

Unidad 4

Funciones

En este apunte los estudiantes encontrarán contenidos básicos de:

- Definición de función.
- Gráficas de funciones.
- Función valor absoluto y distancia.
- Funciones racionales.
- Funciones crecientes y decrecientes.
- Transformaciones de funciones: traslaciones horizontales, verticales y reflexiones
- Modelado con funciones y aplicación a resolución de problemas.
- Composición de funciones.
- Inyectividad, sobreyectividad y biyectividad.
- Función inversa.

Índice

1. Funciones definidas en $\mathbb{R}$	2
Dominio	4
Gráfico de funciones	5
Prueba de la recta vertical	6
Conjunto imagen	7
Ceros o raíces	7
Indeterminaciones	7
Ordenada al origen	8
Intervalo de crecimiento o decrecimiento	9
Intervalo de positividad o negatividad	9
Funciones definidas por partes	11
2. Transformaciones de funciones	12
Desplazamientos o traslaciones	13
Reflexiones	14
3. Modelado con funciones	16
4. Álgebra de funciones	21
Composición de funciones	22
5. Funciones Inyectivas, Sobreyectivas y Biyectivas	23
Función suryectiva	24
Función inyectiva	24
Función biyectiva	24
6. Función inversa	26

1. Funciones definidas en $\mathbb{R}$

Se usa el término **función** para describir la dependencia de una cantidad respecto de otra.

Ejemplo

- la estatura depende de la edad,
- la temperatura depende de la época del año,
- el costo de enviar por correo un paquete depende de su peso

Podemos agregar a estos, algunos ejemplos más propios de las ciencias:

- La altura es una función de la edad.
- La temperatura es una función de la época del año.
- El costo de enviar por correo un paquete es una función del peso.
- El área de un círculo es una función de su radio.
- El número de bacterias en un cultivo es función del tiempo.

Definición informal

Una función es una regla. Para hablar acerca de una función, se requiere asignarle un nombre. Se emplearán letras como f , g , h , ... para representar funciones. Por ejemplo, se puede usar la letra f para representar una regla como sigue:

“ f ” es la regla “cuadrado del número”

Cuando se escribe $f(2)$, se entiende “aplicar la regla f al número 2”. Al aplicar la regla se obtiene $f(2) = 2^2 = 4$. De manera similar $f(3) = 3^2 = 9$, $f(4) = 4^2 = 16$ y en general $f(x) = x^2$.

“Una función f es una regla que asigna a cada elemento x en un conjunto A exactamente un elemento, llamado $f(x)$, en un conjunto B ”.

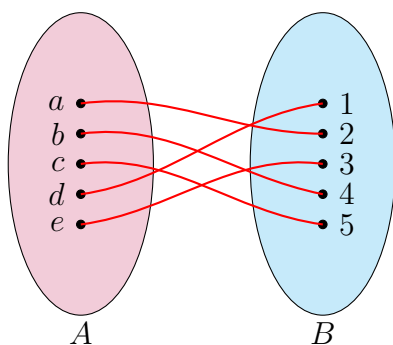
Por lo general, se consideran funciones para las cuales los conjuntos A y B son conjuntos de números reales. El símbolo $f(x)$ se lee “ f de x ” o “ f en x ” y se llama el valor de f en x , o la imagen de x por f . El conjunto A se llama **dominio** de la función y lo notamos $Dom f$. El **conjunto imagen**, que escribimos $Im f$, de f es el conjunto de los valores posibles de $f(x)$ cuando x varía a través del dominio, es decir,

$$Im f = \{f(x)/x \in A\}$$

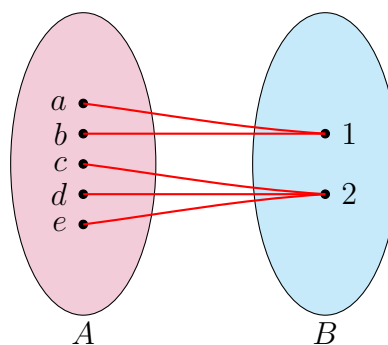
En la definición de una función $f : A \rightarrow B$, se debe cumplir que:

- **Existencia:** Para todo elemento x en el conjunto A (dominio), existe un elemento $f(x)$ en el conjunto B (codominio).
- **Unicidad:** Cada $x \in A$ está asociado a un único elemento $f(x) \in B$. Es decir, si $f(x) = y$ y $f(x) = z$, entonces $y = z$.

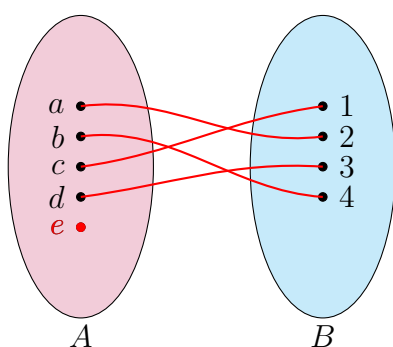
Es función



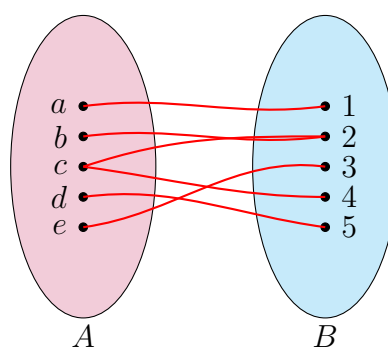
Es función



No es función (falta existencia)

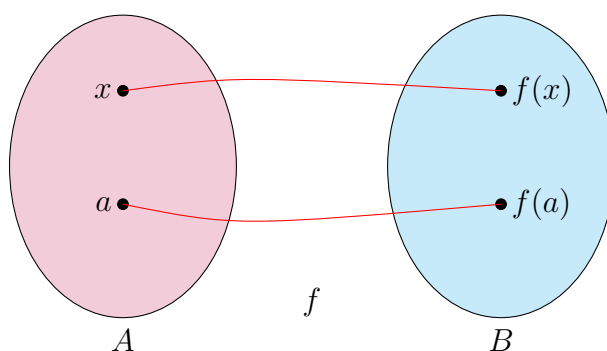


No es función (falta unicidad)



Importante:

- El símbolo x , que representa un número arbitrario en el dominio de una función f , se llama **variable independiente**.
- El símbolo que representa un número en el conjunto imagen de f se llama **variable dependiente**. Representación simbólica: $f(x)$



Hemos presentado los conceptos principales de la teoría de funciones, proponemos el siguiente ejercicio.

Trabajo Práctico

Ejercicio 1. Dadas las siguientes expresiones funcionales en forma coloquial, escriba la correspondiente fórmula, indicando su dominio.

- Un número real, elevado al cubo, disminuido en 8.

- b. Un número real, elevado al cuadrado multiplicado por 5.
- c. La raíz cuadrada de un número entero elevado al cubo.
- d. El doble de la raíz cúbica de un número real, más 5.
- e. El cuadrado de un número real, aumentado en su doble.
- f. La raíz cuadrada de un número disminuido en 4.

En la definición de una función la variable independiente x desempeña el papel de “marcador de posición”. Por ejemplo, la función $f(x) = 3x^2 + x - 2$ se puede considerar como:

$$f(-1) = 3 \cdot (-1)^2 + (-1) - 2$$

Para evaluar f en un número, se sustituye el número por el “marcador de posición”.

Ejemplo:

Sea $f(x) = 3x^2 + x - 5$. Evalúe cada valor de función.

a. $f(-2) = 3 \cdot (-2)^2 + (-2) - 5 = 12 - 2 - 5 = \boxed{5}$

b. $f(0) = 3 \cdot 0^2 + 0 - 5 = \boxed{-5}$

c. $f(4) = 3 \cdot 4^2 + 4 - 5 = 48 + 4 - 5 = \boxed{47}$

d. $f\left(\frac{1}{2}\right) = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} - 5 = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} - 5 = -\frac{15}{4} = \boxed{-3,75}$

Para calcular la imagen de un número por f , se sustituye x por el número en la definición de f .

