Unidad 5

Función exponencial y logarítmica

En este apunte los estudiantes encontrarán contenidos básicos de:

- Potencia de exponente entero y exponente racional
- Potencia de exponente real
- La función exponencial – definición
- Gráfico de la función exponencial
- Ecuaciones exponenciales
- Propiedades de los logaritmos
- Cambio de base
- La función logarítmica
- Ecuaciones logarítmicas

Índice

1. Función exponencial **2**
Introducción . . . 2
Potencia de exponente entero y exponente racional . . . 2
Resumen de las propiedades . . . 2
Potencia de exponente real . . . 3

2. La función exponencial **4**
Gráfico de la Función Exponencial . . . 5
Caracterización de la función exponencial . . . 6

3. Ecuaciones exponenciales **7**
Métodos de Resolución . . . 7

4. Logaritmos **11**
Introducción . . . 11
Definición de logaritmo . . . 11
Logaritmos especiales: . . . 12
Propiedades de los logaritmos . . . 13
Cambio de base . . . 15

5. La función logarítmica **17**
Caracterización de la función logarítmica . . . 19
La función logarítmica como función inversa . . . 20
Dominio de funciones logarítmicas . . . 21

6. Ecuaciones logarítmicas **22**

1. Función exponencial

Introducción

Imaginemos que una institución bancaria tiene una tasa de interés fijo e igual a $i\,\%$ al mes para una determinada inversión. Supongamos que un inversor inicia con un capital de P pesos, una aplicación en este tipo de inversión. Vamos a analizar mes a mes el comportamiento de su saldo, suponiendo que no hace ninguna retirada de dinero.

Después del 1º mes tenemos:

$$\begin{aligned} \text{Capital} &: P \\ \text{Interés} &: P \cdot i \\ \text{Saldo } S(1) &: P + P \cdot i = P(1+i) \end{aligned}$$

Después del 2º mes tenemos:

$$\begin{aligned} \text{Capital} &: P(1+i) \\ \text{Interés} &: [P(1+i)] \cdot i = P(1+i) \cdot i \\ \text{Saldo } S(2) &: P(1+i) + P(1+i) \cdot i = P(1+i) \cdot (1+i) = P(1+i)^2 \end{aligned}$$

Procediendo de la misma manera, llegaremos a la conclusión
Después del 3º mes tenemos un: Saldo $S(3) = P(1+i)^3$
Después del 4º mes tenemos un: Saldo $S(4) = P(1+i)^4$

$$\vdots$$

Después del n-ésimo mes tenemos un: Saldo $S(n) = P(1+i)^n$
La fórmula utilizada $S(n) = P(1+i)^n$ es una función del tipo exponencial, pues la variable n aparece en el exponente.

Hemos visto funciones del tipo

POLINOMIALES	RACIONALES
$f(x) = x^n$	$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ con $Q(x) \neq 0$

Veremos ahora **funciones exponenciales**, donde x será el exponente de alguna expresión
Con la finalidad de estudiar esta función haremos un **breve repaso** de las propiedades de la potencia.

Potencia de exponente entero y exponente racional

Resumen de las propiedades

Para $x \in \mathbb{R}^*$ e $y \in \mathbb{R}^*$; $a \in \mathbb{Q}$; $b \in \mathbb{Q}^*$, con $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$ y $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} - \{0\}$:

Propiedad	**Expresión Matemática**	**Ejemplo**
Producto de potencias de igual base	$x^a \cdot x^b = x^{a+b}$	$2^3 \cdot 2^4 = 2^7 = 128$
Cociente de potencias de igual base	$x^a \div x^b = x^{a-b}$	$5^6 \div 5^2 = 5^4 = 625$
Distributiva de la potencia con respecto al producto	$(x \cdot y)^a = x^a \cdot y^a$	$(3 \cdot 4)^2 = 3^2 \cdot 4^2 = 144$
Potencia de una expresión fraccionaria	$\left(\frac{x}{y}\right)^a = \frac{x^a}{y^a}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$
Potencia de otra potencia	$(x^a)^b = x^{a \cdot b}$	$(7^2)^3 = 7^6 = 117649$
Potencia con exponente 1	$x^1 = x$	$9^1 = 9$
Potencia con exponente 0	$x^0 = 1$	$4^0 = 1$
Exponente negativo	$x^{-a} = \left(\frac{1}{x}\right)^a$	$2^{-3} = \frac{1}{8}$
Exponente fraccionario (raíz)	$x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$	$8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = 4$

Ejemplo:

a. $2^3 \cdot 2^4 = 2^{3+4} = 2^7 = 128$

b. $3^{\frac{3}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}} = 3^{\frac{5}{2}} = \sqrt[2]{3^5} = 3\sqrt{3}$

c. $5^4 \div 5^3 = 5^{4-3} = 5^1 = 5$

d. $3^5 \div 3^5 = 3^{5-5} = 3^0 = 1$

e. $2^4 \div 2^5 = 2^{4-5} = 2^{-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}$

Potencia de exponente real

Es importante saber que las propiedades de las potencias para exponentes racionales permanecen válidas para exponentes irracionales.

