Movimiento de Proyectiles

Portillo, G.[1a] and Becerra, L.[1b]

[1] *Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad Nacional de Cuyo ,*
[a] *gustavoaportillo87@gmail.com* , [b] *becerramagisteriocn@gmail.com*

Desde la edad media el movimiento de los proyectiles fue ampliamente estudiado, debido a la relevancia que el mismo tenía por su contexto sociohistórico. Entre las mejores descripciones de la época se encuentra el estudio realizado por el matemático Niccolo Tartaglia.[1] No obstante, la mayor comprensión del fenómeno se obtuvo con el aporte realizado por Galilo Galilei.

Comenzaremos el estudio de este movimiento haciendo una suposición crucial: ***el aire no ofrece resistencia***. Si bien en la realidad esto no es cierto, los resultados obtenidos al tener en cuenta esta suposición son una excelente aproximación al movimiento real.

Con este supuesto la trayectoria del cuerpo tendrá lugar únicamente en dos dimensiones, es decir que el movimiento completo del proyectil resultará de una composición de los movimientos simultáneos en las direcciones vertical (***y***) y horizontal (***x***). Por lo tanto la cinemática del fenómeno quedará determinada por la combinación de las ecuaciones de movimiento en las direcciones mencionadas. Ahora bien, dado que el aire no ofrece resistencia, el movimiento en la dirección horizontal no sufre ningún tipo de aceleración o desaceleración, por lo que podemos concluir que en esta dirección el movimiento es del tipo *MRU*. De este modo la posición a todo tiempo estará dada por:

$$x\left(t\right) = x_0 + v_{ox}\left(t - t_0\right), \tag{1}$$

siendo x_0 la coordenada x de la posición del movil, y v_{0x} la velocidad inicial en la dirección horizontal.

Respecto de la componente vertical, si bien hemos despreciado la resistencia del aire, no podemos ignorar la aceleración debida a la gravedad, g, por lo que el movimiento que tiene lugar en esta dirección es del tipo *MRUV*, más precisamente,

[1]Siendo precisos, la publicación de Niccolo Tartaglia se realizó en el año 1537, 45 años después del fin de la edad media.

es un tiro vertical. Por consiguiente la ecuación de movimiento que describe la posición vertical del proyectil a todo tiempo será:

$$y\,(t) = y_0 + v_{oy}\,(t - t_0) - \frac{1}{2}g(t - t_0)^2, \tag{2}$$

donde y_0 es la coordenada y de la posición del móvil y v_{0y} es la velocidad inicial en la dirección vertical.

Como mencionamos anteriormente, el movimiento en ambas direcciones ocurre simultáneamente, esto implica que el tiempo empleado en el movimiento vertical es el mismo que el empleado en el movimiento horizontal. Es esta idea la que nos permite vincular las dos ecuaciones anteriores para obtener una expresión que describa al movimiento completo.

Al despejar el intervalo de tiempo, $(t - t_0)$, de la expresión Ec.(1) obtenemos:

$$t - t_0 = \frac{x - x_0}{v_{0x}} \tag{3}$$

Al introducir Ec.(3) en Ec.(2) encontramos la ecuación general de movimiento del proyectil, la cual está dada por:

$$y\,(x) = y_0 + \frac{v_{0y}}{v_{0x}}\,(x - x_0) - \frac{g}{2{v_{0x}}^2}(x - x_0)^2. \tag{4}$$

Si analizamos someramente la ecuación anterior podemos notar que los términos g; v_{0y}; v_{0x}; y_0 y x_0 son todos constantes, esto nos permite asociar la ecuación Ec.(4) con la forma:

$$y\,(x) = y_0 + b\,(x - x_0) - a(x - x_0)^2,$$

la cual se corresponde con una *parábola* cuyo vértice se encuentra desplazado del origen de coordenadas. Es por este resultado que el movimiento de los proyectiles recibe, comunmente, el nombre de *tiro parabólico*.

Si bien la ecuación Ec.(4) describe el movimiento del proyectil completamente, suele ser poco común que contemos con los datos de la velocidad inicial en ambas direcciones, generalmente cuando se lanza un proyectil, se mide o conoce la velocidad con que sale expulsado y la dirección en la que sale (conocida como el ángulo de tiro). Por este motivo vamos a desarrollar ecuaciones que involucren estas cantidades. En la siguiente figura (Fig. [1]) se puede apreciar un esquema del lanzamiento y trayectoria de un proyectil, en la cual se ilustran estas condiciones:

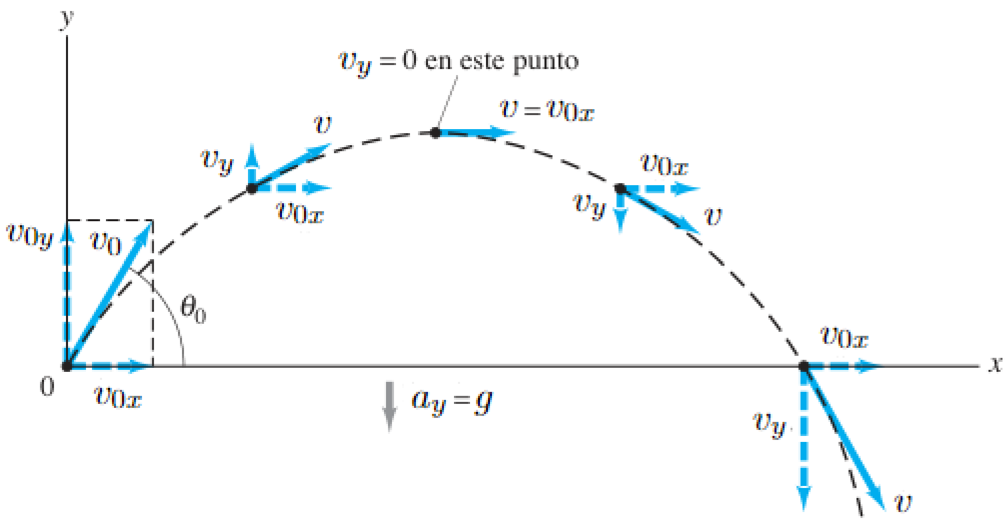


Figura 1: Esquematización de la trayectoria que sigue un proyectil al ser lanzado con una velocidad inicial v_0 formando un ángulo θ_0 con el eje horizontal. La trayectoria es la parábola punteada color negro, las velocidades son las flechas continuas color turquesa.

Notemos de la figura anterior Fig.[1] que las componentes vertical, v_{0y}, y horizontal, v_{0x}, de la velocidad inicial, forman un triángulo rectángulo con la llamada velocidad de lanzamiento v_0, como se puede apreciar en la siguiente figura:

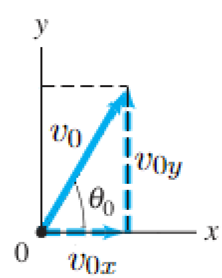


Figura 2: Esquematización de la relación entre la velocidad de lanzamiento v_0, sus componentes vertical y horizotal y el ángulo de tiro θ_0.

Al ver la figura Fig.[2] podemos notar que, si tomamos como referencia el ángulo de tiro θ_0, la componente horizontal de la velocidad inicial es el cateto adyacente del triángulo rectángulo, mientras que la componente vertical es el cateto opuesto y la velocidad de lanzamiento hace las veces de hipotenusa. Por lo tanto, por medio de las relaciones pitagóricas, tenemos que:

$$
\begin{aligned}
v_{0x} &= v_0 \cos\theta_0 \\
v_{0y} &= v_0 \sin\theta_0 \\
\frac{v_{0y}}{v_{0x}} &= \tan\theta_0.
\end{aligned} \tag{5}
$$

Al reemplazar estas tres expresiones, dadas por Ec.(5), en la ecuación de movimiento general Ec.(4), obtenemos:

$$
\boxed{y\left(x\right) = y_0 + \tan\theta_0 \left(x - x_0\right) - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\theta_0}\left(x - x_0\right)^2}. \tag{6}
$$

En aras de simplificar el problema podemos, sin perder generalidad, establecer el eje de coordenadas en el punto de lanzamiento del proyectil. Esto implica que $x_0 = 0$ y que $y_0 = 0$, con lo cual la ecuación anterior, Ec.(6), queda determinada por:

$$
y\left(x\right) = x \tan\theta_0 - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\theta_0} x^2. \tag{7}
$$

Armados con las ecuaciones de movimiento del proyectil estamos en posición de responder preguntas tales como: ¿Cuál es la altura máxima que alcanza el proyectil?, ¿Cuánto tiempo está en el aire?, ¿Cuál es el alcance máximo del proyectil? y ¿Qué ángulo de tiro nos proporciona ese alcance máximo?

Podemos responder estas preguntas de muchas maneras, sin embargo, en este escrito, vamos a abordar dos enfoques: uno desde el punto de vista físico y otro desde un punto de vistaá más geométrico.

Enfoque físico

Comencemos respondiendo estas preguntas enfocados en el fenómeno físico. Para simplificar los cálculos colocaremos el origen de coordenadas en la posición de tiro del proyectil, i.e $y_0 = 0$ y $x_0 = 0$, además consideraremos que $t_0 = 0$, con lo cual $t - t_0 = t$.