Trabajo Práctico

Ejercicio 2. Calcule las imágenes indicadas:

a. $f(x) = 2x + 1$ en $x = 1; x = -2; x = \frac{1}{2}; x = a; x = a + b$

b. $g(x) = x^2 + 2x$ en $x = 3; x = -3; x = a; x = -x; x = \frac{1}{a}$

c. $h(x) = \frac{1-x}{1+x}$ en $x = 2; x = -2; x = a; x = -1$

Dominio

Llamamos **dominio** de la función al conjunto de todos los valores de x para los cuales $y = f(x)$ esté definida (sea un número real). Se le suele simbolizar como:

$$D, \quad D(f), \quad \text{Dom}, \quad \text{Dom}(f)$$

Ejemplo: El dominio de la función:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$$

La expresión será un número real sólo si el denominador no es cero:

$$x^2 - 4 \neq 0$$

Al despejar x , obtenemos:

$$x \neq 2 \quad \text{y} \quad x \neq -2$$

Por lo tanto, el dominio es:

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$$

Nota importante: Cuando no se especifica el dominio de la función, se asume que es el **dominio natural** (o máximo dominio posible), es decir:

- El mayor conjunto de números reales para los que la regla de la función tenga sentido.
- Donde el resultado (y) sea un número real.

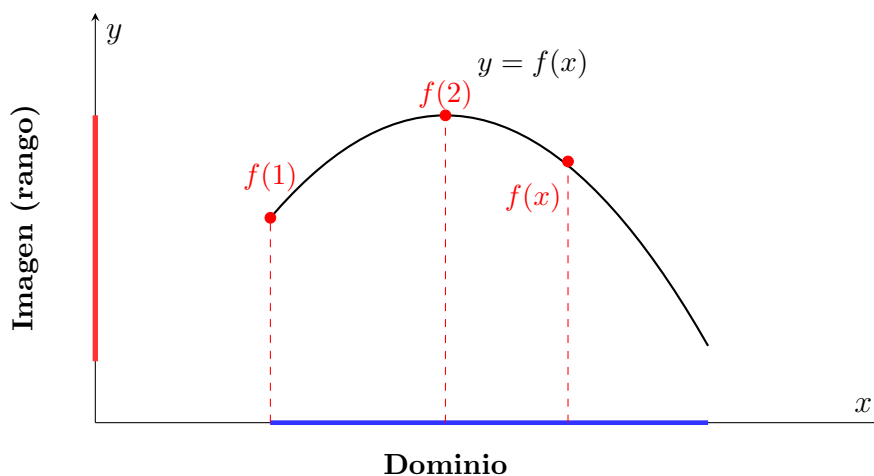
Gráfico de funciones

Si f es una función con dominio A , entonces la **gráfica** de f es el conjunto de pares ordenados:

$$\{(x, f(x)) \mid x \in A\}$$

En otras palabras:

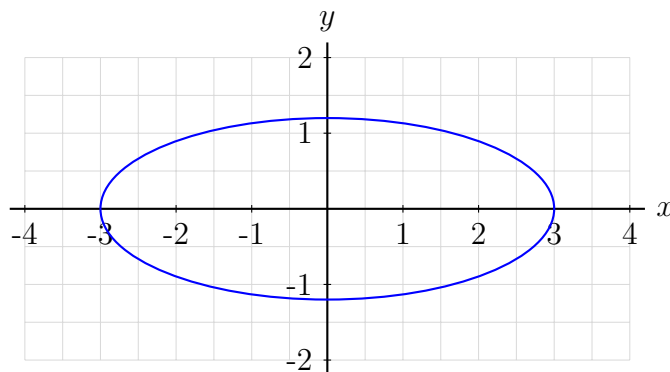
- La gráfica de f son los puntos (x, y) tales que $y = f(x)$.
- Corresponde a la gráfica de la ecuación $y = f(x)$.



*La gráfica de una función permite visualizar el **dominio** sobre el eje x y la **imagen** (rango) sobre el eje y , mostrando cómo a cada valor x le corresponde exactamente un valor $f(x)$.*

Prueba de la recta vertical

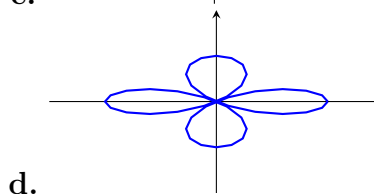
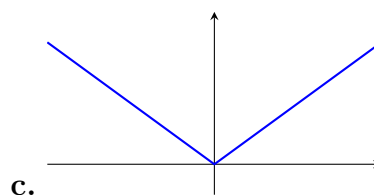
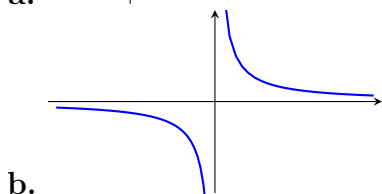
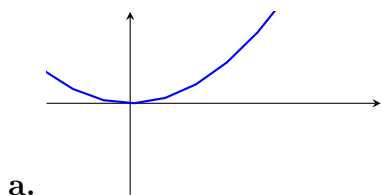
La gráfica de una función es una curva en el plano xy . Pero surge la pregunta: ¿qué curvas en el plano xy son gráficas de funciones? Esto se contesta mediante la prueba siguiente. “Una curva en el plano coordenado es la gráfica de una función si y sólo si ninguna línea vertical corta la curva más de una vez” Aplicamos ésta prueba en el siguiente ejercicio del práctico:



No es función. Si realizamos la prueba de graficar una o más rectas verticales, éstas cortan en dos puntos de la gráfica por lo tanto no la relación no cumple la unicidad.

Trabajo Práctico

Ejercicio 3. Determine si el gráfico presentado es o no una función de x , con dominio en $\mathbb{R}$. Justifique su respuesta.



Ejercicio 4. Relaciona cada función a su dominio.

$$f(x) = \frac{x}{x+5}$$

$$g(x) = \sqrt{x-25}$$

$$h(x) = x^2 + 3x$$

$$i(x) = \frac{x-2}{x^2-4}$$

- $(25; +\infty)$
- $(-5; +\infty)$
- $\mathbb{R}$
- $\mathbb{R} - \{5\}$
- $\mathbb{R} - \{-5\}$
- $(0; 4) \cup (4; +\infty)$
- $\mathbb{R} - \{-2; 2\}$

Es necesario definir otros elementos que caracterizan a las funciones para poder luego analizarlas.

Conjunto imagen

Es el conjunto formado por los elementos $f(x)$ del conjunto de llegada B que son imágenes de elementos del conjunto de partida A . Se simboliza como:

$$\mathbf{I}, \quad \mathbf{Imag}, \quad \mathbf{Im}(f)$$

En nuestro ejemplo, queremos determinar el conjunto imagen o rango de la función:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$$

Vemos que para cada valor del dominio $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{2, -2\}$, la imagen es el conjunto de números reales que toma $f(x)$:

$$\mathbf{Imag}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

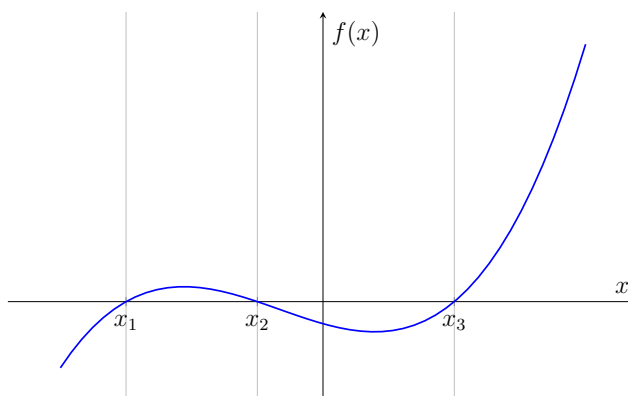
En general, el conjunto imagen de f no es evidente a partir de su fórmula, por lo tanto nos limitaremos al estudio a partir de los gráficos, lo que nos lleva al siguiente título.

Ceros o raíces

Los **ceros** o **raíces** de una función son aquellos elementos del dominio cuya imagen es cero. Matemáticamente, son los valores de x que satisfacen:

$$f(x) = 0$$

Gráficamente, los ceros corresponden a las **abscisas** (primera coordenada) de los puntos donde la gráfica de la función intersecta (corta) al eje x .



Indeterminaciones

Dado una función del tipo $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$.

Se llama **indeterminación** a los elementos del dominio que anulan el denominador.

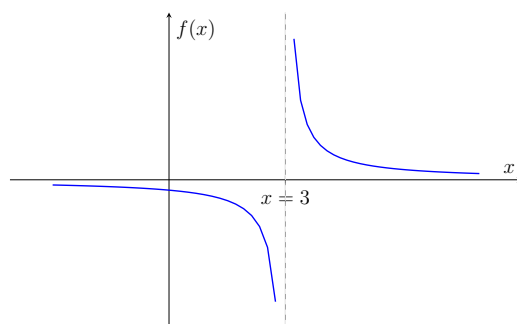
Ejemplo: Sea una función,

$$f(x) = \frac{1}{x-3}$$

$$x-3 \neq 0 \implies x \neq 3,$$

decimos que, $\text{Dom}(f) : \mathbb{R} - \{3\}$.