Recordando que la unión de los números racionales $\mathbb{Q}$, con los irracionales $\mathbb{I}$, o sea $\mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$, dá como resultado los números reales $\mathbb{R}$, tenemos:

Importante: Las propiedades de las potencias para exponentes racionales permanecen válidas para exponentes reales (si la base es positiva).

Observación:

- En el caso particular de α real y positivo, tenemos $0^\alpha = 0$.

- Sin embargo, 0^0 es una indeterminación.

Ejemplos:

Calcular:

a. $3^{\sqrt{2}} \cdot 3^5 = 3^{\sqrt{2}+5}$

b. $5^{3\pi} \div 5^{2\pi} = 5^{3\pi - 2\pi} = 5^{\pi}$

c. $\left(\frac{3}{4}\right)^{\sqrt{5}} \div \left(\frac{3}{4}\right)^{\sqrt{5}} = \left(\frac{3}{4}\right)^{\sqrt{5}-\sqrt{5}} = \left(\frac{3}{4}\right)^{0} = 1$

2. La función exponencial

Recordando el ejemplo de la introducción, podemos definir la función exponencial así:

Sea a un número real positivo y diferente de 1 ($a \in \mathbb{R}^+$ y $a \neq 1$) definimos la función exponencial con base a a la función

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$$

definida por $f(x) = a^x$

Son ejemplos de funciones exponenciales:

a. $f(x) = 5^x$ (en este caso la base es 5)

b. $f(x) = (0,4)^x$ (en este caso la base es 0,4)

c. $f(x) = (\sqrt{5})^x$ (en este caso la base es $\sqrt{5}$)

Trabajo Práctico

Ejercicio 1.En las siguientes expresiones, identifique las que definen a funciones exponenciales:

a. $y = 10^x$

b. $f(x) = x^{10}$

c. $y = 10x$

d. $y = \frac{10}{x}$

e. $f(x) = (0,1)^x$

f. $y = \frac{2^x}{3^x}$

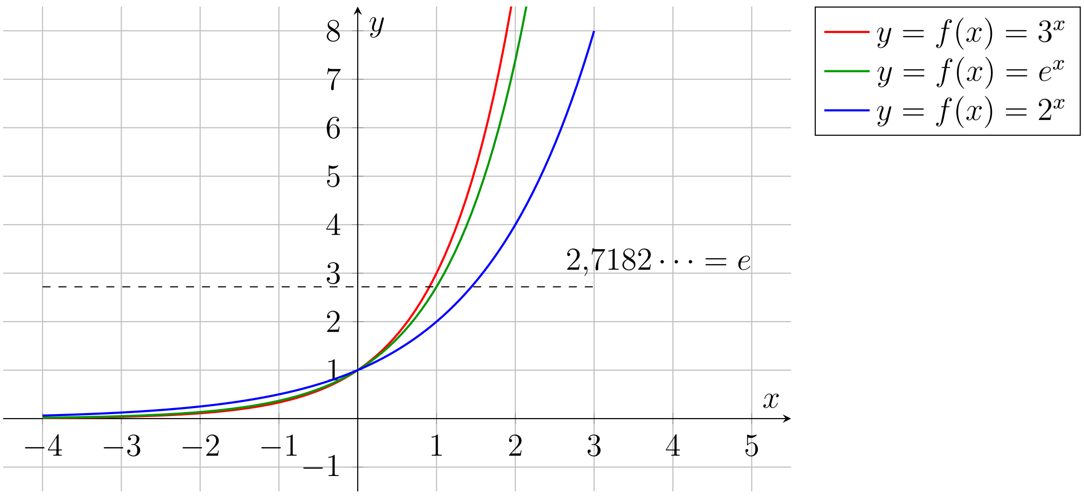
Si la base a es 10, la misma se conoce como **base decimal** y la función $f(x) = 10^x$ se conoce como **función exponencial decimal**, haciendo referencia a la base 10.

En numerosas aplicaciones, la opción más adecuada para una base es el número irracional

$$e = 2{,}718281828\ldots$$

conocido como número *neperiano*. Recuerde que $2 < e < 3$.

Cuando este número es usado como base de la potencia, la función dada por $f(x) = e^x$ recibe el nombre de **función exponencial natural**. Su gráfica se ilustra en la siguiente figura y se compara con las funciones exponenciales de base 2 y 3.



Asegúrese de ver que para la función exponencial $f(x) = e^x$, e sea la constante $2{,}718281828\ldots$, mientras x sea la variable.

Para todos los otros casos es sólo llamada **función exponencial**.

Gráfico de la Función Exponencial

Las gráficas de todas las funciones exponenciales tienen características semejantes. Analizaremos la imagen de la gráfica de funciones exponenciales a través de algunos ejemplos.

