicadas.
- En su forma explícita, los principios y terminología de la Teoría de Conjuntos se utilizan para construir proposiciones matemáticas más claras y precisas y para explicar conceptos abstractos como el infinito.
- No puede darse una definición satisfactoria de un conjunto en términos de conceptos simples, por lo tanto, la palabra "CONJUNTO" debe aceptarse lógicamente como un término no definido.

Definiciones y notación

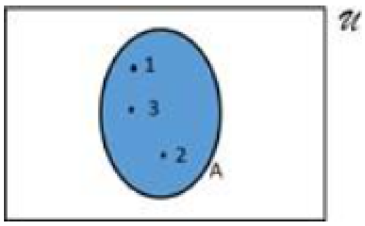
1. Podemos decir que un **conjunto** es cualquier colección de objetos, individuos o entes.
2. Todo objeto que integra un conjunto recibe el nombre de **elemento** del conjunto.
3. Por convención, los conjuntos los designamos con letra mayúscula A, B, C, X, Y,.... Mientras que a sus elementos los escribimos con letras minúsculas, números, símbolos, signos específicos, nombres, etc.



4. Los elementos se encierran entre llaves y se separan por una coma o punto y coma. Por ejemplo:
Por **extensión**, tenemos $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$
Por **comprensión**, tenemos $A = \{x/x \text{ es un número natural impar y } x \leq 9\}$
5. Como el número 3 es un elemento del conjunto A, lo escribimos como $3 \in A$.
En cambio, como el número 2 no pertenece a A, lo representamos como $2 \notin A$.
Para finalizar presentamos dos conjuntos especiales:

6. El conjunto **vacío**, que escribimos con el símbolo $\emptyset$. Es el conjunto que no tiene ningún elemento. Otra forma alternativa de representarlo es $\emptyset = \{\}$
7. El conjunto **referencial** o **universal**. Es el conjunto que contiene a todos los elementos que estamos considerando. En nuestro caso generalmente será $\mathbb{R}$; salvo que se indique otra cosa.

Representación gráfica Los conjuntos se pueden representar gráficamente mediante un esquema conocido como Diagrama de Euler-Venn. Así, el conjunto $A = \{1, 2, 3\}$ se puede representar:



El Diagrama de Euler-Venn tiene algunas normas que deben seguirse rigurosamente. A saber:

- Siempre el conjunto debe enmarcarse en un recinto rectangular que representa al conjunto Universal o de referencia.
- Los elementos, por convención, deben figurar indicados con un punto y junto a éste, nombrarlo.
- El nombre del conjunto se escribe fuera de él, para que no sea confundido con un elemento.

Subconjuntos

Consideremos los conjuntos A = {1, 3, 5} y B = {1, 2, 3, 4, 5}. Los elementos de A: 1, 3 y 5, también pertenecen a B, o sea, también son elementos de B. Decimos entonces que A es un **subconjunto** de B, o que A está **incluido** en B.
Podemos generalizar esta idea y *definir* subconjunto como sigue: un conjunto A es un subconjunto del conjunto B si todo elemento de A pertenece a B, o sea, es también un elemento de B.
Usamos la siguiente notación $A \subseteq B$. Es importante notar el orden en que lo leemos, y la orientación del símbolo.

Igualdad entre conjuntos

Dos conjuntos son iguales si tienen los mismos elementos. El orden de los elementos o la repetición de uno o más de ellos no influye. Podemos decir entonces que dos conjuntos son iguales si se incluyen mutuamente, es decir:

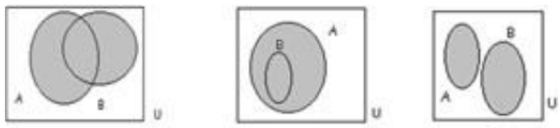
$$A = B \iff A \subset B \text{ y } B \subset A$$

Por todo lo expuesto en la sección anterior, esta proposición puede leerse: "A es igual a B, sí y sólo sí, A está incluido en B y B está incluido en A" El símbolo $\subset$ se lee también como: "incluido", es semejante al símbolo $\subseteq$, sólo que en este caso se admite, de base, la posibilidad de la igualdad entre ambos conjuntos.

Operaciones entre conjuntos

Unión

Si tenemos dos conjuntos A y B. La unión de A con B es el conjunto cuyos elementos pertenecen a A **o** pertenecen a B. Lo simbolizamos como: $A \cup B$. Por lo tanto, para que un elemento pertenezca a la unión de dos o más conjuntos, es suficiente que pertenezca a uno de los conjuntos en cuestión. Podemos representar gráficamente las diferentes situaciones que pueden darse.



$A \cup B$ $\quad$ $A \cup B = A$ $\quad$ $A \cup B$

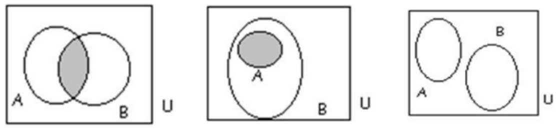
Por ejemplo, para los conjuntos A = {1, 3, 5} y B = {1, 2, 3, 4, 5} tenemos que $A \cup B$= {1, 2, 3, 4, 5}

Propiedades de la unión
La unión de conjuntos tiene una serie de propiedades, listamos las principales; a modo informativo:

1. $A \cup \emptyset = A$
2. $A \cup A = A$
3. Si $A \subseteq B$ entonces $A \cup B = B$

Intersección

Si tenemos dos conjuntos A y B. La intersección de A y B es el conjunto cuyos elementos pertenecen a A **y también** pertenecen a B. Lo simbolizamos como: $A \cap B$. Por lo tanto, para que un elemento pertenezca a la intersección de dos o más conjuntos, es necesario que pertenezca a todos de los conjuntos en cuestión.



$A \cap B$ $\quad$ $A \cap B = A$ $\quad$ $A \cap B = \emptyset$

En el último caso de la imagen decimos que los conjuntos A y B son **conjuntos disjuntos** o **mutuamente excluyentes**. Por ejemplo, para los conjuntos $A = \{n/n \leq 11\}$ y P ={p/p es un número primo}, tomando como referencia el conjunto de los números naturales, tenemos que $A \cap P$={2, 3, 5, 7, 11}

Propiedades de la intersección
De la misma forma presentamos las principales propiedades de la intersección:

1. $A \cap \emptyset = \emptyset$
2. $A \cap A = A$
3. Si $A \subseteq B$ entonces $A \cap B = A$

Trabajo Práctico
Ejercicio 1. Dados los conjuntos:

- $A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, \ldots\}$
- $B = \big\{x \in \mathbb{N} \mid 1 < x \leq 10\big\}$
- $C = \big\{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ es divisor de } 12\big\}$

Escribe por comprensión y por extensión si es posible:

a. $B \cup C$ b. $B \cap C$ c. $A \cap C$ d. $A \cap B$

---

2 Conjuntos numéricos

Los conjuntos numéricos se van ampliando a medida que se necesitan resolver ciertas problemáticas de la vida diaria. El conjunto de los **números naturales**, que simbolizamos $\mathbb{N}$ está constituido por los números 1, 2, 3, 4, 5, ... Es decir:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, ...\}$$

Los **números enteros**, que simbolizamos $\mathbb{Z}$ son los números naturales, junto con los negativos y el cero.

$$\mathbb{Z} = \{... - 3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$$

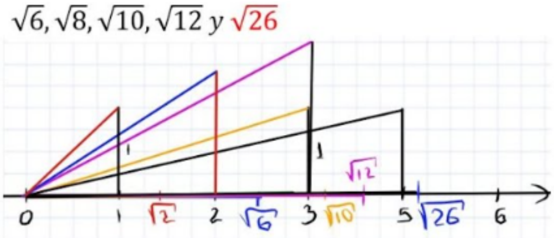
El conjunto de los números enteros unido al conjunto de todas las fracciones constituye el conjunto de los **números racionales**, al que denotamos por $\mathbb{Q}$. Y podemos definirlo como sigue:

> Un número racional $\frac{a}{b}$ es el cociente de dos números enteros a y b,
> con $b \neq 0$, siendo a el numerador y b el denominador.