Para este valor de x la función no está definida y tiende a un valor muy grande (infinito). La recta definida por $x = 3$ es una asíntota vertical.



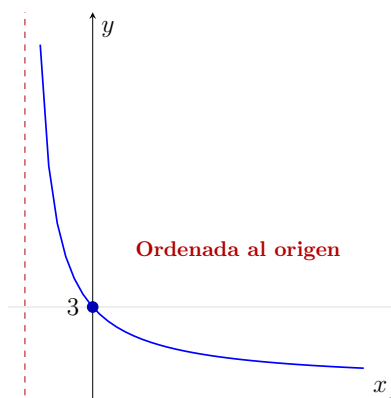
Ordenada al origen

Llamamos **ordenada al origen** a la imagen de 0 por la función f (siempre que ese número exista). Gráficamente representa la ordenada (segunda coordenada) del punto de intersección de la gráfica con el eje y .

Ejemplo 1:

$$f(x) = \frac{1}{x+1} + 2$$

Para $x = 0$: $f(0) = \frac{1}{0+1} + 2 = 3$, la ordenada al origen es $y = 3$ ó $(0, 3)$.



Ejemplo 2: La función $f(x) = \frac{1}{x}$ **no está definida en** $x = 0$, pues:

$$f(0) = \frac{1}{0} \quad (\text{Indefinido})$$

Esta expresión no se escribe, sólo lo incluimos para enfatizar este ejemplo. Concluimos que **no existe ordenada al origen** para esta función.

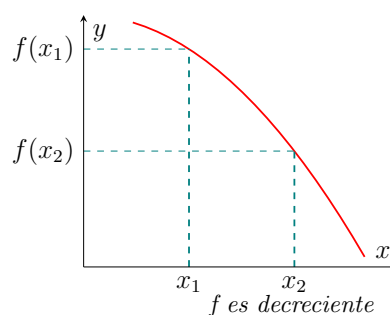
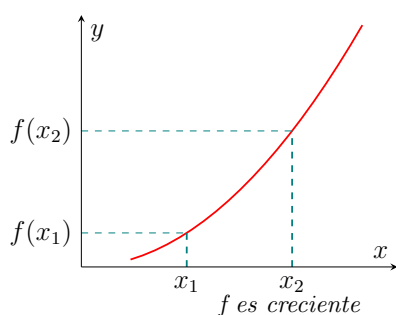
Intervalo de crecimiento o decrecimiento

- Un **intervalo de crecimiento** de una función es un subconjunto I del dominio para el cual a mayores valores de la variable independiente x le corresponden mayores valores de la variable y . También podemos afirmar que f es *creciente en el intervalo I*

$$\forall x \in I : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

- Un **intervalo de decrecimiento** se presenta en el caso contrario al expuesto, y diremos f es *decreciente en el intervalo I* :

$$\forall x \in I : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$



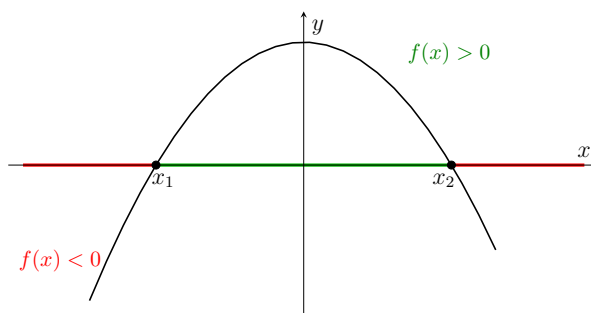
Intervalo de positividad o negatividad

- Los conjuntos de Positividad y Negatividad son intervalos del dominio, $\text{Dom}(f)$ de la función y representan los valores de x para los cuales la función $f(x)$ toma valores positivos o negativos.
- El **Conjunto o Intervalo de Positividad** (C^+) de una función es el subconjunto del dominio cuyas imágenes son números positivos:

$$\forall x \in \text{Dom}(f) : f(x) > 0$$

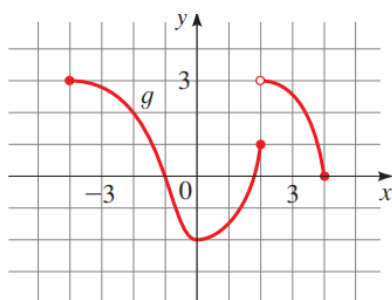
- El **Conjunto o Intervalo de Negatividad** (C^-) de una función es el subconjunto del dominio cuyas imágenes son números negativos:

$$\forall x \in \text{Dom}(f) : f(x) < 0$$



Trabajo Práctico

Ejercicio 5. Dado el gráfico:



a. Determine los valores de la función:

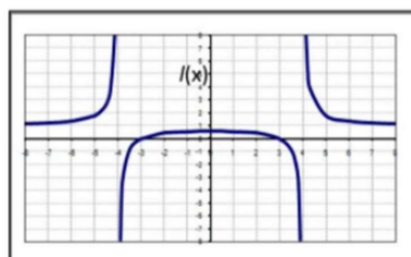
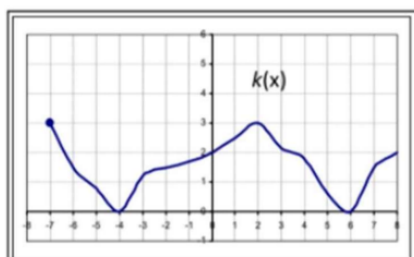
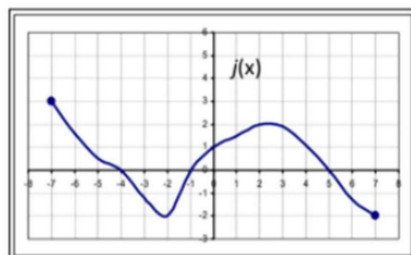
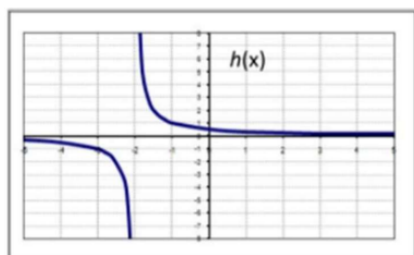
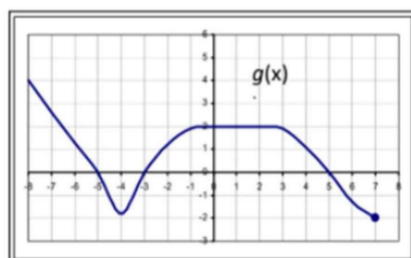
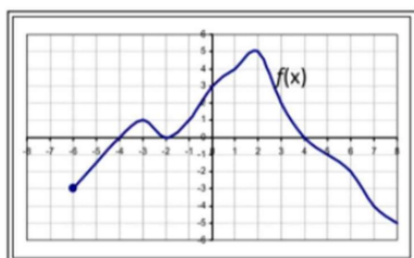
■ $g(-4)$ ■ $g(-2)$ ■ $g(0)$ ■ $g(2)$

b. Determine los valores de x para los cuales: $g(x) = 0$

c. Exprese dominio y conjunto imagen

d. Identifique intervalos de crecimiento y de decrecimiento:

Ejercicio 6. Dadas las siguientes funciones expresadas gráficamente, identifique para cada una de ellas: dominio, conjunto imagen, ceros, ordenada al origen, indeterminaciones, conjuntos de negatividad y positividad, e intervalos de crecimiento y de decrecimiento.