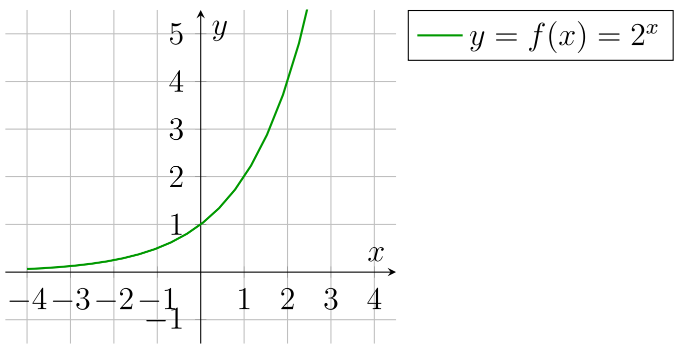
Ejemplo 1:

$$y = f(x) = 2^x$$

Construimos una tabla de valores con los puntos pertenecientes al gráfico cartesiano de la función, atribuyendo valores arbitrarios a x y, enseguida, calculando el valor de $f(x)$ para cada uno de esos valores. Ejemplo:

$$y = f(-2) = 2^{-2} = \frac{1}{4}; \qquad y = f(-1) = 2^{-1} = \frac{1}{2};$$
$$y = f(0) = 2^0 = 1; \qquad y = f(1) = 2^1 = 2;$$
$$y = f(2) = 2^2 = 4$$

x	$f(x) = 2^x$
-2	$\frac{1}{4}$
-1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4



Observamos que cuanto menor es el valor de x, más los puntos del gráfico de la función se aproximan del *eje x*, sin embargo, no llega a tocarlo nunca. La recta sostén del *eje x*, por este motivo es llamada asíntota a la curva; palabra que viene del latín .ªsymptota”que significa ”línea”.

Ejemplo 2:

$$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

Se deja como tarea completar este ejemplo siguiendo el mismo procedimiento del Ejemplo 1

Caracterización de la función exponencial

Podemos resumir las propiedades de la gráfica de la función $f(x) = a^x$:

1. Dominio: $\mathbb{R}$
2. Imagen: $\mathbb{R}^+$ (reales positivos)
3. Siempre pasa por $P(0, 1)$
4. La función es inyectiva, o sea que:
$$f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$$
5. La función es sobreyectiva, o sea que:
$$\forall y \in \mathbb{R}^+, \exists x \in \mathbb{R} \text{ tal que } y = a^x$$
6. De (4) y (5) podemos decir que la función es biyectiva.
7. Si $a > 1$, la función es creciente, o sea:
$$x_1 > x_2 \implies a^{x_1} > a^{x_2}$$
8. Si $0 < a < 1$, la función es decreciente, o sea:
$$x_1 > x_2 \implies a^{x_1} < a^{x_2}$$
9. El eje x es asíntota de la gráfica.

Como hemos visto en los ejemplos y ejercicios anteriores se puede ver que la gráfica de una función exponencial es siempre creciente o decreciente. En consecuencia, las gráficas pasan la prueba de la recta horizontal y, por tanto, las funciones son uno a uno o inyectivas.

Trabajo Práctico
Ejercicio 2. La función $f(x) = 5^x$ es una función exponencial con base _____. Evalúe:

a. $f(-2) =$

b. $f(0) =$

c. $f(2) =$

d. $f(6) =$

Ejercicio 3.Trace la gráfica de la función haciendo una tabla de valores. Use calculadora si es necesario.

a. $f(x) = 3^x$

b. $h(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

Ejercicio 4. Verifique si las funciones son crecientes o decrecientes en $\mathbb{R}$. Justifique.

a. $f(x) = (1{,}6)^x$

b. $y = 10^x$

c. $f(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^x$

d. $y = (10^{-1})^x$

e. $f(x) = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^x$

f. $y = \pi^x$

g. $y = (\sqrt{2} - 1)^x$

h. $y = \left(\frac{3}{\sqrt{5}}\right)^{-x}$

i. $y = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{-x}$

Ejercicio 5.Represente gráficamente las siguientes funciones (utilice los conceptos aprendidos sobre desplazamiento de gráficas)

a. $y = 3^x - 1$

b. $y = 2^{x+1}$

c. $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}$

d. $y = 1 + 2^x$

e. $f(x) = -3^x$

f. $g(x) = 2^x - 3$

g. $h(x) = 4 + \left(\frac{1}{2}\right)^x$

Ejercicio 6. Encuentre las funciones $f \circ g$ y $g \circ f$; y determine sus dominios.

$$f(x) = 2^x, \quad g(x) = x + 1$$

---

3. Ecuaciones exponenciales

Llamamos **ecuación exponencial** a toda ecuación que presenta la incógnita en el exponente. Son ejemplos de ecuaciones exponenciales:

$$3^x = 1 \quad ; \quad 5^{x-3} = 10 \cdot 2^{x-1} \quad ; \quad \pi^x = 3$$

Resolver una ecuación exponencial significa encontrar el valor (o valores) de la incógnita que haga la ecuación una sentencia numérica verdadera. Por ejemplo, en la ecuación $2^x = 32$, el valor $x = 5$ es una raíz, pues $2^5 = 32$.