Importante: Recuerde que una división entre 0 siempre se excluye, de modo que expresiones como $\frac{0}{0}$ y $\frac{3}{0}$ por ejemplo, no están definidas.
Todo número racional tiene una **representación decimal** por ejemplo:

- $\frac{1}{2} = 0,5$
- $\frac{2}{3} = 0,6666666 = 0,\hat{6}$
- $\frac{157}{495} = 0,3171717171... = 0,3\widehat{17}$
- $\frac{9}{7} = 1,285714285714... = 1,\widehat{285714}$

El arco en la parte superior indica que la sucesión de dígitos se repite infinitamente, llamada **periodo**.
Existen,en cambio números que no pueden ser escritos como cociente de dos números enteros, por ejemplo:



A estos números, se los llama Números **irracionales** y al conjunto se lo denota con el símbolo $\mathbb{I}$, aunque no se usa frecuentemente. Si el número es irracional, la representación decimal no es periódica. Otro ejemplo bien conocido es π, que conocemos de la relación entre el diámetro y la longitud de una circunferencia.

En esta unidad del curso no usaremos la expresión decimal de números irracionales, salvo indicación expresa. El objetivo es acostumbrarnos a trabajar con los números irracionales con su expresión exacta.

3 El conjunto de los números reales

La unión entre el conjunto de los números irracionales y los racionales nos da el conjunto de **números reales**; que simbolizamos con $\mathbb{R}$. Simbólicamente lo podemos representar

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

Trabajo Práctico
Ejercicio 2.En los Conjuntos siguientes determine cuáles números del conjunto son (a) números naturales, (b) números enteros, (c) enteros (negativos y positivos), (d) números racionales y (e) números irracionales.

a. $\{-9; -\frac{2}{3}; 5; \sqrt{2}, 0, 1; -4; 2; -11\}$

b. $\{25; -17; -\frac{12}{5}; \sqrt{-9}; 3,12; \frac{\pi}{2}; 7; -11,1; 13\}$

c. $\{\sqrt{5}; -7; -\frac{2}{3}; 0,3,12, \frac{5}{4}; -3; 12; 5\}$

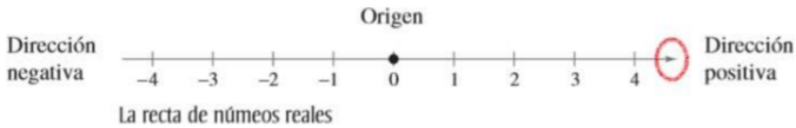
d. $\{2.01; 0.666\ldots; -13; 0.010110111\ldots; 1; -6\}$

e. $\{2,3030030003\ldots; 0,7575; -4.63; \sqrt{10}; -75; 4\}$

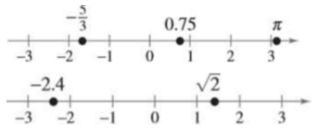
Ejercicio 3: Complete con $\in$ o $\notin$ para tener proposiciones verdaderas.

a. $-4 \dots \mathbb{Z}$	b. $-4 \dots \mathbb{Q}$	c. $1,5 \dots \mathbb{Q}$
d. $0 \dots \mathbb{Q}$	e. $\sqrt{9} \dots \mathbb{Z}$	f. $\sqrt{-16} \dots \mathbb{I}$
g. $\sqrt{-16} \dots \mathbb{R}$	h. $\sqrt{5} \dots \mathbb{R}$	i. $\frac{1}{4} \dots \mathbb{R}$

Los números reales se representan gráficamente sobre la recta de números reales. Al trazar un punto sobre la recta de números reales, estamos graficando el número real. El punto 0 sobre la recta de números reales es el origen. Los números a la derecha del 0 son positivos y a la izquierda son negativos, como se ve en la siguiente figura. El término no negativo describe un número que es positivo o cero.



Hay una correspondencia biunívoca entre números reales y puntos sobre la recta de números reales.

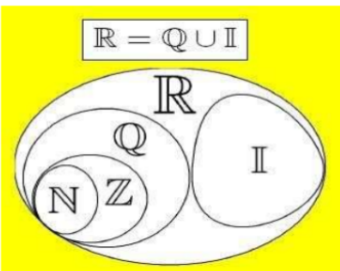


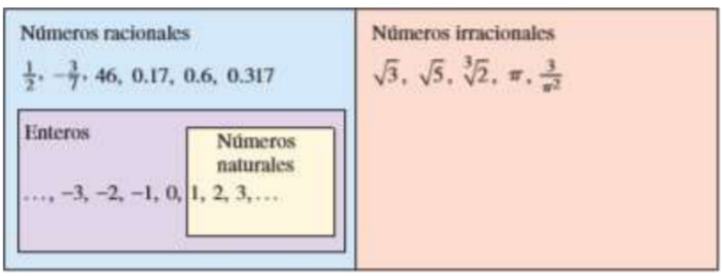
- Todo número real corresponde exactamente a un punto sobre la recta de números reales.
- Todo punto sobre la recta de números reales corresponde exactamente a un número real.

Trabajo Práctico
Ejercicio 4. Represente los siguientes números en la recta numérica.

a. $-\frac{7}{4}$	b. $2,3$	c. $\frac{2}{3}$	d. $-1,8$

Esquemáticamente, mediante Diagrama de Euler-Venn, podemos representar a $\mathbb{R}$ así:



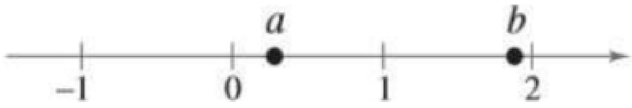


El conjunto de los Números Reales se caracteriza por las siguientes propiedades:

- Es **infinito**.
- Es **ordenado**.
- **No** tiene primer elemento.
- **No** tiene último elemento.
- Entre dos números reales existen infinitos números reales, por eso se dice que el conjunto de los reales es **denso**.

Orden de los números reales

Una propiedad importante de los números reales es que tienen un orden. Por ser un conjunto ordenado decimos que a es menor que b y escribimos $a < b$ si $b - a$ es un número positivo. Geométricamente a se encuentra a la izquierda de b en la recta real.



Una forma equivalente de $a < b$ es $b > a$ y se lee "b es mayor que a" . El símbolo "$a \leq b$" se lee: "a es menor o igual que b" y significa que $a < b$ o $a = b$

Trabajo Práctico
Ejercicio 5. Compare los siguientes números reales.