1. **¿Cuál es la altura máxima que alcanza el proyectil?**

   Dado que el movimiento del proyectil es una combinación de un movimiento horizontal de tipo *MRU* y de un tiro vertical (*MRUV*), la altura máxima estará afectada por la aceleración de la gravedad. Por lo tanto, esta se alcanzará cuando la velocidad vertical se anule, i.e $v_y = 0$. De las ecuaciones cinemáticas de tiro vertical, tenemos que:

$$
\begin{aligned}
v_y^2 &= v_{0y}^2 - 2g\left(y_{max} - y_0\right) \\
&\quad \text{como } v_y = 0 \text{ vemos que} \\
0 &= v_{0y}^2 - 2g\left(y_{max} - y_0\right) \\
y_{max} - y_0 &= \frac{v_{0y}^2}{2g} \\
&\quad \text{recordemos que } v_{0y} = v_0 \sin\theta_0 \text{ y que } y_0 = 0 \\
&= \frac{\left(v_0 \sin\theta_0\right)^2}{2g} \\
y_{max} &= \frac{v_0^2 \sin^2\theta_0}{2g} \qquad (8)
\end{aligned}
$$

2. **¿Cuánto tiempo está en el aire?**

   Para responder esta pregunta debemos conocer el llamado *tiempo de vuelo*, t_v. Este corresponde al tiempo que le toma al proyectil alcanzar la y_{max} y luego descender hasta el suelo. Si la posición de suelo coincide con el origen de coordenadas, entonces el proyectil tiene que recorrer dos veces la misma distancia. Por lo tanto el tiempo de vuelo será dos veces el tiempo que tarde en alcanzar la posición y_{max}.

   Al igual que en la pregunta anterior, la posición y_{max} se alcanza cuando $v_y = 0$, por lo tanto, de las ecuaciones de tiro vertical tenemos que:

$$
\begin{aligned}
v_y &= v_{0y} - gt \\
0 &= v_{0y} - gt \\
gt &= v_{0y} \\
t &= \frac{v_{0y}}{g} \\
&\quad \text{recordemos que } v_{0y} = v_0 \sin\theta_0 \\
t &= \frac{v_0 \sin\theta_0}{g} \\
&\quad \text{finalmente, dado que } t_v = 2t \text{, tenemos} \\
t_v &= \frac{2 v_0 \sin\theta_0}{g} \qquad (9)
\end{aligned}
$$

3. **¿Cuál es el alcance máximo del proyectil?**

   El alcance máximo del proyectil es la máxima distancia horizontal, x_{max}, que alcanza el proyectil durante el tiempo de vuelo. Podemos, entonces, utilizar la expresión Ec.(1) y buscar la x_{max} para el tiempo t_v, i.e calcular $x(t_v)$:

$$\begin{aligned}
x(t_v) &= x_0 + v_{0x}(t - t_0) \\
&\quad \text{recordemos que } x_0 = 0 \text{ y que como } t_0 = 0\text{, entonces } (t - t_0) = t_v \\
&= v_{0x} t_v \\
&\quad \text{sabemos que } v_{0x} = v_0 \cos\theta_0\text{, por lo tanto} \\
&= v_0 \cos\theta_0 t_v \\
&\quad \text{por la ecuación Ec.(9)} \\
&= v_0 \cos\theta_0 \frac{2v_0 \sin\theta_0}{g} \\
&= \frac{2v_0^2 \sin\theta_0 \cos\theta_0}{g} \\
&\quad \text{usando la identidad trigonométrica } 2\sin\theta_0\cos\theta_0 = \sin 2\theta_0 \text{ obtenemos} \\
x_{max} &= \frac{v_0^2 \sin 2\theta_0}{g} \qquad (10)
\end{aligned}$$

4. **¿Qué ángulo de tiro nos proporciona máximo alcance?**

Finalmente estamos en posición de responder esta última pregunta. Para ello tenemos que analizar la expresión anterior, Ec.(10). Notemos que según la misma, el máximo alcance depende de la función *seno*. Esta función es una función acotada por los valores 1 y -1, i.e:

$$-1 \leq \sin 2\theta_0 \leq 1$$

Esto significa que los valores entregados por la función $\sin 2\theta_0$ están comprendidos entre -1 y 1, por lo tanto el máximo valor posible para x_{max} se obtendrá cuando la función $\sin 2\theta_0$ tome su máximo valor, o sea cuando valga 1. Por consiguiente debemos encontrar el ángulo θ_0 que nos convierta al seno en 1, es decir que:

$$\begin{aligned}
\sin 2\theta_0 &= 1 \\
2\theta_0 &= \sin^{-1}\theta_0 \\
\theta_0 &= \frac{90^\circ}{2} \\
\theta_0 &= 45^\circ \qquad (11)
\end{aligned}$$

Este resultado se interpreta como que al arrojar un proyectil con un ángulo de tiro de $45°$ se nos garantiza obtener el mayor alcance posible.

Enfoque geométrico

Responderemos las preguntas anteriores enfocandonos en la geometría del problema. Anteriormente señalamos que la trayectoria que describe el proyectil es una parábola, así que utilizaremos lo que conocemos sobre parábolas. Empecemos por rescribir la ecuación Ec.(6) asociandola a la ecuación general de la parábola:

$$\begin{aligned} y(x) &= \underbrace{-\frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta_0}}_{a}\left(\overbrace{x-x_0}^{\Delta x}\right)^2+\underbrace{\tan\theta_0}_{b}\left(\overbrace{x-x_0}^{\Delta x}\right)+\underbrace{y_0}_{c} \\ y(x) &= a\Delta x^2+b\Delta x+c, \end{aligned} \tag{12}$$

donde a es el llamado coeficiente princpal, b es el coeficiente lineal y c el término independiente.