Métodos de Resolución

Es posible transformar (a través de las propiedades) algunas ecuaciones en otras equivalentes que posean, en ambos miembros, potencias de la misma base (mayor que cero y distinto de 1). Obtenido esto, y recordando que la función $y = a^x$ es inyectiva, llegamos a una ecuación que envuelve solamente los exponentes de los dos miembros.

Cuando no es posible obtener potencias de la misma base en los dos miembros, utilizaremos otros métodos, en especial los **logaritmos**.

Nota: En esta parte del curso, no haremos uso de los logaritmos para resolver las ecuaciones exponenciales.

Ejemplo 1 Resolver la ecuación $3^x = 9$.

Solución:

$$\begin{aligned} 3^x &= 9 \\ 3^x &= 3^2 \quad \text{(expresamos 9 como potencia de 3)} \\ x &= 2 \quad \text{(por la propiedad biunívoca)} \end{aligned}$$

El conjunto solución es $S = \{2\}$.

Ejemplo 2 Resolver la ecuación $\sqrt{3} = 27^x$.

Solución:

$$\begin{aligned} \sqrt{3} &= 3^{\frac{1}{2}} \quad \text{y} \quad 27 = 3^3, \text{ entonces:} \\ 3^{\frac{1}{2}} &= (3^3)^x \\ 3^{\frac{1}{2}} &= 3^{3x} \\ 3x &= \frac{1}{2} \\ x &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

El conjunto solución es $S = \left\{\frac{1}{6}\right\}$.

Ejemplo 3 Resolver la ecuación

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{5x} = \left(\frac{27}{8}\right).$$

Solución:

$$\frac{27}{8} = \frac{3^3}{2^3} = \left(\frac{3}{2}\right)^3 \quad \Rightarrow \quad \frac{27}{8} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-3}, \text{ entonces:}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{2}{3}\right)^{5x} &= \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} \\ 5x &= -3 \\ x &= -\frac{3}{5} \end{aligned}$$

El conjunto solución es $S = \left\{-\frac{3}{5}\right\}$.

Trabajo Práctico

Ejercicio 7.Siendo $U = \mathbb{R}$, resuelva las ecuaciones exponenciales:

a. $5^x = 125$	c. $125 \cdot 5^x - 1 = 0$	e. $\sqrt{8^x} = 64$
b. $81 - 3^x = 0$	d. $2^x = \sqrt{2}$	f. $8^x = \sqrt[5]{64}$

Conitnuemos con algunos ejemplos más de ecuaciones.
Ejemplo 4: Resolver la ecuación $2^x + 2^{x+1} = 24$
Solución

$$\begin{aligned}
2^x + 2^x \cdot 2 &= 24 \\
2^x(1+2) &= 24 \quad \text{(Factor común } 2^x\text{)} \\
2^x \cdot 3 &= 24 \\
2^x &= \frac{24}{3} \\
2^x &= 8 \\
2^x &= 2^3 \\
x &= 3
\end{aligned}$$

El conjunto solución es $S = \{3\}$.
Ejemplo 5: Resolver la ecuación $3 \cdot 2^{x+1} - 4 \cdot 2^{x-2} - 6 \cdot 2^x = -4$
Solución:

$$\begin{aligned}
3 \cdot 2^{x+1} - 4 \cdot 2^{x-2} - 6 \cdot 2^x &= -4 \\
3 \cdot 2 \cdot 2^x - 4 \cdot \frac{2^x}{4} - 6 \cdot 2^x &= -4 \quad \text{(Aplicando } 2^{x+1} = 2 \cdot 2^x \text{ y } 2^{x-2} = \frac{2^x}{4}\text{)} \\
6 \cdot 2^x - 2^x - 6 \cdot 2^x &= -4 \quad \text{(Simplificando coeficientes)} \\
(6-1-6) \cdot 2^x &= -4 \quad \text{(Factor común } 2^x\text{)} \\
-2^x &= -4 \\
2^x &= 4 \quad \text{(Multiplicando por } -1\text{)} \\
2^x &= 2^2 \\
x &= 2
\end{aligned}$$

Ejemplo 6: Resolver la ecuación $9^x = \left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-x}$
Solución:

$$\begin{aligned}
9^x &= \left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-x} \\
(3^2)^x &= (3^{-1})^{x^2-x} && \text{(Conversión a base 3)} \\
3^{2x} &= 3^{-x^2+x} && \text{(Propiedad } (a^m)^n = a^{mn}\text{)} \\
2x &= -x^2 + x && \text{(Igualando exponentes)} \\
x^2 + x &= 0 && \text{(Reordenando términos)} \\
x(x+1) &= 0 && \text{(Factorización)} \\
x = 0 \quad \text{o} \quad x &= -1
\end{aligned}$$

El conjunto solución es $S = \{-1, 0\}$.