$a.\ 3 \ldots \frac{7}{2}$ $\qquad b.\ -3 \ldots -\frac{7}{2}$ $\qquad c.\ 3,5 \ldots \frac{7}{2}$

$d.\ 0.67 \ldots 0.677$ $\qquad e.\ \frac{2}{3} \ldots 0.67$ $\qquad f.\ -1 \ldots 0$

Ejercicio 6. Describa el subconjunto de números reales representado por cada desigualdad.

a. $x \leq 2$ c. $x \leq 5$ e. $-2 < x < 2$ g. $-1 \leq x < 0$

b. $-2 < x \leq 3$ d. $x \geq -2$ f. $0 \leq x \leq 5$ h. $0 < x \leq 6$

Ejercicio 7. Represente simbólicamente cada desigualdad.

a. x es postivivo

b. t es menor que 4

c. a es mayor o igual que π

d. La distancia entre p y 3 es como mucho 5

e. x es mayor que -5 y menor $\frac{1}{3}$

Intervalos

Ciertos conjuntos de números reales, llamados intervalos, se presentan con frecuencia en Cálculo y corresponden geométricamente a segmentos de recta.
Si $a < x < b$, entonces el intervalo abierto de a hasta b está formado por todos los números entre ayb y se denota con (a, b). El intervalo cerrado de a hasta b incluye los puntos extremos y se denota con $[a, b]$. Usando la notación de conjuntos, podemos escribir:

$$(a, b) = \{x \mid a < x < b\}; \quad [a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$$

Y los representamos gráficamente Los intervalos también pueden incluir un punto

;

extremo, pero no el otro, o pueden extenderse hasta el infinito en una dirección, o en ambas. La tabla siguiente es una lista de posibles tipos de intervalos.

Notación	**Descripción de conjunto**	**Representación**
(a, b)	$\{x \mid a < x < b\}$	
$[a, b]$	$\{x \mid a \leq x \leq b\}$	
$[a, b)$	$\{x \mid a \leq x < b\}$	
$(a, b]$	$\{x \mid a < x \leq b\}$	
$(a, +\infty)$	$\{x \mid x > a\}$	
$[a, +\infty)$	$\{x \mid x \geq a\}$	
$(-\infty, b)$	$\{x \mid x < b\}$	
$(-\infty, b]$	$\{x \mid x \leq b\}$	
$(-\infty, +\infty)$	$\mathbb{R}$	

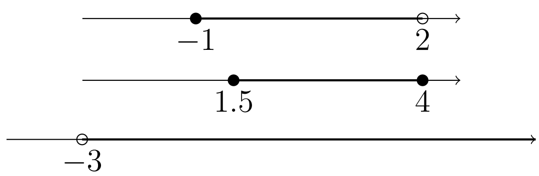
El símbolo ∞(infinito) no representa un número. La notación (a, ∞), por ejemplo, simplemente indica que el intervalo no tiene punto extremo a la derecha pero que se prolonga hasta el infinito en la dirección positiva.

Ejemplo: Gráfico de intervalos.
Exprese cada intervalo en términos de desigualdades y, a continuación, grafique el intervalo.

a. $[-1, 2) = \{x \mid -1 \leq x < 2\}$

b. $[1.5, 4] = \{x \mid 1.5 \leq x \leq 4\}$

c. $(-3, \infty) = \{x \mid -3 < x\}$



Ejemplo: Uniones e intersecciones de intervalos.
Grafique cada conjunto.

a. $(1, 3) \cap [2, 7]$

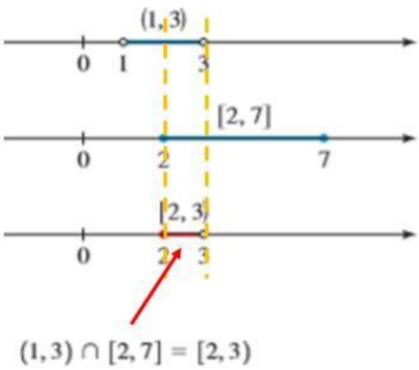
La intersección de dos intervalos consta de los números que están en ambos intervalos. Por lo tanto:

$$(1, 3) \cap [2, 7] = \{x/1 < x < 3; 2 \leq x \leq 7\}$$

Es decir

$$(1, 3) \cap [2, 7] = \{x/2 \leq x < 3\} = [2, 3)$$

Gráficamente:



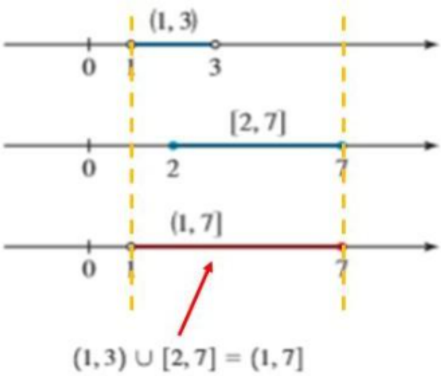
b. $(1, 3) \cup [2, 7]$ La unión de dos intervalos consta de los números que están en un intervalo o en el otro (o en ambos). Por lo tanto:

$$(1, 3) \cup [2, 7] = \{x/1 < x < 3 \ \textbf{ó} \ 2 \leq x \leq 7\}$$

Es decir

$$(1, 3) \cup [2, 7] = \{x/1 < x \leq 7\} = (1, 7]$$

Gráficamente



Trabajo Práctico
Ejercicio 8. Exprese la desigualdad con notación de intervalos, y después grafique el intervalo.

$$a.\ x \leq -1 \quad b.\ -2 < x \leq 1 \quad c.\ x > -5 \quad d.\ -5 < x < 2$$

Ejercicio 9. Grafique los siguientes conjuntos.

$$a.\ (-2,0] \cup (-1,1) \quad b.\ [-4,6] \cup [0,8) \quad c.\ (-\infty,6] \cap (2,10) \quad d.\ [-4,6] \cap [0,8)$$

4 Módulo o valor absoluto

Se llama módulo o valor absoluto de un número real a a la distancia que existe entre dicho número y el cero. Se simboliza $|a|$. Por el hecho de ser una distancia, el módulo nunca toma valores negativos.

Definición: Si a es un número real, $|a|$ se define:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si} \quad a \geq 0 \\ -a & \text{si} \quad a < 0 \end{cases}$$

Propiedades del valor absoluto

Propiedades	Ejemplos	Descripción
$\lvert a\rvert \geq 0$	$\lvert -2\rvert = 2 \geq 0$	El valor absoluto de un número siempre es positivo o cero.
$\lvert a\rvert = \lvert -a\rvert$	$\lvert 4\rvert = \lvert -4\rvert = 4$	Un número y su opuesto tienen el mismo valor absoluto.
$\lvert ab\rvert = \lvert a\rvert\lvert b\rvert$	$\lvert -2 \cdot 7\rvert = \lvert -2\rvert \cdot \lvert 7\rvert = 14$	El valor absoluto de un producto es igual al producto de los valores absolutos.
$\left\lvert \frac{a}{b} \right\rvert = \frac{\lvert a\rvert}{\lvert b\rvert}$	$\left\lvert \frac{8}{-5} \right\rvert = \frac{\lvert 8\rvert}{\lvert -5\rvert} = \frac{8}{5}$	El valor absoluto de un cociente es igual al cociente de los valores absolutos.