1. **¿Cuál es la altura máxima que alcanza el proyectil?**

   Dado que la trayectoria del proyectil es una parábola con coeficiente principal, a, negativo, la altura máxima del proyectil coincide con la coordenada Y_v del vértice de la parábola, i.e $Y_v = y_{max}$. La coordenada Y_v se calcula mediante la siguiente relación entre coeficientes:

$$\begin{aligned} Y_v &= c-\frac{b^2}{4a} \\ &\quad \text{reemplazamos } a,\ b \text{ y } c \text{ por sus expresiones y vemos que} \\ &= y_0-\frac{\tan^2\theta_0}{4\left(-\frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta_0}\right)} \\ &\quad \text{recordemos que } \tan\theta_0=\tfrac{\sin\theta_0}{\cos\theta_0} \\ &= y_0+\frac{\sin^2\theta_0}{\cos^2\theta_0}\left(\frac{v_0^2\cos^2\theta_0}{2g}\right) \\ &\quad \text{recordemos que } Y_v=y_{max} \\ y_{max} &= y_0+\frac{v_0^2\sin^2\theta_0}{2g} \end{aligned} \tag{13}$$

Notemos que si a la ecuación Ec.(13) le imponemos la condición $y_0 = 0$, es decir, hacemos coincidir el punto de tiro con el eje de coordenadas, entonces obtenemos el mismo resultado que el hallado en Ec.(8).

2. **¿Cuál es el alcance máximo del proyectil?**

   El alcance máximo del proyectil es la máxima distancia horizontal, Δx_{max}, que alcanza el proyectil una vez que toca el suelo. Por consiguiente, si la posición del suelo coincide con el origen de coordenadas, entonces $y(x) = 0$. Podemos, de esta manera, igualar la expresión Ec.(12) a cero y buscar las raíces de y, las cuales serán Δx_{max}. Las raíces se encuentran por medio de:

$$\begin{aligned}
\Delta x_{max} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
&\quad \text{reemplazamos } a,\ b \text{ y } c \text{ por sus expresiones y vemos que} \\
&= \frac{-\tan\theta_0 \pm \sqrt{\tan^2\theta_0 - 4\left(-\frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta_0}\right) y_0}}{2\left(-\frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta_0}\right)} \\
&\quad \text{recordemos que } \tan\theta_0 = \tfrac{\sin\theta_0}{\cos\theta_0} \\
&= \left[-\frac{\sin\theta_0}{\cos\theta_0} \pm \sqrt{\frac{\sin^2\theta_0}{\cos^2\theta_0} + 2\left(\frac{g}{v_0^2\cos^2\theta_0}\right) y_0}\right]\left(-\frac{v_0^2\cos^2\theta_0}{g}\right) \\
&= \left[-\frac{\sin\theta_0}{\cos\theta_0} \pm \frac{\sqrt{v_0^2\sin^2\theta_0 + 2gy_0}}{v_0\cos\theta_0}\right]\left(-\frac{v_0^2\cos^2\theta_0}{g}\right) \\
&= \left[\frac{-v_0\sin\theta_0 \pm \sqrt{v_0^2\sin^2\theta_0 + 2gy_0}}{v_0\cos\theta_0}\right]\left(-\frac{v_0^2\cos^2\theta_0}{g}\right) \\
&= \frac{v_0^2\sin\theta_0\cos\theta_0 \mp v_0\cos\theta_0\sqrt{v_0^2\sin^2\theta_0 + 2gy_0}}{g} \\
&\quad \text{recordemos que } \Delta x_{max} = (x_{max} - x_0) \\
x_{max} &= x_0 + \frac{v_0^2\sin\theta_0\cos\theta_0 \mp v_0\cos\theta_0\sqrt{v_0^2\sin^2\theta_0 + 2gy_0}}{g} \qquad (14)
\end{aligned}$$

Vale la pena que notemos que si hacemos coincidir el punto de tiro con el eje de coordenadas, es decir que, si fijamos $y_0 = 0$ y $x_0 = 0$ en la expresión Ec.(14), entonces obtenemos el mismo resultado que el hallado en Ec.(10).

$$
\begin{aligned}
x_{max} &= \frac{v_0^2 \sin\theta_0 \cos\theta_0 \mp v_0 \cos\theta_0 \sqrt{v_0^2 \sin^2\theta_0}}{g} \\
x_{max} &= \frac{v_0^2 \sin\theta_0 \cos\theta_0 \mp v_0^2 \cos\theta_0 \sin\theta_0}{g}
\end{aligned}
$$