Trabajo Práctico
Ejercicio 8.Siendo $U = \mathbb{R}$, resuelva las ecuaciones exponenciales:

a. $3^{x-4} + 3^x = \frac{82}{27}$

b. $\left(\frac{0,5}{3}\right)^{3x-2} = 1$

c. $\sqrt[5]{23^x} = \sqrt[6]{22^{x-4}}$

d. $\frac{5^x}{5^4} = \left(\frac{1}{5}\right)^{x+1}$

e. $\frac{8^x}{4^{x-1}} = 2^{x+2}$

Ejemplo 7: Presentamos este último ejemplo, sólo a modo ilustrativo. Resolver la ecuación $4^x - 3 \cdot 2^{x-1} - 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2-x} = 10 + 2 \cdot 2^{x+1}$

Solución:

Analizaremos los términos de ambos miembros por separado y luego los sustituiremos en la ecuación exponencial.

Así:

$$4^x = (2^2)^x = 2^{2x} = (2^x)^2 \tag{1}$$

$$2^{x-1} = \frac{2^x}{2} \tag{2}$$

$$\frac{1}{2} = 2^{-1} \tag{3}$$

$$2^{x+1} = 2^x \cdot 2 \tag{4}$$

Sustituyendo en la ecuación dada, tenemos:

$$4^x - 3 \cdot 2^{x-1} - 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2-x} = 10 + 2 \cdot 2^{x+1}$$

$$(2^x)^2 - 3 \cdot \frac{2^x}{2} - 5 \cdot (2^{-1})^{2-x} = 10 + 2 \cdot 2^x \cdot 2$$

Reescribiendo:

$$(2^x)^2 - \frac{3}{2} \cdot 2^x - 5 \cdot (2)^{x-2} = 10 + 4 \cdot 2^x \tag{5}$$

Como $(2)^{x-2} = \frac{2^x}{2^2} = \frac{2^x}{4}$

Reemplazando (6) en (5) y reescribiendo:

$$(2^x)^2 - \frac{3}{2} \cdot 2^x - \frac{5}{4} \cdot 2^x = 10 + 4 \cdot 2^x \tag{7}$$

Si hacemos $2^x = y$

$$(y)^2 - \frac{3}{2} \cdot y - \frac{5}{4} \cdot y = 10 + 4 \cdot y$$

Multipliquemos por 4 ambos miembros para eliminar las fracciones y trabajar con coeficientes enteros.

$$4 \cdot [(y)^2 - \frac{3}{2} \cdot y - \frac{5}{4} \cdot y] = 4 \cdot [10 + 4 \cdot y]$$

$$4y^2 - 6y - 5y = 40 + 16y$$

Distributiva en ambos miembros

Efectuando las operaciones algebraicas necesarias, tenemos:

$$4y^2 - 27y - 40 = 0 \tag{9}$$

Las raíces de (9) son $y_1 = 8$ e $y_2 = -\frac{5}{4}$.
Para $y_1 = 8$, en (8) tenemos:

$$2^x = 8 \Rightarrow 2^x = 2^3 \Rightarrow x = 3$$

Para $y_2 = -\frac{5}{4}$, en (8) tenemos:

$$2^x = -\frac{5}{4}$$

lo cual es imposible pues el rango de la función exponencial son los reales positivos, o sea, $a^x > 0$ para todo x real.

Por lo tanto, el conjunto solución es:

$$S = \{3\}$$

4. Logaritmos

Introducción

En la sección anterior vimos cómo es sencillo resolver una ecuación exponencial cuando es posible obtener en ambos miembros de la igualdad potencias de la misma base. Por ejemplo:

$$2^x = 64 \quad \Rightarrow \quad 2^x = 2^6 \quad \Rightarrow \quad x = 6 \quad \Rightarrow \quad S = \{6\}$$

En la sección anterior nunca resolvimos ecuaciones del tipo $5^x = 12$, pues es imposible obtener en ambos miembros potencias de la misma base.

Las funciones exponenciales tienen una base constante y un exponente variable. La inversa de la función exponencial es la función logarítmica.

Para abordar este tema, pasaremos inicialmente al estudio de los logaritmos como operación matemática, para después estudiar la función inversa de la exponencial, o sea, la función logarítmica.

Definición de logaritmo

Obtener el logaritmo de un número (en cualquier base) es una operación aritmética binaria, es decir, la siguiente función:

$$\log : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$$
$$(a, b) \mapsto c = \log_a b \quad (1)$$

Observemos que:

$$a^c = a^{\log_a b} = b \quad (2)$$

Ejemplo:

$$2^5 = 32$$
$$e^{\ln 5} = 5$$

Es común decir: "simplificamos la base con el logaritmo". En realidad, sólo estamos usando la definición de logaritmo.

Recordemos entonces que:

El logaritmo de un número positivo b, en una cierta base a, positiva y diferente de 1, es el exponente al cual se debe elevar la base a, de modo a obtener ese número b.

Comparando esta última expresión con el ejemplo dado al comienzo, $5^x = 12$, podemos observar que $a = 5$ y $b = 12$, por lo que $x = 12$.

Si bien no sabemos cuál es el valor de x, podemos afirmar que:

$$1 < x < 2$$

pues

$$5^1 < 12 < 5^2$$

Veremos más adelante una forma de calcular x, mediante un cambio de base (en este curso), o una serie de potencias.