Importante
Recuerde que no se puede simplificar simplemente una raíz cuadrada, y en particular:

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

Ejemplo: valor absoluto

a. $|3| = 3$

b. $|-3| = 3$

c. $|0| = 0$

d. $|3-\pi| = -(3-\pi) = \pi - 3$ porque: $(3 < \pi) \Rightarrow (3 - \pi < 0)$

Trabajo Práctico
Ejercicio 10. Calcule cada una de las siguientes expresiones.

$a.\ \lvert 25\rvert =$	$b.\ \left\lvert -\frac{1}{2}\right\rvert =$	$c.\ \lvert\lvert -6\rvert - \lvert -3\rvert\rvert =$
$d.\ \lvert 3 - \lvert -5\rvert\rvert =$	$e.\ \lvert 15 \cdot (-3)\rvert =$	$f.\ \frac{\lvert -1\rvert}{-1} =$
$g.\ \frac{16-5}{5-16} =$	$h.\ \left\lvert \frac{1}{3} \cdot (-7)\right\rvert =$	$i.\ -3 - \lvert 3 - \lvert -3\rvert\rvert =$

---

5 Operaciones con números reales

En el Conjunto de los Números Reales hay dos operaciones definidas desde el Álgebra. Que son:

- **SUMA**: A cada par a y b de números reales, le asigna otro número real c, llamado suma y que se expresa: $c = a + b$
  Entendemos por el signo "+", la suma ordinaria aprendida en la escolarización primaria. (Existen otras sumas, que no vemos en este curso)

- **PRODUCTO**: A cada par a y b de números reales, le asigna otro número real c, llamado producto y que se expresa $c = a \cdot b$. Entendemos por el signo "·", el producto, o multiplicación ordinaria aprendida en la escolarización primaria. (Existen otros productos, que tampoco vemos en este curso)

La **RESTA** es la suma del opuesto, o sea:

$$a - b = a + (-b)$$

El símbolo usado para la **división**, llamado óbelo, es $(\div)$ o los dos puntos $(:)$. Si a es un número real distinto de 0, existe $\frac{1}{a}$, que también pertenece a $\mathbb{R}$ y se llama **inverso multiplicativo** de a. Entonces, consideramos la división $a \div b$, con $b \neq 0$, como la multiplicación de a por el inverso de b. Es decir:

$$a \div b = a \cdot \frac{1}{b}$$

$$a \div b = a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$$

Podemos resumir estas dos definiciones:

Sustracción: Sume el opuesto

$$a - b = a + (-b)$$

División: Multiplique por el recíproco
Si $b \neq 0$, entonces $\frac{a}{b} = a\left(\frac{1}{b}\right) = \frac{a}{b}$.
En estas definiciones, $-b$ es el **inverso aditivo** (u opuesto) de b, y $\frac{1}{b}$ es el **inverso multiplicativo** (o recíproco) de b. En la forma fraccionaria $\frac{a}{b}$, a es el **numerador** de la fracción y b es el **denominador**.

Propiedades de la suma y la multiplicación

Dados a, b y c números reales, analizaremos las propiedades de las operaciones.

Propiedades	**Ejemplo**	**Descripción**
Commutativas		
$a + b = b + a$	$5 + 8 = 8 + 5$	Cuando sumamos dos números, el orden no importa.
$a \cdot b = b \cdot a$	$3 \cdot 4 = 4 \cdot 3$	Cuando multiplicamos dos números, el orden no importa.
Asociativas		
$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(5 + 7) + 2 = 5 + (7 + 2)$	Cuando sumamos tres números, no importa cuáles dos sumamos primero.
$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$	$(5 \cdot 7) \cdot 2 = 5 \cdot (7 \cdot 2)$	Cuando multiplicamos tres números, no importa cuáles dos multiplicamos primero.
Distributivas		
$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$	$9 \cdot (4 + 2) = 9 \cdot 4 + 9 \cdot 2$	Cuando multiplicamos un número por una suma, es igual a multiplicar por cada término y luego sumar.
$(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$	$(4 + 2) \cdot 9 = 4 \cdot 9 + 2 \cdot 9$	Variante de la propiedad distributiva con el factor a la derecha.

Trabajo Práctico
Ejercicio 11. Aplique propiedades de las operaciones entre números reales para escribir las expresiones sin paréntesis.

a. $(a - b)8$ *b.* $4(2m)$ *c.* $-\frac{5}{2}(2x - 4y)$

d. $3a(b + c - \frac{1}{3}d)$ *e.* $\frac{4}{3}(-6y)$ *f.* $(15x - 6) \cdot (-3)$

El número 0 es especial para la adición; recibe el nombre de identidad aditiva (o neutro) porque $a + 0 = a$ para cualquier número real a. Todo número real a tiene un negativo, a, que satisface $a + (-a) = 0$.

Propiedades del 0

Propiedad	**Expresión**	**Descripción**
Identidad aditiva	$a + 0 = a$	Conservación del valor al sumar cero.
Inverso del cero	$a - 0 = a$	Sustracción de cero no altera el valor.
Multiplicación por cero	$a \cdot 0 = 0$	Resultado siempre cero.
División idéntica	$\frac{a}{a} = 1$	Unidad en división consigo mismo $(a \neq 0)$.
Indefinición	$\frac{a}{0}$	Operación no definida matemáticamente.
Factor cero	$a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$	Implicación de anulación en productos.

6 Repaso de las operaciones con números reales

Suma de fracciones con igual denominador

La suma de varias fracciones con igual denominador es la fracción con el mismo denominador que aquellas y el numerador es la suma de los numeradores.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a + c}{b}$$

Ejemplo:

$$\frac{4}{3} + \frac{7}{3} = \frac{4 + 7}{3} = \frac{11}{3}$$

Suma o resta de fracciones con distinto denominador

Si las fracciones tienen distinto denominador, se buscan fracciones equivalentes a las dadas que tengan igual denominador y después se suman de la forma indicada anteriormente.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad + bc}{bd}$$

Ejemplo:

$$\frac{2}{3}+\frac{5}{4}=\frac{8}{12}+\frac{15}{12}=\frac{8+15}{12}=\frac{23}{12}$$

Multiplicación de fracciones

El producto de varias fracciones es otra fracción que tiene como numerador el producto de los numeradores y como denominador el producto de los denominadores.
Es recomendable simplificar antes, siempre que sea posible.