Ejercicio 7. Dadas las siguientes funciones expresadas a través de su forma algebraica, identifique para cada una de ellas: dominio, ceros, ordenada al origen, indeterminaciones, conjuntos de negatividad y positividad

a) $f(x) = 3x - 5$

d) $j(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 4}$

g) $m(x) = \frac{\sqrt{3x + 2}}{x - 1}$

b) $g(x) = x^2 - 2x$

e) $k(x) = \frac{3x - 2}{x^2 - 4x - 5}$

h) $n(x) = \frac{4x + 1}{\sqrt{x^2 + 1}}$

c) $h(x) = \frac{3x}{x - 1}$

f) $l(x) = \sqrt{2x - 5}$

i) $\hat{n}(x) = \frac{4x^2 - 25}{\sqrt{x^2 - 1}}$

Funciones definidas por partes

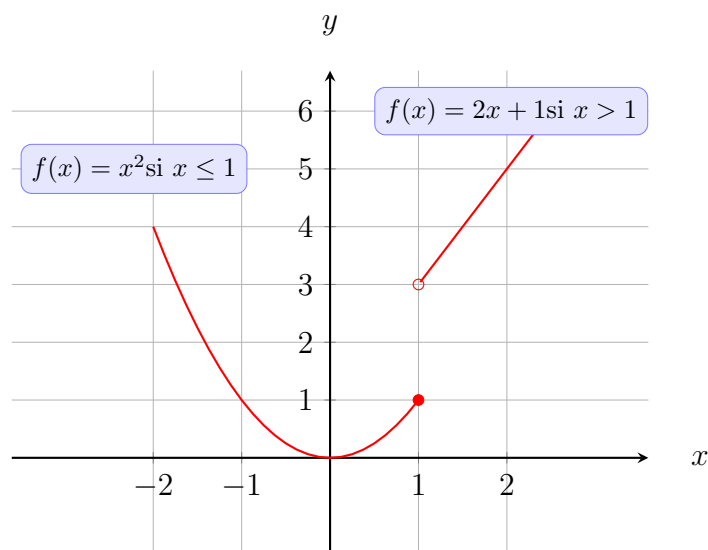
Una función por partes se define mediante fórmulas distintas en diferentes partes de su dominio. Como se puede esperar, la gráfica de tal función consiste en trozos.

Ejemplo:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ 2x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- Si $x \leq 1$, entonces $f(x) = x^2$ (parte de la gráfica a la izquierda de $x = 1$).
- Si $x > 1$, entonces $f(x) = 2x + 1$ (parte de la gráfica a la derecha de $x = 1$).

El punto sólido en $(1, 1)$ indica que este punto está incluido en la gráfica; el punto abierto en $(1, 3)$ indica que este punto está excluido de la gráfica. Insistimos una vez más en que se trata de una **misma función** que se comporta de acuerdo a cada fórmula con la condición de que x esté en el conjunto que corresponde.



Trabajo Práctico

Ejercicio 8. Calcule las imágenes indicadas para cada función por partes:

- a. $j(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 0 \\ x + 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ en $x = -2; x = -1; x = 0; x = 1$
- b. $k(x) = \begin{cases} 5 & \text{si } x \leq 2 \\ 2x - 3 & \text{si } x > 2 \end{cases}$ en $x = -3; x = 0; x = 2; x = 3; x = 5$
- c. $l(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & \text{si } x \leq -1 \\ x & \text{si } -1 < x \leq 1 \\ -1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ en $x = -4; x = -1; x = 0$

Ejercicio 9. Represente gráficamente cada una de las siguientes funciones definidas por partes:

- a. $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 2 \\ 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$
- d. $f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{si } x < -1 \\ 3 - x & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$
- b. $f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si } x < -2 \\ 5 & \text{si } x \geq -2 \end{cases}$
- e. $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < -1 \\ x^2 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$
- c. $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 0 \\ x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$
- f. $f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x \leq 0 \\ 9 - x^2 & \text{si } 0 < x \leq 3 \\ x - 3 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

2. Transformaciones de funciones

Una función (lo que de ahora en más llamaremos **función original**) puede ser transformada a través de diferentes operatorias. Las transformaciones más usuales son:

■ Desplazamientos

- Desplazamientos verticales.
- Desplazamientos horizontales.

■ Estiramientos

- Multiplicación de la variable independiente por $k \in \mathbb{R}$
- Multiplicación de la variable dependiente por $k \in \mathbb{R}$

■ Reflexiones

- Respecto al eje x
- Respecto al eje y

Los estiramientos se producen al multiplicar la variable independiente o dependiente de la función por un coeficiente $k \in \mathbb{R}$.

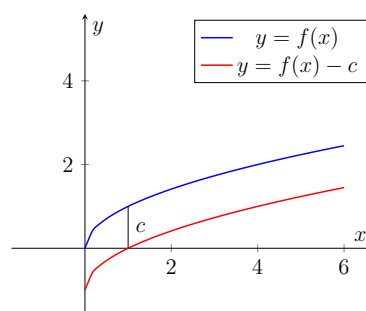
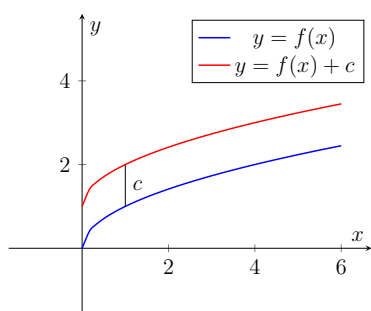
Las reflexiones consisten en reflejar (imaginando la existencia de un espejo en dicho eje) la función respecto del *eje x* o respecto del *eje y*. A continuación, pasaremos a detallar los desplazamientos y las reflexiones. Las restantes se retomarán en Cálculo I / Elementos de Cálculo I.

Desplazamientos o traslaciones

Una función se traslada **verticalmente** cuando la variable dependiente y está afectada por una suma o resta de un número $k > 0$, con $k \in \mathbb{R}$.

- **Traslación hacia arriba:** Si se suma a y un número $k > 0$, la función se desplaza hacia arriba, es decir, sube k unidades respecto del eje de abscisas.
- **Traslación hacia abajo:** Si se resta a y un número $k > 0$, la función se desplaza hacia abajo, es decir, baja k unidades respecto del eje de abscisas.

Supongamos que se conoce la gráfica de la función original $f(x)$. Aplicando lo anterior, obtenemos las funciones trasladadas:



Donde $c > 0$ (es decir, c es un número real positivo).

Una función se traslada **horizontalmente** cuando la variable independiente x está afectada por una suma de un número $k \in \mathbb{R}$.

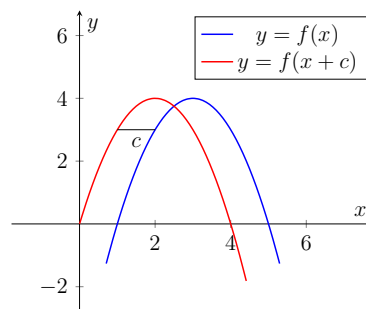
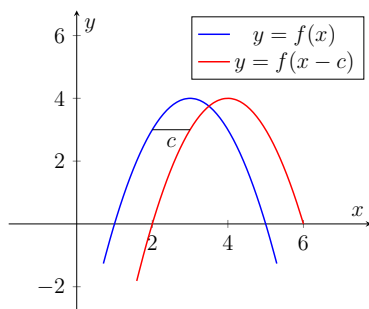
- **Traslación hacia la izquierda:** Si se suma un número real positivo ($k > 0$) a x , la función se desplaza hacia la izquierda **respecto de la función original**, es decir, en sentido contrario al signo de la operación realizada.

$$f(x) \rightarrow f(x + k) \quad \text{con } k > 0$$

- **Traslación hacia la derecha:** Si se suma un número real negativo ($k < 0$) a x , la función se desplaza hacia la derecha **respecto de la función original**, es decir, en sentido contrario al signo de la constante.

$$f(x) \rightarrow f(x + k) \quad \text{con } k < 0$$

Supongamos que se conoce la gráfica de $f(x)$. Aplicando las transformaciones descritas, obtenemos las funciones trasladadas horizontalmente:



Donde $c > 0$ es una constante real positiva.

Reflexiones

El gráfico de una función sufre una reflexión cuando su variable dependiente o independiente se multiplican por un $k \in \mathbb{R}$, donde $k < 0$ (es decir, cambian de signo). En este caso, el eje correspondiente actúa como un espejo.