Logaritmos especiales:

Si la base es 10, colocamos simplemente $\log b$. O sea, $\log b = x \iff 10^x = b$.

Si la base es el ya conocido número e, usamos el siguiente símbolo $\ln b$. O sea, $\ln b = x \iff e^x = b$.

El símbolo "$\ln b$" se lee: "logaritmo natural".

Ejemplo 1 Determinar x en los siguientes casos:

a. $\log_5 5 = x$

b. $\log_{3/4}\left(\frac{3}{4}\right) = x$

c. $\log_2 1 = x$

d. $\log_{1/2} 1 = x$

Solución:

a. $\log_5 5 = x \Rightarrow 5^x = 5 \Rightarrow 5^x = 5^1 \Rightarrow x = 1$

b. $\log_{3/4}\left(\frac{3}{4}\right) = x \Rightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^x = \frac{3}{4} \Rightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^x = \left(\frac{3}{4}\right)^1 \Rightarrow x = 1$

c. $\log_2 1 = x \Rightarrow 2^x = 1 \Rightarrow 1 = 2^0 \Rightarrow 2^x = 2^0 \Rightarrow x = 0$

d. $\log_{1/2} 1 = x \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x = 1 \Rightarrow 1 = \left(\frac{1}{2}\right)^0 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^0 \Rightarrow x = 0$

Podemos observar que:

- El logaritmo de la base es 1: $\log_a a = 1$
- El logaritmo de 1 es cero independientemente de la base: $\log_a 1 = 0$

Ejemplo 2: Determinar x en los siguientes casos:

a. $\log_6 36 = x$

b. $\log_7 49 = x$

Solución:

a. $\log_6 36 = x \Rightarrow 6^x = 36 \Rightarrow 36 = 6^2 \Rightarrow 6^x = 6^2 \Rightarrow x = 2$

b. $\log_7 49 = x \Rightarrow 7^x = 49 \Rightarrow 49 = 7^2 \Rightarrow 7^x = 7^2 \Rightarrow x = 2$

Trabajo Práctico

Ejercicio 9. Complete según la definición de logaritmos:

$$5^3 = 125, \text{ entonces } \log \square = \ldots\ldots$$

$$\log_5 25 = 2, \text{ entonces } \square = \ldots\ldots$$

Ejercicio 10.Usando la definición de logaritmo, determine el valor de x (sin usar calculadora):

a. $\log_{10} 10 = x$

b. $\log_{25} 1 = x$

c. $\log_{0{,}01} 0{,}1 = x$

d. $\log_{10} x = 0$

e. $\log_5 x = -3$

f. $\log_{\sqrt{5}} x = \frac{2}{3}$

g. $\log_{\sqrt{3}}(2x) = -4$

h. $\log_{0{,}1} \frac{x}{4} = -1$

Ejercicio 11. Complete los espacios en blanco:

Fórmula logarítmica	**Forma exponencial**	**Forma logarítmica**	**Forma exponencial**
$\log_8 8 = 1$			$4^3 = 64$
$\log_8 64 = 2$		$\log_4 2 = \frac{1}{2}$	
	$8^{2/3} = 4$		$4^{3/2} = 8$
	$8^3 = 512$	$\log_4\left(\frac{1}{16}\right) = -2$	
$\log_8\left(\frac{1}{8}\right) = -1$		$\log_4\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$	
	$8^{-2} = \frac{1}{64}$		$4^{-5/2} = \frac{1}{32}$

Ejercicio 12. Resuelva las siguientes expresiones, sin usar calculadora:

a. $\log_3 \dfrac{1}{27} =$

b. $\log_{16} \sqrt{2} =$

c. $\log_4 \sqrt{2} =$

d. $\log_8 0{,}25 =$

e. $\log_{49} 7 =$

f. $\log_{25} \sqrt[3]{5} =$

g. $\log_{\frac{1}{2}} \dfrac{1}{4} =$

h. $\log_{\sqrt{2}}(2\sqrt{2}) =$

Propiedades de los logaritmos

Sea a un número positivo, con $a \neq 1$. Sean A, B y C números reales cualesquiera con $A > 0$ y $B > 0$.

Propiedad	**Explicación**
$\log_a(A \cdot B) = \log_a A + \log_a B$	El logaritmo de un producto es la suma de los logaritmos de los factores
$\log_a\left(\dfrac{A}{B}\right) = \log_a A - \log_a B$	El logaritmo de un cociente es la diferencia de los logaritmos del numerador y denominador
$\log_a(A^C) = C \cdot \log_a A$	El logaritmo de una potencia es el exponente multiplicado por el logaritmo de la base