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$$

Ejemplo:

$$\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{3\cdot 1}{2\cdot 4}=\frac{3}{8}$$

División de fracciones

La división entre dos fracciones es otra fracción que surge al multiplicar la primera fracción por la inversa de la segunda fracción.
Una fracción $\frac{a}{b}$ tiene inverso multiplicativo $\Leftrightarrow a\neq 0$ y su inverso es $\frac{b}{a}$.
Luego:

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$$

Ejemplo:

$$\frac{4}{3}\div\frac{1}{5}=\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{1}=\frac{20}{3}$$

Trabajo Práctico
Ejercicio 12. Resuelva cada una de las operaciones, sin usar calculadora.

a. $\frac{2}{3}-\frac{3}{5}$ *b.* $\frac{2}{3}\left(6-\frac{3}{2}\right)$ *c.* $\left(3+\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{4}{5}\right)$

f. $\frac{2}{3}-\frac{2/3}{2}$ *g.* $\frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{8}-\frac{1}{9}}$ *h.* $\frac{2-\frac{3}{4}}{0.5-\frac{1}{3}}$

---

7 Exponentes enteros

Notación exponencial

Normalmente, un producto de números idénticos se escribe en notación exponencial. Por ejemplo: $4\cdot 4\cdot 4\cdot 4\cdot 4$ se escribe 4^5.
Podemos definir entonces a la potencia:

Si a es cualquier número real y n es un entero positivo, entonces la n-ésima potencia de a es

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n \text{ factores}}$$

El número a se denomina base, y n se denomina exponente.

Leyes de los exponentes

Nombre propiedad	Propiedad	Explicación
Producto de potencias	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	Para multiplicar dos potencias de la misma base, se suman los exponentes.
Cociente de potencias	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	Para dividir dos potencias de la misma base, se restan los exponentes.
Potencia de una potencia	$(a^m)^n = a^{mn}$	Para elevar una potencia a otro exponente, se multiplican los exponentes.
Potencia de un producto	$(ab)^n = a^n b^n$	La potencia de un producto es igual al producto de las potencias de cada factor.
Potencia de un cociente	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	La potencia de un cociente es igual al cociente de las potencias del numerador y denominador.

Importante: Note la diferencia entre expresiones como $(-2)^4$ y -2^4. En $(-2)^4$, el paréntesis indica que el exponente se aplica al signo negativo al igual que al 2, pero en -2^4, el exponente se aplica sólo al 2. Por tanto $(-2)^4 = 16$, y $-2^4 = -16$.

- **El signo negativo es parte de la base** $\rightarrow (-a)^n$
- **El signo negativo no es parte de la base** $\rightarrow -a^n$

Ejemplo

a. $(-5)^2 = (-5)(-5) = 25$

b. $-5^2 = -(5)(5) = -25$

c. $2 \cdot 2^4 = 2^{1+4} = 2^5 = 32$

d. $\frac{4^4}{4^6} = 4^{4-6} = (4)^{-2} = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}$

Exponentes cero y negativos

Si $a \neq 0$ es cualquier número real y n es un entero positivo, entonces

$$a^0 = 1 \quad \text{y} \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Ejemplo: Evaluar expresiones exponenciales
Evalúe cada una de las expresiones algebraicas cuando $x = 3$

a) $5x^{-2}$

b) $\frac{1}{3}(-x)^3$

Veamos el caso: $5x^{-2}$
Cuando $x = 3$, la expresión $5x^{-2}$ tiene un valor de

$$5x^{-2} = 5(3)^{-2} = \frac{5}{3^2} = \frac{5}{9}$$

Y para $\frac{1}{3}(-x)^3$
Cuando $x = 3$, la expresión $\frac{1}{3}(-x)^3$ tiene un valor de

$$\frac{1}{3}(-x)^3 = \frac{1}{3}(-3)^3 = \frac{1}{3}(-27) = -9$$

Ejemplo 1: Use las propiedades de los exponentes para simplificar cada expresión.

a. $(-3ab^4)(4ab^{-3})$

b. $(2xy^2)^3$

c. $3a(-4a^2)^0$

d. $\left(\frac{5x^3}{y}\right)^2$

Veamos cada caso:

a.$(-3ab^4)(4ab^{-3})$

$$(-3ab^4)(4ab^{-3}) = (-3)(4)(a)(a)(b^4)(b^{-3}) = -12a^2b$$

b. $(2xy^2)^3$

$$(2xy^2)^3 = 2^3(x)^3(y^2)^3 = 8x^3y^6$$

c. $3a(-4a^2)^0$

$$3a(-4a^2)^0 = 3a(1) = 3a, \quad a \neq 0$$

d. $\left(\frac{5x^3}{y}\right)^2$

$$\left(\frac{5x^3}{y}\right)^2 = \frac{5^2(x^3)^2}{y^2} = \frac{25x^6}{y^2}$$

Ejemplo 2: Reescriba cada expresión usando exponentes positivos

a. x^{-1} b. $\frac{1}{3x^{-2}}$ c. $\frac{12a^3b^{-4}}{4a^{-2}b}$ d. $\left(\frac{3x^2}{y}\right)^{-2}$

Veamos cada caso:

a. $x^{-1} = \frac{1}{x}$

b. $\frac{1}{3x^{-2}} = \frac{x^2}{3}$

c. $\frac{12a^3b^{-4}}{4a^{-2}b} = \frac{3a^5}{b^5}$

d. $\left(\frac{3x^2}{y}\right)^{-2} = \frac{y^2}{9x^4}$

Cuando simplifique una expresión, encontrará que muchos métodos diferentes llevarán al mismo resultado; puede usarse cualquiera de las **reglas válidas** de exponentes para llegar al resultado.

Trabajo Práctico
Ejercicio 13. Simplifique cada expresión, elimine exponentes negativos y escriba la forma final con exponentes positivos. (Suponga que todas las variables representan números positivos)

(a) $\dfrac{6x^{2-4}}{2x^2+2}$

(b) $\left(\dfrac{y}{3x^3}\right)^{-2}$

(c) $3y^2(4y^5)$

(d) a^9a^{-6}

(e) $\dfrac{x^{-3}y^4}{x^{-5}y^5}$

(f) $(ab)^3(2c)^{-2}(4a)^4$

(g) $\dfrac{(6y^3)^4}{2y^5}$

(h) $\left(\dfrac{a^{-1}bc^{-2}}{a^{-5}bc^{-8}}\right)^{-1}$

(i) $\dfrac{(xy^2z^3)^4}{(x^3y^2z)^3}$

(j) $\left(\dfrac{x}{10}\right)^{-1}$

(k) $(2x^2)^{-2}$

(l) $(-2x^2)^3(4x^3)^{-1}$

(m) $3^{-n} \cdot 3^{2n}$

(n) $\left(\dfrac{a^{-3}}{b^{-3}}\right) \cdot \left(\dfrac{a}{b}\right)^3$

(o) $\left(\dfrac{2a^3b^{-2}}{3a^{-4}b^5}\right)^{-3}$

---

8 Radicación

La raíz cuadrada de un número es uno de sus dos factores iguales. Por ejemplo, 5 es la raíz cuadrada de 25, ya que 25 puede ser escrito

$$25 = 52 = 5 \cdot 5$$

En forma semejante, una raíz cúbica de un número es uno de sus tres factores iguales, como en

$$125 = 5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5$$

Y decimos que la raíz cúbica de 125 es 5.
Definición de raíz n-ésima

Sean a y b números reales y sea $n \geq 2$ un entero positivo. Si

$$a = b^n$$

Entonces b es una **raíz n-ésima** de a. Si $n = 2$, la raíz es una **raíz cuadrada**. Si $n = 3$, la raíz es una **raíz cúbica**.

Algunos números tienen más de una raíz n-ésima. Por ejemplo, tanto 5 como (-5) son raíces cuadradas de 25. La raíz cuadrada principal de 25, escrita como $\sqrt{25}$, es la raíz positiva, 5. La n-ésima raíz principal de un número se define como sigue.