- Si $y = k \cdot f(x)$ cuando $k < 0$ la función se **refleja respecto del eje de abscisas**, y se redefine como:

$$y = -f(x)$$

- Si $y = f(k \cdot x)$ cuando $k < 0$ la función **refleja respecto del eje de ordenadas**, y se redefine como:

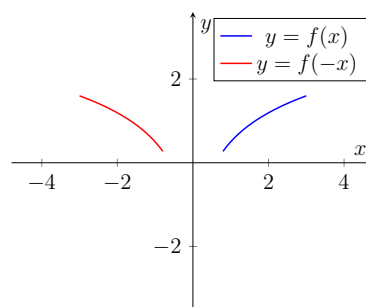
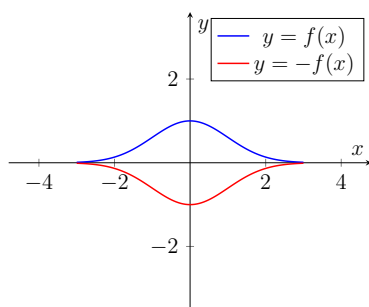
$$y = f(-x)$$

- Reflexión respecto al eje de ordenadas (eje y):**

- Para una función $f(x)$ con coordenadas (x, y) en sus puntos
- La función reflejada tendrá coordenadas $(-x, y)$
- Solo cambia el signo de la coordenada x (abscisa)
- Transformación algebraica: $f(x) \rightarrow f(-x)$

- Reflexión respecto al eje de abscisas (eje x):**

- Para una función $f(x)$ con coordenadas (x, y) en sus puntos
- La función reflejada tendrá coordenadas $(x, -y)$
- Solo cambia el signo de la coordenada y (ordenada)
- Transformación algebraica: $f(x) \rightarrow -f(x)$



Ejemplo

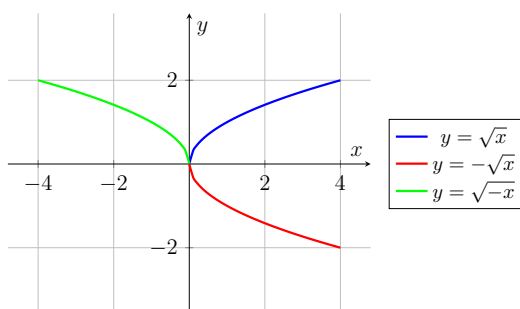
Tomaremos como función original la función real $y = \sqrt{x}$. Ahora reflejemos la misma respecto de ambos ejes:

- Reflexión respecto al eje x: $y = -f(x) = -\sqrt{x}$
- Reflexión respecto al eje y: $y = f(-x) = \sqrt{-x}$

Nota importante Nótese la importancia del paréntesis en este caso.

Reflexión respecto al eje x		
x	$f(x) = \sqrt{x}$	$-f(x) = -\sqrt{x}$
0	0,00	0,00
1	1,00	-1,00
2	1,41	-1,41
3	1,73	-1,73
4	2,00	-2,00
5	2,24	-2,24

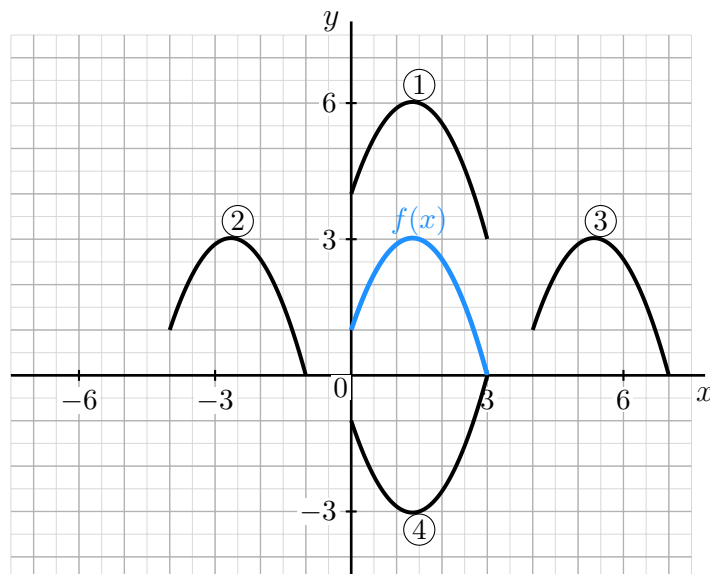
Reflexión respecto al eje y			
x	$-x$	$f(-x) = \sqrt{-x}$	Dominio válido
0	0	0,00	Sí
-1	1	1,00	No
-2	2	1,41	No
-3	3	1,73	No
-4	4	2,00	No
-5	5	2,24	No



Trabajo Práctico

Ejercicio 10. Se tiene el gráfico de $y = f(x)$ en celeste. Relacione cada transformación con su gráfica correspondiente.

- | | |
|-------------------|-------------------|
| a. $y = -f(x)$ | d. $y = f(x) + 3$ |
| b. $y = f(x + 4)$ | |
| c. $y = f(x - 4)$ | e. $y = f(-x)$ |



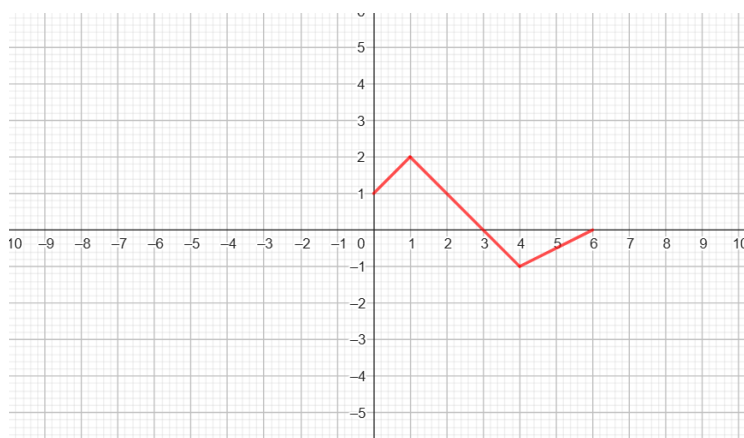
Ejercicio 11. Se tiene el gráfico de f . Represente en la misma imagen las transformaciones:

a) $y = f(x - 2)$

d) $y = -f(x) + 3$

b) $y = f(x) - 2$

e) $y = f(-x)$



3. Modelado con funciones

Muchos de los procesos estudiados en las ciencias básicas y sociales requieren entender cómo varía una cantidad respecto a otra. Hallar una función que describe la dependencia de una cantidad en otra se llama modelado. Se aprenderá cómo hallar modelos que se pueden construir con propiedades geométricas o algebraicas del objeto bajo estudio.

Los pasos que debemos seguir para modelar una situación problema y expresarla a través de una función son:

1. **Expresa el modelo en palabras.** Identifique la cantidad que quiere modelar y expésela, en palabras, planteando el problema a través de una oración, como una función de otras cantidades.
2. **Elija la variable.** Identifique las variables empleadas distinguiendo en cada caso cuál es la variable dependiente y cuál es la independiente.
3. **Establezca el modelo.** Expresa la función en el lenguaje del álgebra al escribirla como una expresión algebraica, y escribir la variable dependiente como función de la independiente elegida en el paso 2.
4. **Use el modelo.** Emplee la función para contestar las preguntas que le plantea el problema.

Ejemplo 1: Retomemos lo trabajado en la Unidad 2, al presentar el concepto de polinomios. Matías compró un terreno y quiere instalar una pileta de natación de forma rectangular. El arquitecto le dijo que:

- El largo debe ser el doble del ancho ($l = 2a$)
- La profundidad debe ser la mitad del ancho ($p = \frac{a}{2}$)

Costos asociados

- Material para paredes y piso: \$65/m²
- Soldadura para juntas: \$20/m
- Excavación: \$30/m³
- Traslado de materiales: \$100 (costo fijo)

Se pretende:

- a) Encontrar una fórmula para calcular el costo en función del ancho a
- b) Calcular el costo para $a = 5$ m
- c) Determinar si es posible construir con \$15,000 cuando $a = 6$ m

Obtuvimos que la función polinómica de costos es:

$$C(a) = 30a^3 + 325a^2 + 120a + 100$$

- b) Costo para $a = 5$ m

$$\begin{aligned} C(5) &= 30(5)^3 + 325(5)^2 + 120(5) + 100 \\ &= 30 \times 125 + 325 \times 25 + 600 + 100 \\ &= 3,750 + 8,125 + 600 + 100 \\ &= \$12,575 \end{aligned}$$

c) Factibilidad con \$15,000 para $a = 6$ m

$$\begin{aligned} C(6) &= 30(6)^3 + 325(6)^2 + 120(6) + 100 \\ &= 30 \times 216 + 325 \times 36 + 720 + 100 \\ &= 6,480 + 11,700 + 720 + 100 \\ &= \$19,000 \end{aligned}$$

Como \$19,000 > \$15,000, **no es posible** construir la pileta con \$15,000 cuando $a = 6$ m.

Ejemplo 2: Una compañía productora de cereales para desayuno fabrica cajas para envasar sus productos. Por razones estéticas, la caja debe tener las siguientes proporciones:

- Su ancho es el triple de su profundidad.
- Su altura es 5 veces su profundidad.

El volumen de una caja se calcula como:

$$V = \text{Ancho} \times \text{Profundidad} \times \text{Altura}.$$

(a) Encuentre una función que modele el volumen de la caja en términos de su profundidad.