Veamos ejemplos de estas propiedades

Ejemplo 1. Aplicar la propiedad del logaritmo de un producto (a esto se lo conoce como .expansión"de la expresión):

a. $\log_3\left(0{,}2 \cdot \frac{1}{3}\right) = \log_3(0{,}2) + \log_3\left(\frac{1}{3}\right)$

b. $\log_3(5 \cdot 2) = \log_3(5) + \log_3(2)$

c. $\log_5(a \cdot b \cdot c) = \log_5(a) + \log_5(b) + \log_5(c)$

Ejemplo 2. Aplicar la propiedad del logaritmo de un producto

a. $\log_3 2 + \log_3 7 = \log_3(2 \cdot 7) = \log_3(14)$

b. $\log_2 3 + \log_2 5 + \log_2 10 = \log_2(3 \cdot 5 \cdot 10) = \log_2(150)$

c. $\log_5 2 + \log_5\left(\frac{1}{2}\right) = \log_5\left(2 \cdot \frac{1}{2}\right) = \log_5 1 = 0$

Ejemplo 3. Aplicar la propiedad del logaritmo de un cociente (expansión):

a. $\log_8\left(\frac{5}{2}\right) = \log_8 5 - \log_8 2$

b. $\log_{10}(0{,}2) = \log\left(\frac{2}{10}\right) = \log 2 - \log 10 = \log 2 - 1$

Ejemplo 4. Aplicar la propiedad del logaritmo de un cociente (combinación):

a. $\log_3 2 - \log_3 7 = \log_3\left(\frac{2}{7}\right)$

b. $\log_2 10 - \log_2 5 = \log_2\left(\frac{10}{5}\right) = \log_2 2 = 1$

c. $\log_3(2{,}5) - \log_3(10) = \log_3\left(\frac{2{,}5}{10}\right) = \log_3(0{,}25)$

Ejemplo 5. Aplicar propiedades combinadas:

a. $\log_d\left(\frac{a \cdot b}{c}\right) = \log_d(a) + \log_d(b) - \log_d(c)$

b. $\log_3\left(\frac{3a}{b}\right) = 1 + \log_3 a - \log_3 b$

Ejemplo 6. Aplicar la propiedad del logaritmo de una potencia (expansión):

a. $\log_{15}(3^2) = 2 \cdot \log_{15}(3)$

b. $\log_3(10^{-4}) = (-4) \cdot \log_3(10)$

c. $\log \sqrt[3]{2} = \log\left(2^{\frac{1}{3}}\right) = \frac{1}{3} \cdot \log 2$

Ejemplo 7. Aplicar la propiedad del logaritmo de una potencia (combinación):

a. $5 \cdot \log_6 2 = \log_6 2^5 = \log_6 32$

b. $(-10) \cdot \log_2 5 = \log_2 5^{-10} = \log_2\left(\frac{1}{5^{10}}\right)$

Trabajo Práctico

Ejercicio 13.Use la Ley de Logaritmos para expandir las expresiones:

a. $\log_3(5y)$

b. $\log_2(x(x-1))$

c. $\log_6 \sqrt[4]{17}$

d. $\log_5 \sqrt[3]{x^2+1}$

e. $\ln \sqrt{ab}$

f. $\ln \sqrt[3]{3r^2 s}$

g. $\log_2\left(\frac{x(x^2+1)}{\sqrt{x^2-1}}\right)$

h. $\log \sqrt{\frac{x^2+4}{(x^2+1)(x^3+7)^2}}$

i. $\log \sqrt{x\sqrt{y\sqrt{z}}}$

Ejercicio 14. Use las Leyes de Logaritmos para combinar cada expresión:

a. $\log_2 A + \log_2 B + 2\log_2 C$

b. $4\log x - \frac{1}{3}\log(x^2+1) + 2\log(x-1)$

c. $\ln 5 + 2\ln x + 3\ln(x^2+5)$

d. $2(\log_5 x + 2\log_5 y - 3\log_5 z)$

e. $\frac{1}{3}\log(x+2)^3 + \frac{1}{2}[\log x^4 - \log(x^2-x-6)^2]$

f. $\log_a b + c\log_a d - r\log_a s$

Cambio de base

En algunos casos, es útil cambiar de logaritmos de una base a logaritmos de otra base. Suponga que se da $\log_a x$ y se quiere hallar $\log_b x$. Sea

$$y = \log_b x$$

(1)

Podemos escribir esto en forma exponencial y tomar el logaritmo, con base a, de cada lado.

$$\begin{aligned}
b^y &= x \quad \text{(Forma exponencial)}\\
\log_a b^y &= \log_a x \quad \text{(Tomando } \log_a \text{ de cada lado)}\\
y \cdot \log_a b &= \log_a x \quad \text{(Ley del logaritmo de una potencia)}\\
y &= \frac{\log_a x}{\log_a b} \quad \text{(Dividiendo por } \log_a b\text{)}
\end{aligned}$$

De (1) y (2) obtenemos:

Fórmula de cambio de base

$$\boxed{\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}}$$

Ejemplo
Aplicar la fórmula para expresar en base 5:

a. $\log_3 2 = \dfrac{\log_5 2}{\log_5 3}$

b. $\log_7 \sqrt{2} = \dfrac{\log_5 \sqrt{2}}{\log_5 7} = \dfrac{\frac{1}{2}\log_5 2}{\log_5 7}$

c. $\log_2 5 = \dfrac{\log_5 5}{\log_5 2} = \dfrac{1}{\log_5 2}$

d. $\log_3 \left(\dfrac{1}{5}\right) = \dfrac{\log_5 \left(\frac{1}{5}\right)}{\log_5 3} = \dfrac{-1}{\log_5 3}$