Sea a un número real que tiene al menos una raíz n-ésima. La raíz **n-ésima principal de** a es la que tiene el mismo signo que a. Se denota con el **símbolo radical**

$$\sqrt[n]{a} \quad n\text{-ésima raíz principal}$$

El entero positivo n es el **índice** del radical, y el número a es el **radicando**. Si $n = 2$, omita el índice y escriba $\sqrt{a}$ en lugar de $\sqrt[2]{a}$.

Un **error** común es que el signo de raíz cuadrada implica raíces tanto negativas como positivas. Esto no es correcto. El signo de raíz cuadrada implica sólo una raíz positiva. Cuando se hace necesaria una raíz negativa, se debe usar el signo negativo con el signo de raíz cuadrada.

Incorrecto: $\sqrt{4} = \pm 4$ Correcto: $-\sqrt{4} = -2$ y $\sqrt{4} = 2$

Ejemplo

a. $\sqrt{36} = 6$ porque $6^2 = 36$

b. $-\sqrt{36} = -6$ porque $-\left(\sqrt{36}\right) = -\sqrt{6^2} = -(6) = -6$

c. $\sqrt[3]{\frac{125}{64}} = \frac{5}{4}$ porque $\left(\frac{5}{4}\right)^3 = \frac{5^3}{4^3} = \frac{125}{64}$

d. $\sqrt[5]{-32} = -2$ porque $(-2)^5 = -32$

e. $\sqrt[4]{-81}$ no es un número real porque no hay número real que pueda elevarse a la cuarta potencia para producir -81

Los enteros como $1, 4, 9, 16, 25$ y 36... se denominan cuadrados perfectos porque tienen raíces cuadradas enteras. O sea: $\sqrt{1} = 1$; $\sqrt{4} = 2$; $\sqrt{9} = 3$; $\sqrt{16} = 4$ y $\sqrt{25} = 5$ y en forma análoga los siguientes.
Del mismo modo, enteros como $1, 8, 27, 64$ y 125 se llaman cubos perfectos porque tienen raíces cúbicas enteras.

Propiedades de la radicación

Sean a y b números reales, variables o expresiones algebraicas tales que las raíces indicadas son números reales, y sean m y n enteros positivos.

Propiedad	**Ejemplo**	**Explicación**
$\sqrt[3]{a^m} = (\sqrt[3]{a})^m$	$\sqrt[3]{8^2} = 4$	La raíz cúbica de una potencia equivale a la potencia de la raíz.
$\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{ab}$	$\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{7} = \sqrt[3]{35}$	Producto de raíces cúbicas igual a raíz del producto.
$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$	$\sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{2}{3}$	Raíz cúbica de un cociente igual al cociente de raíces ($b \neq 0$).
$\sqrt[3]{\sqrt[3]{a}} = \sqrt[9]{a}$	$\sqrt[3]{\sqrt[3]{5}} = \sqrt[9]{5}$	Raíz cúbica anidada equivale a raíz nona (9-ésima).
$(\sqrt[3]{a})^3 = a$	$(\sqrt[3]{6})^3 = 6$	La potencia cúbica anula la raíz cúbica.
$\sqrt{a^n} = \lvert a \rvert$ **(n par)**	$\sqrt{(-21)^2} = 21$	Para exponentes pares, resultado es el valor absoluto.
$\sqrt[3]{a^n} = a$ **(n impar)**	$\sqrt[3]{(-8)^3} = -8$	Para exponentes impares, conserva el signo original.

Trabajo Práctico

Ejercicio 14. Calcule en cada caso:

a. $\sqrt{16}$

b. $\sqrt{64}$

c. $\sqrt[4]{16}$

d. $\sqrt[3]{-64}$

e. $\sqrt[5]{-32}$

f. $\dfrac{\sqrt{48}}{\sqrt{3}}$

g. $\sqrt{7}\sqrt{28}$

h. $\sqrt[4]{\dfrac{1}{16}}$

i. $\sqrt[4]{24}\sqrt[4]{54}$

Es importante tener en cuenta el siguiente tipo de errores muy comunes con potencias, raíces o exponentes en general:

Evite el siguiente error

$$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

Por ejemplo, si hacemos a=9 y b=16, entonces vemos el error:

$$\sqrt{9+16} \stackrel{?}{=} \sqrt{9} + \sqrt{16}$$

$$\sqrt{25} \stackrel{?}{=} \sqrt{9} + \sqrt{16}$$

$$5 \stackrel{?}{=} 3 + 4$$

$$5 \stackrel{?}{=} 7 \quad \text{¡¡¡Error!!!}$$

Simplificación

Una expresión que contenga radicales está en su forma más simple cuando se satisfacen las siguientes condiciones.

1. Todos los factores posibles han sido eliminados del radical.
2. Todas las fracciones tienen denominadores sin radicales (lo que se logra mediante un proceso llamado racionalización del denominador)
3. El índice del radical está reducido.

Para simplificar un radical, factorice el radicando en factores cuyos exponentes sean múltiplos del índice. Las raíces de estos factores se escriben fuera del radical y los factores "sobrantes" forman el nuevo radicando.
Ejemplo 1: Simplificar raíces pares

a. $\sqrt[4]{48} = \sqrt[4]{16 \cdot 3} = \sqrt[4]{2^4 \cdot 3} = 2\sqrt[4]{3}$

b. $\sqrt{75x^3} = \sqrt{25x^2 \cdot 3x} = \sqrt{(5x)^2 \cdot 3x} = 5x\sqrt{3x}$

c. $4\sqrt{(5x)^4} = 5|x|$

Ejemplo 2: Simplificar raíces impares

a. $\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{8 \cdot 3} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 3} = 2\sqrt[3]{3}$

b. $\sqrt[3]{24a^4} = \sqrt[3]{8a^3 \cdot 3a} = \sqrt[3]{(2a)^3 \cdot 3a} = 2a\sqrt[3]{3a}$

c. $\sqrt[3]{-40x^6} = \sqrt[3]{(-8x^6) \cdot 5} = \sqrt[3]{(-2x^2)^3 \cdot 5} = -2x^2\sqrt[3]{5}$

Trabajo Práctico
Ejercicio 15. Simplifique cada expresión.

a. $\sqrt{20}$
b. $\sqrt{\frac{16}{27}}$
c. $\sqrt{\frac{75}{4}}$
d. $(\sqrt[5]{2})^5$
e. $\sqrt[4]{(3x^2)^4}$
f. $\sqrt{3x^4y^2}$
g. $\sqrt{54xy^4}$
h. $\sqrt[3]{128}$
i. $\sqrt[5]{96x^5}$
j. $\sqrt[3]{16x^5}$
k. $\sqrt[5]{160x^8z^4}$
l. $\sqrt{12\sqrt{3}}$

Se pueden combinar expresiones radicales (sumadas o restadas) si son radicales semejantes, es decir, si tienen índices y radicando iguales. Por ejemplo, $\sqrt{5}$, $2\sqrt{5}$ y $\frac{2}{3}\sqrt{5}$ son radicales semejantes, pero $\sqrt{5}$ y $3\sqrt{6}$ no lo son. Para determinar si dos radicales se pueden combinar, primero se debe simplificar cada radical.