(b) Encuentre el volumen de la caja si su profundidad es 4 cm

(c) ¿Para qué profundidad tendrá un volumen de 1479 cm^3

(d) ¿Para qué profundidad tendrá un volumen mayor a 986 cm^3

Solución

(a) La función del volumen en términos de la profundidad d (en cm) es:

$$V(d) = 15d^3.$$

(b) Si la profundidad es $d = 4$ cm, el volumen es:

$$V(4) = 15 \cdot 4^3 = 15 \cdot 64 = 960 \text{ cm}^3.$$

Por lo tanto, el volumen es $\boxed{960 \text{ cm}^3}$.

(c) Para encontrar la profundidad cuando el volumen es 1479 cm^3 , resolvemos la ecuación:

$$15d^3 = 1479.$$

Dividimos ambos lados entre 15:

$$d^3 = \frac{1479}{15} \approx 98,6.$$

Tomamos la raíz cúbica:

$$d = \sqrt[3]{98,6} \approx 4,6 \text{ cm}.$$

Redondeando al entero más cercano, la profundidad es $\boxed{5 \text{ cm}}$.

(d) Para encontrar la profundidad cuando el volumen es mayor a 986 cm^3 , resolvemos la desigualdad:

$$15d^3 > 986.$$

Dividimos ambos lados entre 15:

$$d^3 > \frac{986}{15} \approx 65,73.$$

Tomamos la raíz cúbica:

$$d > \sqrt[3]{65,73} \approx 4,03 \text{ cm.}$$

Redondeando al entero más cercano, la profundidad debe ser 5 cm o mayor.

Trabajo Práctico

Ejercicio 12. Exprese en lenguaje simbólico cada una de las situaciones a modelar:

- a. El área de un rectángulo de base x y altura h
- b. El perímetro del mismo rectángulo del item a.
- c. La medida de la diagonal del rectángulo del item a.
- d. El área de un rectángulo donde la altura es el doble de la medida de la base.
- e. El volumen de una caja con forma de cubo.
- f. El volumen de una caja de base cuadrada y altura h .
- g. El área de la caja del item 3. Si se considera que la caja tiene tapa.
- h. El área de la caja del item f. Si se considera sin tapa.
- i. El volumen de un cilindro de radio r y altura h .
- j. La superficie del cilindro del item i. (**Nota:** un cilindro no tiene “tapas”)

Ejercicio 13. Modela cada una de las situaciones planteadas a continuación; y responde las respectivas preguntas:

- a. Una represa, cuya capacidad es de 364 millones de litros de agua tiene una filtración. Desde el primer día del mes pierde agua de manera uniforme, a razón de 14 millones de litros diarios aproximadamente.
 - i. Hallar la función que describe la cantidad de agua que permanece en la represa cada día.
 - ii. Graficar esta función.
 - iii. ¿En cuántos días se vaciará la represa en caso de que no se solucione el problema?
- b. Se sabe que la función de producción $P(x)$ de un artículo es lineal, donde x es el dinero invertido. Si se invierten \$10000, se producen 92 artículos; si se invierten \$50500, se producen 497 artículos.
 - i. Escribe la función de producción.
 - ii. Si se desean producir 145 artículos, ¿cuál debe ser la inversión?
 - iii. Si la inversión es de \$8000, ¿cuál será la cantidad de artículos producida?
- c. Un objeto es lanzado hacia arriba. La altura en función del tiempo viene dada por la siguiente expresión:

$$y(t) = -4,9t^2 + 20t + 4$$

- i. Calcular en que instante el objeto cae al suelo.
 - ii. Determinar la posición inicial del objeto.
 - iii. Determinar el dominio natural y contextual de la función altura $y(t)$.
- d. Se sabe que el crecimiento vegetativo que se observa en una cierta especie de gusanos está representado por una función cuadrática. Se conoce que, tomando como día cero el de iniciación del proceso reproductivo, la cantidad máxima de gusanos que resultan es de 2.025 a los 45 días de iniciado el proceso. Considerar $a = -1$.
- i. ¿Cuántos días después de haberse iniciado el proceso se produce la extinción de los mismos?
 - ii. ¿Cuál es el número de gusanos a los diez días del inicio del proceso?
 - iii. ¿A los cuántos días el número de gusanos alcanza las 656?
- e. Un fabricante de relojes para taxis ha estimado que sus beneficios pueden deducirse de acuerdo con la siguiente función:

$$B(x) = -x^2 + 100x + 2400$$

En ella, x representa la cantidad de relojes que fabrica y vende al mes, mientras que B indica el beneficio que obtiene.

- i. ¿Qué cantidad de relojes debe vender para obtener el máximo beneficio?
¿Cuál es ese beneficio?
 - ii. ¿Entre qué dos cantidades debe vender a fin de no tener pérdidas?
 - iii. ¿Cuál es el beneficio que logra el fabricante al vender 30 relojes?
 - iv. ¿Qué cantidad de relojes debe vender si quiere obtener beneficios por \$3.300?
- f. La siguiente función determina la cantidad de pacientes que ingresan en un hospital después de x días del 1º de junio en el que empieza una epidemia de gripe.

$$P(x) = -5x^2 + 300x + 3500$$

En ella, $P(x)$ es el número de pacientes y x representa el tiempo transcurrido desde el inicio de la epidemia, expresado en días.

- i. ¿Cuál es el día en el que ingresan más pacientes?
- ii. ¿Cuál es la cantidad máxima que ingresó durante la epidemia?
- iii. ¿Cuántos pacientes ingresaron el día 06 de julio?
- iv. ¿Qué día ingresaron 6875 pacientes?

4. Álgebra de funciones

Al igual que los números, las funciones se pueden sumar, restar, multiplicar y dividir (restringiendo el dominio a aquellos valores para los cuales no anulen el denominador), y así obtener otras funciones.

Si f y g son dos funciones definidas para los conjuntos A y B , para cada x que pertenece al dominio **de ambas**, se definen las funciones resultantes de realizar las operaciones mediante las expresiones:

$$f(x) + g(x) = (f + g)(x) = h(x) \Rightarrow \text{Dom } h = \text{Dom } f \cap \text{Dom } g$$

$$f(x) - g(x) = (f - g)(x) = h(x) \Rightarrow \text{Dom } h = \text{Dom } f \cap \text{Dom } g$$

$$f(x) \cdot g(x) = (f \cdot g)(x) = h(x) \Rightarrow \text{Dom } h = \text{Dom } f \cap \text{Dom } g$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \left(\frac{f}{g}\right)(x) = h(x) \Rightarrow \text{Dom } h = \{x \in \text{Dom } f \cap \text{Dom } g \text{ y } g(x) \neq 0\}$$

Así, si el dominio de f es A y el dominio de g es B , entonces el dominio de h es la intersección de estos dominios, es decir, $A \cap B$.

Las funciones también se pueden multiplicar por constantes: si “ k ” es un número real, entonces la función $k \cdot f$ está definida para toda x en el dominio de f mediante:

$$kf(x) = h(x) \Rightarrow \text{Dom } h = \text{Dom } f$$

Para el proceso de graficación de una suma o resta de funciones, se deben sumar o restar respectivamente los valores de $x \in \text{Dom } f$ y g que se corresponden con cada coordenada y , la suma de estos.

Ejemplo: Álgebra de las Funciones

Dadas las siguientes funciones $f(x) = \sqrt{x+2}$ y $g(x) = \frac{x}{x-3}$ realice las operaciones:

$$f + g; \quad f - g; \quad f \cdot g; \quad g/f$$

Solución: Como primera medida debemos encontrar $\text{Dom } f$ y $\text{Dom } g$ para poder hallar la intersección de ambos dominios

$$x + 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2 \quad \therefore \text{Dom } f = [-2, \infty)$$

$$x - 3 \neq 0 \Rightarrow x \neq 3 \quad \therefore \text{Dom } g = \mathbb{R} - \{3\}$$

La intersección de los dominios será por tanto $\text{Dom } h = [-2, 3) \cup (3, \infty)$

$$\sqrt{x+2} + \frac{x}{x-3} = \frac{(x-3) \cdot \sqrt{x+2} + x}{x-3} = h(x)$$

$$\sqrt{x+2} - \frac{x}{x-3} = \frac{(x-3) \cdot \sqrt{x+2} - x}{x-3}$$

$$\sqrt{x+2} \cdot \frac{x}{x-3} = \frac{x \cdot \sqrt{x+2}}{x-3}$$

$$h(x) = \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{\frac{x}{x-3}}{\sqrt{x+2}} = \frac{x}{(x-3) \cdot \sqrt{x+2}}$$

$$\Rightarrow \text{Dom } h = (-2, 3) \cup (3, \infty)$$

Para resolver la división nos valemos de esta propiedad:

$$\frac{a/b}{c} = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{c} = \frac{a}{b \cdot c}$$