La ecuación anterior tiene dos soluciones, la primera se obtiene de tomar el signo negativo y da como resultado $x_{max} = 0$. Claramente no es el valor que buscamos porque coincide con el punto de partida (habíamos fijado como punto de tiro $x_0 = 0$), es decir que ese valor implica que el proyectil no fue lanzado. La segunda solución se encuentra al tomar el signo positivo y con ello se obtiene:

$$
\begin{aligned}
x_{max} &= \frac{2v_0^2 \sin\theta_0 \cos\theta_0}{g} \\
& \text{nuevamente por identidad trigonométrica } 2\sin\theta_0\cos\theta_0 = \sin 2\theta_0 \\
x_{max} &= \frac{v_0^2 \sin 2\theta_0}{g}
\end{aligned}
$$

3. **¿Cuánto tiempo está en el aire?**

   Para calcular el tiempo de vuelo, t_v, basta con saber cuánto le toma al proyectil llegar al alcance máximo. Por lo tanto de la ecuación Ec.(1) vemos que:

$$
\begin{aligned}
x_{max} &= x_0 + v_{0x} t_v \\
& \text{sabemos que } v_{0x} = v_0 \cos\theta_0 \\
x_{max} - x_0 &= v_0 \cos\theta_0 t_v \\
& \text{de la ecuación Ec.(14) tenemos que} \\
v_0 \cos\theta_0 t_v &= \frac{v_0^2 \sin\theta_0 \cos\theta_0 \mp v_0 \cos\theta_0 \sqrt{v_0^2 \sin^2\theta_0 + 2gy_0}}{g} \\
t_v &= \frac{v_0^2 \sin\theta_0 \cos\theta_0 \mp v_0 \cos\theta_0 \sqrt{v_0^2 \sin^2\theta_0 + 2gy_0}}{g v_0 \cos\theta_0} \\
t_v &= \frac{v_0 \sin\theta_0 \mp \sqrt{v_0^2 \sin^2\theta_0 + 2gy_0}}{g} \qquad (15)
\end{aligned}
$$

Al igual que en la pregunta precedente, si fijamos el punto de partida del proyectil en el origen de coordenadas, la ecuación anterior tiene dos soluciones, la primera se obtiene de tomar el signo negativo y da como resultado $t_v = 0$. Este no es el valor que buscamos porque coincide con el punto de partida (habíamos fijado como punto de tiro $x_0 = 0$ e $y_0 = 0$ para $t_0 = 0$), es decir que ese valor implica que el proyectil no fue lanzado. La segunda solución se encuentra al tomar el signo positivo y con ello se obtiene:

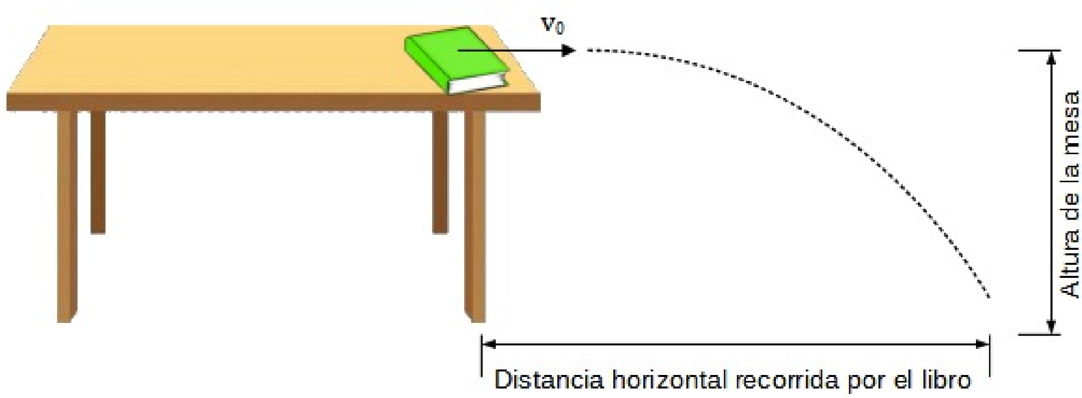
$$t_v = \frac{2v_0 \sin\theta_0}{g}$$

El cual concuerda con el resultado obtenido previamente en la expresión Ec.(9).

Ejemplos para implementar la teoría

Problema 1. Un libro de física que se desliza sobre una mesa horizontal a $1,10\ m/s$ cae y llega al piso en $0,48\ s$. Desprecie la resistencia del aire. Calcule **a)** la altura de la mesa con respecto al piso; **b)** la distancia horizontal del borde de la mesa al punto donde cae el libro; **c)** las componentes horizontal y vertical, así como la magnitud y dirección de la velocidad del libro, justo antes de tocar el piso. **d)** Dibuje las gráficas $x-t$, $y-t$, v_x-t, v_y-t para el movimiento.