Ejemplo: Combinación de expresiones

a. $2\sqrt{48} - 3\sqrt{27}$

$= 2\sqrt{16 \cdot 3} - 3\sqrt{9 \cdot 3}$	Encontrar factores cuadrados
$= 8\sqrt{3} - 9\sqrt{3}$	Extraer raíces cuadradas
$= (8 - 9)\sqrt{3}$	Multiplicar por coeficientes
$= -\sqrt{3}$	Combinar términos iguales
	Simplificar

b. $\sqrt[3]{16x} - \sqrt[3]{54x^4}$

$= \sqrt[3]{8 \cdot 2x} - \sqrt[3]{27 \cdot x^3 \cdot 2x}$	Encontrar factores cúbicos
$= 2\sqrt[3]{2x} - 3x\sqrt[3]{2x}$	Extraer raíces cúbicas
$= (2 - 3x)\sqrt[3]{2x}$	Combinar términos iguales

Trabajo Práctico
Ejercicio 16. Simplifique cada expresión.

a. $10\sqrt{32} - 6\sqrt{18}$
b. $2\sqrt{50} + 12\sqrt{8}$
c. $75^{1/2} + 48^{1/2}$
d. $\sqrt{27} + 5\sqrt{3} - \sqrt{300}$
e. $-7\sqrt{80x} - 2\sqrt{125x}$
f. $\sqrt[5]{96} + \sqrt[5]{3}$
g. $\sqrt[4]{48} - \sqrt{\sqrt{3}}$
h. $\frac{3}{4}\sqrt{8a^3} - 5\sqrt[4]{64a^6}$
i. $5\sqrt{3} - 2\sqrt{6} \cdot (1 - \sqrt{8})$

Exponentes racionales

Si a es un número real y n es un número positivo tal que la n-ésima raíz principal de a existe, entonces $a^{1/n}$ se define como

$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a} \text{ donde } 1/n \text{ es el exponente racional de } a.$$

Además, si m es un entero positivo que no tenga factor común con n, entonces

$$a^{m/n} = (a^{1/n})^m = (\sqrt[n]{a})^m \quad \text{y} \quad a^{m/n} = (a^m)^{1/n} = \sqrt[n]{a^m}.$$

El numerador de un exponente racional denota la potencia a la que se eleva la base y el denominador denota el índice o la raíz que se toma. Al trabajar con exponentes racionales, también se aplican las propiedades de los exponentes enteros. Por ejemplo, $3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{5}{6}}$

Los exponentes racionales son útiles para reducir el índice, así como para simplificar expresiones.

Ejemplo:

a. $(x^2+y^2)^{3/2} = \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3 = \sqrt{(x^2+y^2)^3}$

b. $2y^{3/4}z^{1/4} = 2(y^3z)^{1/4} = 2\sqrt[4]{y^3z}$

c. $a^{-3/2} = \frac{1}{a^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{a^3}}$

d. $x^{0.2} = x^{1/5} = \sqrt[5]{x}$

e. $(-32)^{-4/5} = \left(\sqrt[5]{-32}\right)^{-4} = (-2)^{-4} = \frac{1}{(-2)^4} = \frac{1}{16}$

f. $(-5x^{5/3})(3x^{-3/4}) = -15x^{(5/3)-(3/4)} = -15x^{11/12},\ x \neq 0$

g. $\sqrt[3]{a^3} = a^{3/9} = a^{1/3} = \sqrt[3]{a}$

h. $\sqrt[3]{125} = \sqrt[6]{125} = \sqrt[7]{5} = 5^{3/6} = 5^{1/2} = \sqrt{5}$

Trabajo Práctico

Ejercicio 17. Escriba cada una de las expresiones con radicales usando exponentes y cada expresión exponencial usando radicales.

Expresión con radicales	**Expresión con exponentes**
$\frac{1}{\sqrt{5}}$	
$3\sqrt{15^2}$	
	$8^{2/3}$
	$11^{-1/2}$
$\sqrt[5]{a}$	

Ejercicio 18. Evalúe las siguientes expresiones sin calculadora:

a. $27^{1/3} =$

b. $\left(\frac{9}{4}\right)^{-1/2} =$

c. $32^{-3/5} =$

d. $\left(\frac{1}{\sqrt{32}}\right)^{-2/5} =$

e. $\left(-\frac{1}{64}\right)^{-1/3} =$

f. $\left(-\frac{125}{27}\right)^{-1/3} =$

g. $-\left(\frac{1}{125}\right)^{-4/3} =$

h. $100^{-3/2} =$

Ejercicio 19. Realice las operaciones y simplifique

a. $\dfrac{(2x^2)^{3/2}}{2^{3/2}x^4}$

b. $\dfrac{x^{4/3}y^{2/3}}{(xy)^{1/3}}$

c. $\dfrac{x^{-3}x^{1/2}}{x^{3/2}x^{-1}}$

d. $\dfrac{5^{-1/2} \cdot 5x^{5/2}}{(5x)^{3/2}}$

Ejercicio 20. Reduzca el índice de cada radical

a. $\sqrt[4]{32}$

b. $\sqrt[6]{(x+1)^4}$

c. $\sqrt[6]{x^3}$

d. $\sqrt[4]{(3x^2)^4}$

Ejercicio 21. Escriba como un solo radical y simplifique

a. $\sqrt[3]{\sqrt[3]{32}}$

b. $\sqrt[4]{\sqrt[3]{2x}}$

c. $\sqrt[3]{\sqrt[3]{243(x+1)}}$

d. $\sqrt[3]{\sqrt[3]{10a^7b}}$

Racionalización de denominadores y numeradores

Para racionalizar un denominador o numerador de la forma $a - b\sqrt{m}$ o $a + b\sqrt{m}$, multiplique numerador y denominador por un *conjugado*: $a + b\sqrt{m}$ y $a - b\sqrt{m}$ son conjugados entre sí.
Si $a = 0$, entonces el factor racionalizador para $\sqrt{m}$ es el mismo, $\sqrt{m}$. Para raíces cúbicas escoja un factor racionalizador que genere un cubo perfecto, y en forma análoga para otros índices.
Ejemplo: Racionalice el denominador en cada expresión:

a. $\dfrac{5}{2\sqrt{3}}$

b. $\dfrac{2}{\sqrt[4]{5}}$

Solución

a.
$$\begin{aligned}\frac{5}{2\sqrt{3}} &= \frac{5}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\\ &= \frac{5\sqrt{3}}{2(3)}\\ &= \frac{5\sqrt{3}}{6}\end{aligned}$$

$\sqrt{3}$ es el factor racionalizador.
Multiplicar numerador y denominador por el factor racionalizador.
Expresión racionalizada.

b.
$$\begin{aligned}\frac{2}{\sqrt[3]{5}} &= \frac{2}{\sqrt[3]{5}} \cdot \frac{\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^2}}\\ &= \frac{2\sqrt[3]{25}}{\sqrt[3]{125}}\\ &= \frac{2\sqrt[3]{25}}{5}\end{aligned}$$

$\sqrt[3]{5^2}$ es el factor racionalizador.
Multiplicar numerador y denominador por el factor racionalizador.
Expresión racionalizada.