Trabajo Práctico

Ejercicio 14. Calcule las funciones $f + g$, $f - g$, fg , f/g . Analice de las funciones originales y las resultantes: dominio, ceros, ordenada al origen.

a. $f(x) = x - 3$; $g(x) = x^2$

b. $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$; $g(x) = \sqrt{x + 1}$

c. $f(x) = \frac{2}{x}$; $g(x) = \frac{4}{x+4}$

Composición de funciones

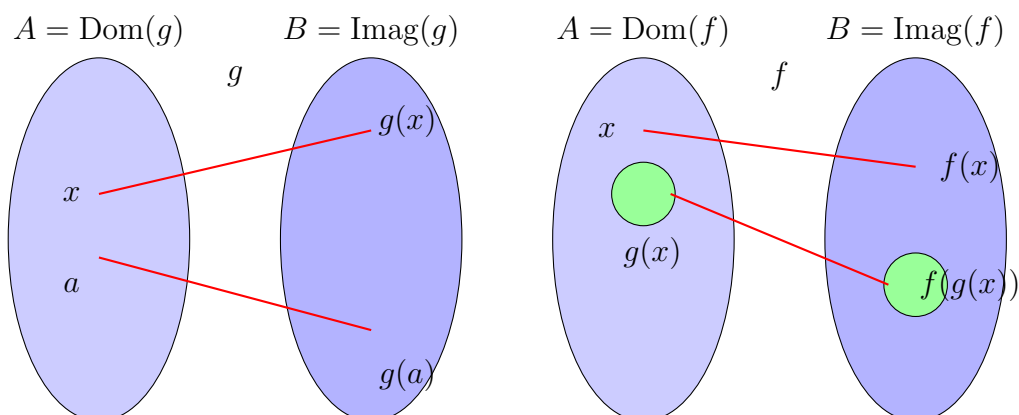
Sean las funciones g y f , donde g está definida de A en B y f de B en C , la composición $f \circ g$ es una nueva función, tal que:

El dominio de $f \circ g$ consiste en todos los números x del dominio de g para los cuales $g(x)$ está en el dominio de f , es decir:

$$\text{Im}(g) \subseteq \text{Dom}(f).$$

El dominio de la función compuesta es el dominio de la primera función aplicada (g) y el conjunto imagen de la función compuesta está incluido en el conjunto imagen de la segunda función (f).

Apliquemos el concepto de conjunto aprendido en la primera unidad, para entenderlo mejor:



Simbólicamente a la composición de dos funciones las expresamos:

$$f \circ g(x) = f(g(x))$$

Ejemplo: Composición de Funciones

Si se tiene que componer $f \circ g$, ambas definidas de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$, siendo $g(x) = x^2$ y $f(x) = x - 4$.

Solución:

Primero encontremos el dominio de ambas y la imagen de g .

Por ser una función polinómica el $\text{Dom}(g) = \mathbb{R}$ y su $\text{Im}(g) = \mathbb{R}^+ = (0, \infty)$.

$\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$.

Pero ahora debemos encontrar los valores de la imagen de g que están incluidos en el dominio de f , es decir el subconjunto de la imagen de g cuyos elementos pertenecen al dominio de f .

$\text{Dom } f(g(x)) = \mathbb{R}^+$.

Ahora realicemos la composición y veamos si podemos afirmar lo obtenido de forma analítica:

1. Primero identifiquemos bien cuál es la función para componer $f(x) = x - 4$ y cuál es la función dentro de la composición $g(x) = x^2$.

2. Ahora debemos reemplazar la variable independiente de f por la función g ; reescribiendo:

Si $f(x) = x - 4 \Rightarrow f(g(x)) = x^2 - 4$.

Revisando el dominio de la función que obtuvimos vemos que su dominio es $\text{Dom } (f \circ g)(x) = \mathbb{R}^+$.

Trabajo Práctico

Ejercicio 15. Encuentre las funciones $f \circ g$ y $g \circ f$. Analice de las funciones originales y las resultantes: dominio, ceros, ordenada al origen.

a. $f(x) = 2x + 3$; $g(x) = 4x - 1$

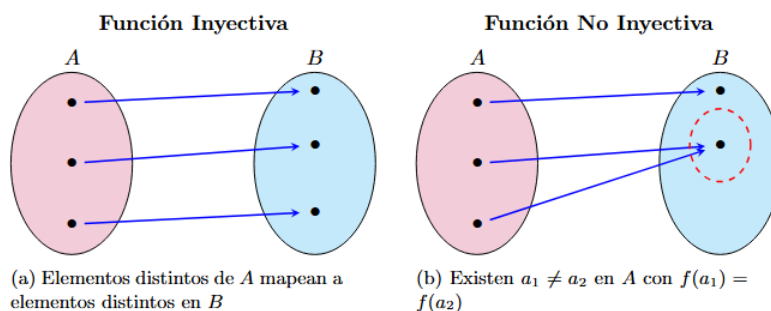
b. $f(x) = 6x - 5$; $g(x) = \frac{x}{2}$

c. $f(x) = x^2$; $g(x) = x + 1$

d. $f(x) = x^3 + 2$; $g(x) = \sqrt{x}$

5. Funciones Inyectivas, Sobreyectivas y Biyectivas

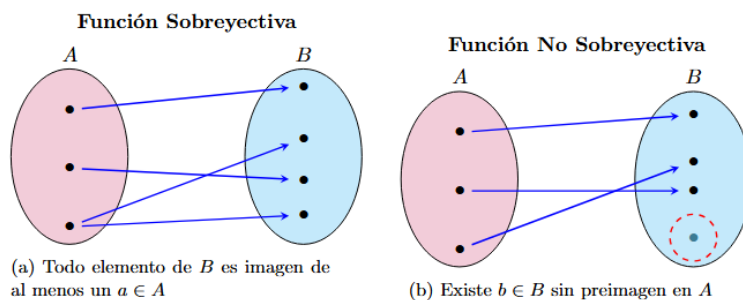
Hasta ahora, al analizar relaciones, hemos analizado solamente lo que ocurre en el conjunto de partida o primer conjunto. No nos ha preocupado ver qué pasa en el segundo conjunto, conjunto de llegada. Como el primer análisis ha permitido determinar cuáles de las relaciones son funciones, el análisis seguirá solamente para aquellas que son funciones.



Función suryectiva

También denominadas suprayectiva o sobreyectiva. Una función f definida de A en B es suryectiva “**si y sólo si**”, todos los elementos del conjunto B tienen, por lo menos una pre-imagen en A .

Dicho de otro modo, a cada elemento del conjunto B de la función le corresponde **al menos un** elemento del dominio de la misma.



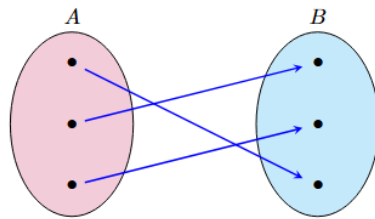
Función inyectiva

Una función f definida de A en B es inyectiva, **si y sólo si** todo par de elementos distintos del dominio tiene imágenes distintas. Es decir, cada elemento del conjunto de llegada es imagen **de sólo un** elemento del dominio de f .

Función biyectiva

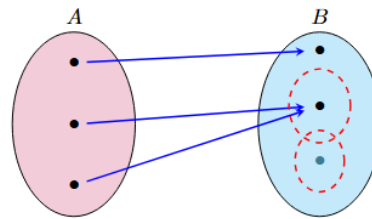
Si una función es Suryectiva e Inyectiva a la vez, decimos que la función es **bi-yectiva** y decimos que la función es *uno a uno* o que establece una *correspondencia biunívoca* entre su dominio y conjunto imagen.

Función Biyectiva



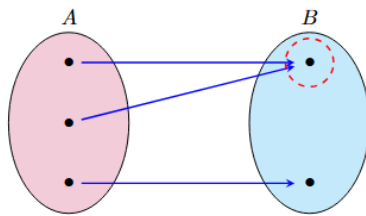
(a) Correspondencia uno a uno: cada $a \in A$ se empareja con un único $b \in B$ y viceversa

Función No Biyectiva
Ni inyectiva ni sobreyectiva



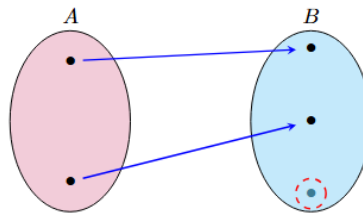
(b) Fallan ambas condiciones:
 $\exists b \in B$ sin preimagen y $\exists a_1 \neq a_2$ con $f(a_1) = f(a_2)$

No Biyectiva
Pero sí Sobreyectiva



(a) Falla inyectividad:
Elementos distintos con la misma imagen
Pero todo $b \in B$ tiene preimagen

No Biyectiva
Pero sí Inyectiva



(b) elemento sin preimagen
Pero f es inyectiva (elementos distintos tienen imágenes distintas)

Ejemplo: Analizaremos, sólo para ilustrar la biyectividad de la función $f(x) = \frac{x+4}{x-6}$. Este procedimiento no será evaluado.