Solución. Cuando el libro pasa el borde de la mesa, se convierte en un proyectil que realiza un movimiento parabólico con velocidad inicial $v_0 = 1,1\ m/s$. Parte de la mesa solamente con velocidad inicial horizontal, es decir, el ángulo de inclinación es $\theta_0 = 0$. Entonces, $v_{0x} = v_0$ y $v_{oy} = 0$.



a) Como queremos averiguar la altura h de la mesa, analizamos el movimiento vertical del libro. En nuestro sistema de coordenadas: $x_0 = 0$, $y_0 = h$. Para un

M.R.U.V vertical:

$$y(t) = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}at^2.$$

Sabemos que $y_0 = h$, $v_{0y} = 0$ y $a = -g$. Y para el tiempo $t = 0,48s$, $y(0,48\,s) = 0\,m$, entonces la ecuación horaria queda

$$0\,m = h + (0\,m/s)(0,48\,s) - \frac{1}{2}(9,8\,m/s^2)(0,48\,s)^2$$

$$h = \frac{1}{2}(9,8\,m/s^2)(0,48\,s)^2$$

$$h = 1,12896\,m \approx 1,13\,m$$

b) Para calcular la distancia d recorrida por el libro analizamos el movimiento horizontal del mismo. En el eje x tenemos un M.R.U, ya que el proyectil se desplaza con velocidad constante. La ecuación horaria para el M.R.U es

$$x(t) = x_o + v_{0x}t.$$

En nuestro sistema de coordenadas, $x_0 = 0\,m$, y para el tiempo $t = 0,48\,s$, $x(0,48\,s) = d$. Del dato inicial sabemos que $v_{0x} = 1,10\,m/s$. Entonces

$$d = 0\,m + (1,10\,m/s)(0,48\,s)$$
$$d = 0,528\,m \approx 0,53\,m.$$

c) En el eje horizontal tenemos un M.R.U, entonces la velocidad v_x no cambia, y

$$v_x = v_{0x} = 1,10\,m/s.$$

En el eje vertical tenemos un M.R.U.V, y la ecuación para la velocidad es

$$v_y(t) = v_{0y} + at.$$

Como $v_{0y} = 0$ y $a = -g$, en el tiempo $t = 0,48\,s$

$$v_y = 0\,m/s - (9,8\,m/s^2)(0,48\,s)$$

$$v_y = -4,704\, m/s$$

Teniendo ambas componentes del vector de la velocidad justo antes de tocar el suelo, podemos calcular su módulo mediante del Teorema de Pitágoras (Fig. 2):

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

$$v = \sqrt{(1,10\, m/s)^2 + (-4,704\, m/s)^2}$$

$$v \approx 4,83\, m/s.$$

La dirección del vector queda explícita en la siguiente figura.

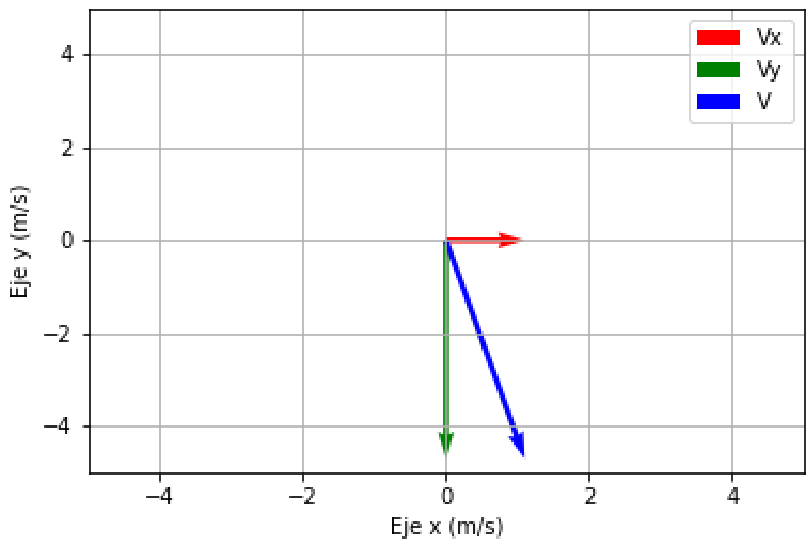
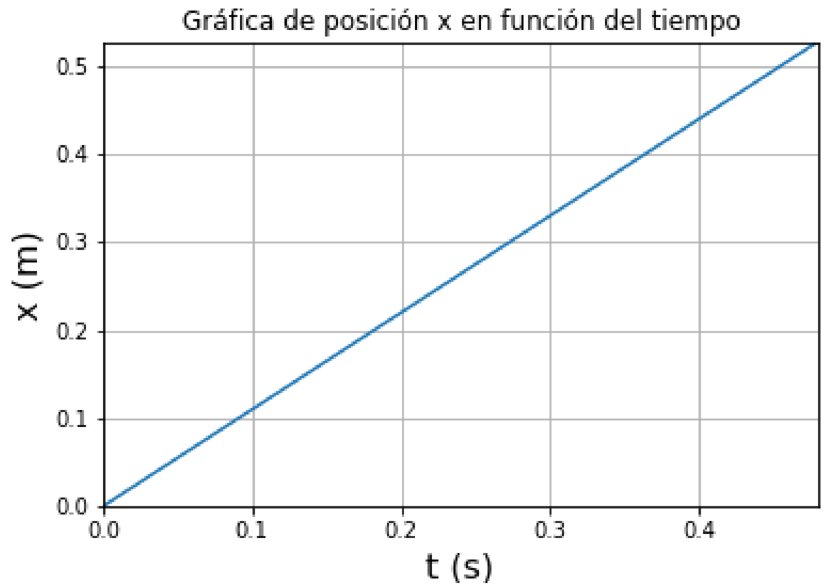
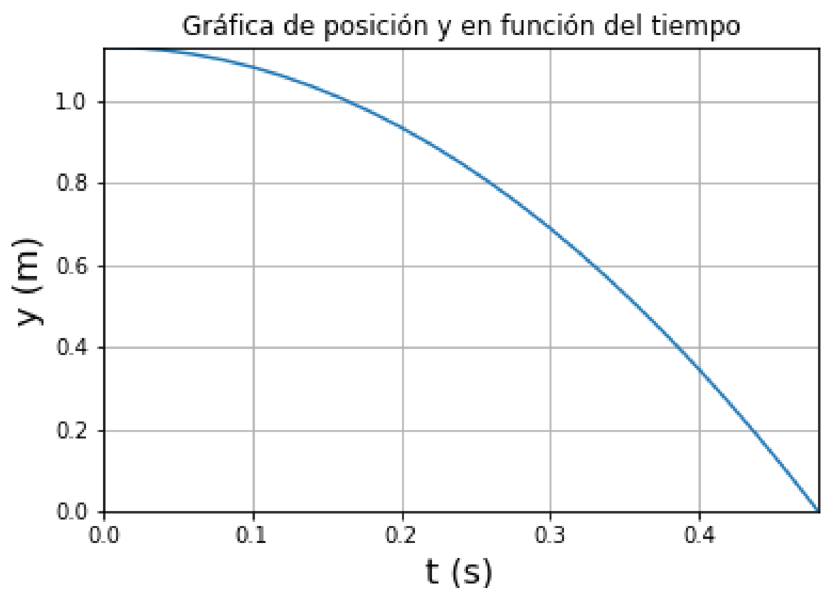