Ahora veamos otro ejemplo

- Racionalizar la expresión: $\dfrac{2}{3+\sqrt{7}}$

Solución:

$$\begin{aligned}\frac{2}{3+\sqrt{7}} = \frac{2}{3+\sqrt{7}} \cdot \frac{3-\sqrt{7}}{3-\sqrt{7}} &= \frac{2(3-\sqrt{7})}{(3)^2-(\sqrt{7})^2}\\ = \frac{6-2\sqrt{7}}{9-7} = \frac{6-2\sqrt{7}}{2} &= 3-\sqrt{7}\end{aligned}$$

Trabajo Práctico

Ejercicio 22. Racionalice el denominador de la expresión

a. $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

b. $\sqrt{\dfrac{1}{2}}$

c. $\sqrt{\dfrac{5}{7}}$

d. $\dfrac{1}{y^{2/5}}$

e. $\dfrac{2x}{\sqrt{x}}$

f. $\dfrac{2}{\sqrt[3]{x}}$

g. $\dfrac{8}{a^{1/3}}$

h. $\dfrac{8}{\sqrt[4]{8}}$

i. $\dfrac{8}{\sqrt[3]{2}}$

j. $\sqrt[3]{\dfrac{8}{3}}$

k. $\dfrac{3}{\sqrt{5}-1}$

l. $\dfrac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{6}}$

m. $\dfrac{5}{\sqrt{14}-2}$

n. $\dfrac{5}{3\sqrt{2}-1}$

o. $\left(\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{-2}$

p. $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

Trabajo Práctico - Ejercicios adicionales

Ejercicio 1: Para cada item, represente cada conjunto según lo pedido:

a. Sean $A = \{-3; 0\}$ y $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -2 < x < 7\}$

Representa el conjunto $A \cup B$ como intervalo y en la recta numérica.

b. Sean $C = \{1; 3; 5; 7; 9; 11; 13; 15; 17; 19\}$ y $D = \{x \in \mathbb{N} \mid 7 \leq x < 15\}$

Escribe el conjunto $D \cap C$ en la notación más conveniente.

c. Teniendo en cuenta los conjuntos: $A = \{1; 3; 5\}$ y $A \cup B = \{1; 2; 3; 5\}$ .Elige las opciones que consideres correctas:

- $B = \{1; 3; 5\}$
- $B = \{1; 3; 2; 5; 7; 9\}$
- $A \cap B = \{1; 3\}$
- Ninguna de las restantes

Ejercicio 2: Calcule, sin usar calculadora

a. $5^2 \cdot (1/5)^3$

b. $(3/2)^{-2} \cdot \dfrac{9}{16}$

c. $(1/16)^{1/4}$

d. $\sqrt[3]{\dfrac{-1}{64}}$

e. $\dfrac{\sqrt[5]{-3}}{\sqrt[5]{96}}$

f. $\sqrt[7]{\dfrac{7}{\sqrt{28}}}$

Ejercicio 3: Indique verdadero (V) o falso (F)

a. $(a^2b^5) = (a \cdot b)^5$

b. $0^4 = 0$

c. $\left(\dfrac{13}{100}x^{-1}\right)^{-1} = 13x$

d. $(-3)^{-2} = \dfrac{1}{3}^{-2}$

e. $-(-4)^0 = -1$

f. $\sqrt{3}+\sqrt{3} = \sqrt{6}$

g. $\dfrac{3+5}{4} = \dfrac{3}{4}+\dfrac{5}{4}$

h. $[a(-b)]^2 = a^2b^2$

i. $(b/a)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a/b}$

j. $\dfrac{0}{5}=0$

k. $\dfrac{a}{a+b}=\dfrac{1}{b}$

l. $1+\dfrac{2a}{a+c}=\dfrac{3a+c}{a+c}$

m. $\dfrac{4a}{b}=\dfrac{4}{b}\cdot\dfrac{a}{b}$

n. $\dfrac{a}{c+d}=\dfrac{a}{c}+\dfrac{a}{d}$

o. $3x^2=x^2+x^2+x^2$

p. $\dfrac{b+c}{c}=\dfrac{b}{c}+1$

q. $\dfrac{5}{0}=0$

Ejercicio 4: Calcule el valor exacto, sin calculadora

a. $\left(\frac{-16}{2}+4\right):4-\left(\frac{2-5}{-4}\cdot 2+\frac{3}{2}\right)$

b. $\sqrt[3]{\left(\frac{5}{-15}+3^{-3}\right)}-2:\left|\frac{1}{4}-1\right|^{-1}$

c. $\frac{49}{5}:7+\left(3-\frac{11}{7}\right):\left(\frac{14}{49}+\frac{3}{7};\frac{7}{12}\right)$

d. $(-4):\left[\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^{-1}\right)^2\right]^{-2}=$

Ejercicio 5: Simplifique cada expresión y elimine los exponentes negativos. Suponga que todas las letras representan a números positivos.

a. $(c^3d)^{-1/3}$

b. $(-2a^{3/4})(5a^{3/2})$

c. $\left(\dfrac{x^6y}{y^4}\right)^{5/2}$

d. $\left(\dfrac{3a^{-2}}{4b^{-1/3}}\right)^{-1}$

e. $\sqrt[3]{\sqrt[3]{64x^6}}$

f. $(8x^3y^{-6})^{-2/3}$

g. $\dfrac{(a^{1/2}b^{-3})^4}{(a^{-2}b^5)^{1/2}}$

h. $\sqrt[4]{16x^8y^{-4}}$

i. $\left(\dfrac{2m^{-3}n^{5/2}}{3m^{-1}n^{-2}}\right)^4$

j. $(27a^{-6}b^9)^{1/3}$

k. $\sqrt[5]{\dfrac{32x^{10}}{y^{-15}}}$

l. $\left(\dfrac{x^{-2}y^{1/3}}{x^{4/3}y^{-1}}\right)^{-6}$

Ejercicio 6. Sin utilizar la calculadora, coloque $>, <$ o $=$, según corresponda:

a. $\frac{1}{625}\cdot\sqrt{625}$ _______ 1

b. $\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{8}$ _______ $\sqrt[4]{32}$

c. $\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{3}}:\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{2}{3}}$ _______ $\frac{1}{4}$

d. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ _______ $\frac{1}{\sqrt{5}}$

e. $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ _______ $\sqrt{2}+\sqrt{3}$

f. $\sqrt[3]{27}+\sqrt{16}$ _______ 5

Ejercicio 7. Decida cuál o cuáles de las siguientes expresiones son iguales a:

$$\frac{6^8\cdot 77^{10}}{33^8\cdot 121\cdot 7^{12}}$$

a) $7\cdot 11$ b) $128\cdot 6$ c) $2^8\cdot 3$ d) 2^8 e) $11^{10}\cdot 21^{12}$

Bibliografía

- Altman, S.; y Otros (2001): Matemática, Buenos Aires, Longseller.
- Larson, R y Otros. (2012). Precálculo (8va. ed.) México D. F., Cengage Learning Editores S.A. de C.V.
- Stewart, J y Otros. (2001). Precálculo (6ta ed.) México D. F., International Thomson Editores, S.A.
- Sullivan, M. (1997): Precálculo, (4ta ed.) , México, Pearson Educación, Prentice Hall, Addison Wesley. Faires, D