El dominio de la función es $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{6\}$.

Sean $x_1, x_2 \in \text{Dom}(f)$ con $f(x_1) = f(x_2)$

Suposición inicial para probar inyectividad

$$\frac{x_1 + 4}{x_1 - 6} = \frac{x_2 + 4}{x_2 - 6}$$

Igualamos las imágenes por definición de f

$$(x_1 + 4)(x_2 - 6) = (x_2 + 4)(x_1 - 6)$$

Multiplicamos cruzado para eliminar denominadores

$$x_1x_2 - 6x_1 + 4x_2 - 24 = x_1x_2 - 6x_2 + 4x_1 - 24$$

Aplicamos propiedad distributiva

$$-6x_1 + 4x_2 = -6x_2 + 4x_1$$

Simplificamos términos iguales en ambos lados

$$-10x_1 = -10x_2$$

Agrupamos términos semejantes

$$x_1 = x_2$$

Dividimos ambos lados por -10

La igualdad $x_1 = x_2$ demuestra que f es inyectiva, pues elementos distintos del dominio tienen imágenes distintas.

Para verificar si es sobreyectiva, analizamos si para todo $y \in \mathbb{R}$ existe $x \neq 6$ tal que $y = \frac{x+4}{x-6}$.

$$y = \frac{x+4}{x-6}$$

Ecuación a resolver para x

$$y(x-6) = x+4$$

Multiplicamos ambos lados por $(x-6)$

$$yx - 6y = x + 4$$

Distribuimos y

$$yx - x = 6y + 4$$

Agrupamos términos con x

$$x(y-1) = 6y+4$$

Factor común x

$$x = \frac{6y+4}{y-1}$$

Despejamos x

Conclusión final: La función es biyectiva (inyectiva y sobreyectiva) en $\mathbb{R} - \{6\}$ a $\mathbb{R} - \{1\}$, pues:

- Es inyectiva (demostrado anteriormente)
- Es sobreyectiva pues para cada $y \neq 1$ existe $x = \frac{6y+4}{y-1} \neq 6$

6. Función inversa

Dada una relación R que aplica A en B , se llama **relación inversa** de R y se designa R^{-1} , a otra relación tal que para cada par ordenado (x, y) que verifica a R , el par ordenado (y, x) verifica a R^{-1} . Las funciones biyectivas son importantes porque son precisamente las funciones que poseen funciones inversas de acuerdo con la siguiente definición:

Definición: Sea f una función **biyectiva** con dominio A y rango B . Entonces su función inversa f^{-1} tiene dominio B y rango A ; y está definida por:

$$f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y$$

De la definición de función inversa podemos deducir que:

$$\text{Dom}(f) = \text{Im}(f^{-1}) \quad \text{y} \quad \text{Im}(f) = \text{Dom}(f^{-1})$$

Esta afirmación es otra manera de comprobar de forma sencilla que obtuvimos la función inversa correcta de nuestra función original. **Ejemplo:** Consideremos la función biyectiva:

$$f(x) = \frac{x+4}{x-6}$$

Ya comprobamos que la función es biyectiva, un requisito para admitir función inversa.

$$y = \frac{x+4}{x-6}$$

Preparamos para el despeje

$$y(x-6) = x+4$$

Eliminamos el denominador

$$xy - 6y = x + 4$$

Desarrollamos la multiplicación

$$xy - x = 6y + 4$$

Reorganización algebraica

$$x(y-1) = 6y+4$$

Extracción de factor común

$$x = \frac{6y+4}{y-1}$$

Despejamos x

$$f^{-1}(x) = \frac{6x+4}{x-1}$$

Intercambiamos variables y obtenemos de la función inversa

Verificación:

- $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{6\} = \text{Im}(f^{-1})$
- $\text{Im}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\} = \text{Dom}(f^{-1})$

La función obtenida satisface todas las propiedades de una función inversa. Una propiedad importante de las funciones que poseen inversas es que:

Si realizamos la composición de una función y su inversa; o viceversa, obtendremos como resultado la función identidad ($y = x$):

$$f \circ f^{-1}(x) = f(f^{-1}(x)) = x$$

$$f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}(f(x)) = x$$

Esto significa que al aplicar sucesivamente una función y su inversa (en cualquier orden), recuperamos el valor original de entrada.

Trabajo Práctico

Ejercicio 16. Encuentre la función inversa en los casos que sea posible. Analice de la función y de su inversa, en caso de que corresponda: dominio, conjunto imagen, ceros, ordenada al origen, indeterminaciones y signos. Represente gráficamente ambas funciones en un mismo sistema de coordenadas. (En los casos donde no puede obtenerse la inversa justifique por qué no es posible.)

a) $f(x) = 2x + 1$ b) $f(x) = 6 - x$ c) $f(x) = \frac{x}{2}$ d) $f(x) = \frac{1}{x^2}$

Trabajo Práctico-Ejercicios adicionales

Ejercicio 1: Calcule las funciones $f + g$, $f - g$, fg , f/g . Analice de las funciones originales y las resultantes: dominio, ceros, ordenada al origen, indeterminaciones, positividad y negatividad.

a.) $f(x) = x^2 + 2x - 5$; $g(x) = 3x^2 - 1$

b.) $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$; $g(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

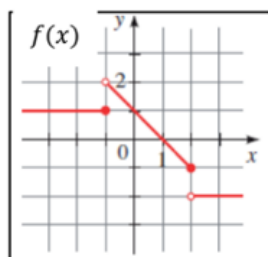
c.) $f(x) = \frac{2}{x+1}$; $g(x) = \frac{x}{x+1}$

Ejercicio 2: Encuentre la función inversa de f en los casos que sea posible, suponga el dominio natural de cada expresión.

Analice de la función y de su inversa, en caso de que corresponda: dominio, imagen, ceros, ordenada al origen, indeterminaciones y signos. Represente gráficamente ambas funciones en un mismo sistema de coordenadas.

a. $f(x) = \frac{1+3x}{5-2x}$ b. $f(x) = 5 - 4x^3$ c. $f(x) = \sqrt{2 + 5x}$

Ejercicio 3: Dada f en la imagen:



Determine:

- | | |
|-----------------------|--|
| a. Dominio | e. Conjuntos de positividad y de negatividad. |
| b. Conjunto imagen | f. Intervalos de crecimiento y de decrecimiento. |
| c. Ceros | |
| d. Ordenada al origen | |

Ejercicio 4: Una jardinera tiene 43 metros de malla para instalar una cerca en un jardín rectangular de hortalizas.

- Encuentre una función que modele el área del jardín que ella pueda cercar.
- ¿Para qué rango de anchos el área es mayor a 76 metros cuadrados?
- ¿Puede ella cercar un jardín con área de 116 metros cuadrados?
- Encuentre las dimensiones del área más grande que ella pueda cercar.

Ejercicio 5: Expresar las funciones que modelan las siguientes situaciones

- Un lote rectangular para construcción es tres veces más largo que ancho. Encuentre una función que modele su área A en términos de su ancho w .
 - Un cartel mide 25 cm más de largo que de ancho. Encuentre una función que modele su área A en términos de su ancho w .
 - Una caja rectangular tiene base cuadrada. Su altura es la mitad del ancho de la base. Encuentre una función que modele su volumen V en términos de su ancho w .
 - La altura de un cilindro es cuatro veces su radio. Encuentre una función que modele el volumen V del cilindro en términos de su radio r .
 - Un rectángulo tiene un perímetro de 6 metros. Encuentre una función que modele su área A en términos de la longitud x de uno de sus lados.
-
-

Bibliografía

- Altman, S.; y Otros (2001): Matemática, Buenos Aires, Longseller.
- Larson, R y Otros. (2012). Precálculo (8va. ed.) México D. F., Cengage Learning Editores S.A. de C.V.
- Stewart, J y Otros. (2001). Precálculo (6ta ed.) México D. F., International Thomson Editores, S.A.