Figura 3: Componentes horizontal v_x y vertical v_y del vector velocidad v justo antes de que el proyectil toque el suelo

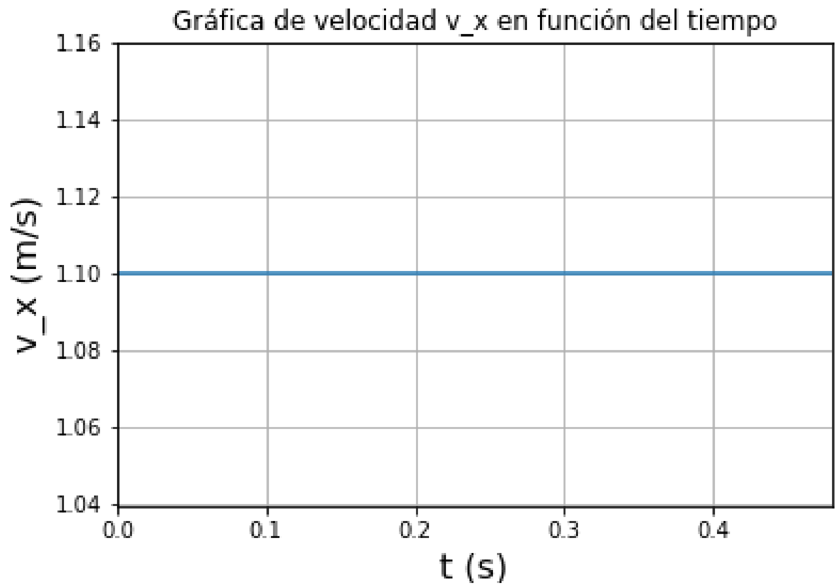
d) Graficamos $x - t$:



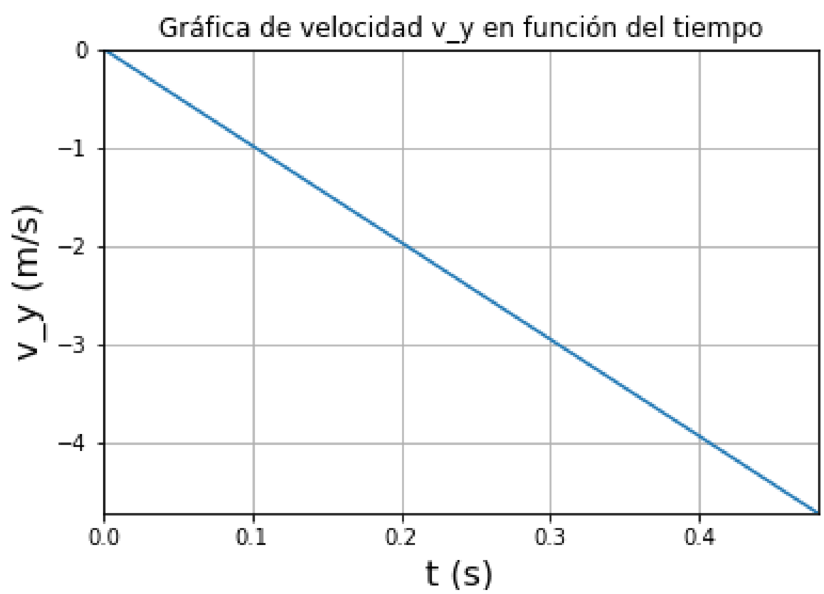
Graficamos $y - t$:



Graficamos $v_x - t$:



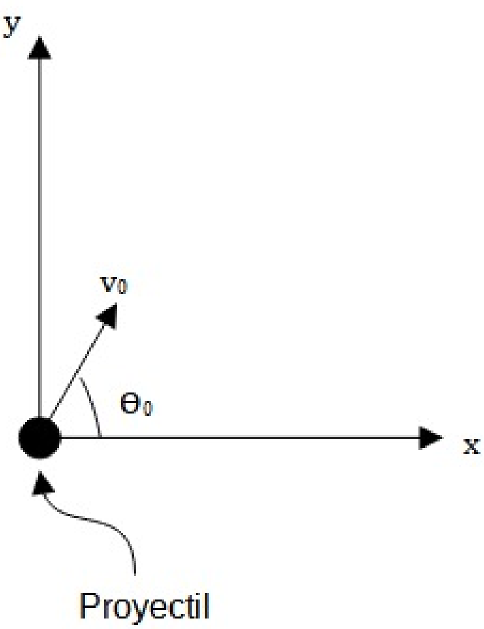
Graficamos $v_y - t$:



Problema 2. Se dispara un proyectil desde el nivel del suelo con una velocidad inicial de $80{,}0 m/s$ a $60{,}0^{\circ}$ por encima de la horizontal sin que sufra resistencia del aire. **a)** Determine las componentes horizontal y vertical de la velocidad inicial

del proyectil. **b)** ¿Cuánto tarda el proyectil en alcanzar su punto más alto? **c)** Calcule su altura máxima por encima del suelo. **d)** ¿Qué tan lejos del punto de lanzamiento cae el proyectil al suelo? **e)** Determine las componentes horizontal y vertical de su aceleración y velocidad en el punto de su máxima altura.

Solución. Planteamos un esquema de la situación. Distinto al problema anterior, ahora el proyectil es lanzado con un ángulo de inclinación, $\theta_0 = 60{,}0°$. La velocidad inicial es $v_0 = 80{,}0\,m/s$.



En nuestro sistema de coordenadas, el proyectil parte desde el origen, entonces $x_0 = 0$ e $y_0 = 0$.

a) Para determinar las componentes horizontal y vertical de la velocidad inicial, usamos las primeras dos expresiones de la Ec.(5):

$$v_{0x} = v_0 \cos\theta_0$$
$$v_{0x} = (80{,}0\,m/s)\cos 60{,}0°$$
$$v_{0x} = 40{,}0\,m/s$$

y

$$v_{0y} = v_0 \sin\theta_0$$
$$v_{0y} = v_0 \sin 60{,}0°$$

$$v_{0y} = 40\sqrt{3}\, m/s \approx 69{,}3\, m/s$$

b) En este inciso tenemos que calcular el tiempo que le demora al proyectil alcanzar la altura máxima, entonces procedemos a usar la Ec.(9), la cuál nos sirve para calcular el tiempo de toda la trayectoria. Sin embargo, la coordenada y inicial y final coinciden (porque parte del suelo y termina en el suelo), entonces $t = t_v/2$, donde t_v es el *tiempo de vuelo*. Luego,

$$t = \frac{v_0 \sin\theta_0}{g}$$
$$t = \frac{v_{0y}}{g}$$
$$t = \frac{40\sqrt{3}\, m/s}{9{,}8\, m/s^2}$$
$$t \approx 7{,}07\, s$$

c) Usamos la Ec.(8).

$$y_{max} = \frac{(v_0 \sin\theta_0)^2}{2g}$$
$$y_{max} = \frac{v_{0y}^2}{2g}$$
$$y_{max} = \frac{(40\sqrt{3}\, m/s)^2}{2(9{,}8\, m/s^2)}$$
$$y_{max} \approx 244{,}90\, m$$

d) Usando la segunda línea en la Ec.(10).

$$x_{max} = v_{0x} t_v$$
$$x_{max} = (40\, m/s)2(7{,}07\, s)$$
$$x_{max} \approx 565{,}6\, m$$

e) En el punto de su máxima altura, sabemos que la componente vertical de la velocidad es nula, la cual es la suposición que hicimos para llegar a la Ec.(8), y sabemos que en el eje horizontal la velocidad es constante y equivale a la componente horizontal de la velocidad inicial, entonces tenemos que

$$v_y = 0\, m/s$$

y

$$v_x = v_{0x} = 40\, m/s$$

La aceleración vertical es constante ya que se trata de un M.R.U.V y es la de la gravedad. En la componente horizontal, la aceleración es nula ya que se trata de un M.R.U, entonces

$$a_x = 0$$

y

$$a_y = -9{,}8\, m/s^2$$