Importante

- En el inciso b., $\sqrt{2} = 2^{1/2}$ y por propiedad de logaritmos: $\log_b x^n = n \log_b x$
- En el inciso c), $\log_5 5 = 1$ por definición
- En el inciso d), $\dfrac{1}{5} = 5^{-1}$ y $\log_b \dfrac{1}{x} = -\log_b x$
- La fórmula de cambio de base es útil para calcular logaritmos en calculadoras que solo tienen logaritmos en base 10 o natural (base e)

Trabajo Práctico
Ejercicio 15.Use la regla para cambio de base y calculadora para resolver (redondear a seis lugares decimales):

a. $\log_2 5 =$
b. $\log_5 2 =$
c. $\log_3 16 =$
d. $\log_6 92 =$
e. $\log_7 2{,}61 =$
f. $\log_6 532 =$

---

5. La función logarítmica

Sea a un número real, positivo y diferente de 1 (es decir, $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$). Llamamos **función logarítmica de base** a a la función:

$$g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \text{ definida por } g(x) = \log_a x$$

Observe que el dominio de la función es $\mathbb{R}_+^*$, lo que significa que solo valores positivos pueden ser asignados a la variable x. A continuación, analizaremos dos casos: cuando la base es mayor que 1 y cuando está entre 0 y 1.

Ejemplo 1

Consideremos la función definida por:

$$y = \log_3 x \quad \text{o} \quad f(x) = \log_3 x$$

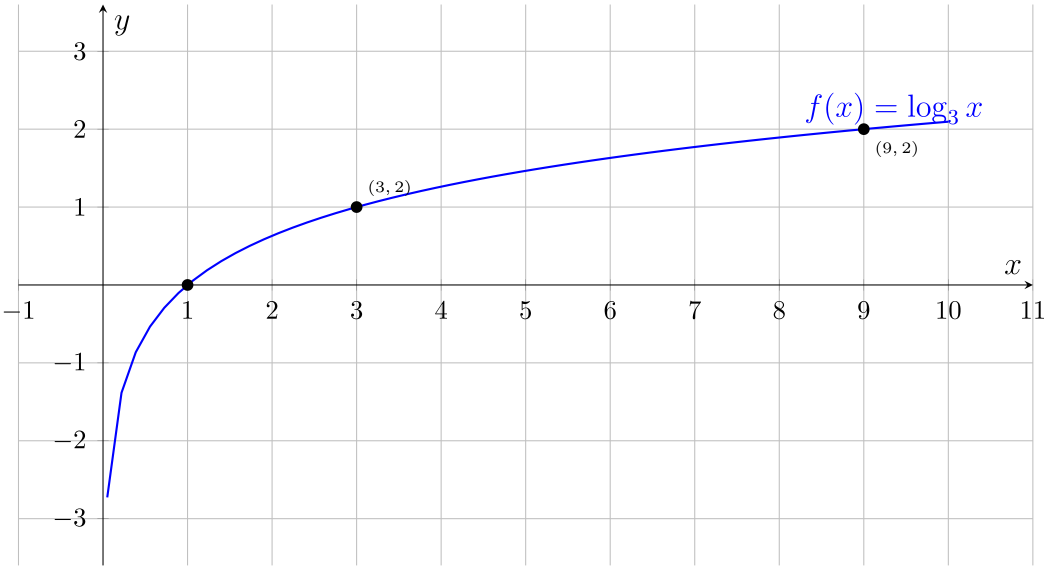
Asignaremos valores a x y calcularemos los correspondientes $f(x)$ para construir una tabla de valores:

x	$y = \log_3 x$	Punto (x, y)
$\frac{1}{9}$	-2	$\left(\frac{1}{9}, -2\right)$
$\frac{1}{3}$	-1	$\left(\frac{1}{3}, -1\right)$
1	0	$(1, 0)$
3	1	$(3, 1)$
9	2	$(9, 2)$

Por esta vez, incluimos los cálculos de la tabla, mostrando que basta con calcular el logaritmo en base 3 de los diferentes valores de x.

$$\log_3 \frac{1}{9} = y \Rightarrow 3^y = \frac{1}{9} = 3^{-2} \Rightarrow y = -2$$
$$\log_3 \frac{1}{3} = y \Rightarrow 3^y = \frac{1}{3} = 3^{-1} \Rightarrow y = -1$$
$$\log_3 1 = y \Rightarrow 3^y = 1 = 3^0 \Rightarrow y = 0$$
$$\log_3 3 = y \Rightarrow 3^y = 3 = 3^1 \Rightarrow y = 1$$
$$\log_3 9 = y \Rightarrow 3^y = 9 = 3^2 \Rightarrow y = 2$$

$$f(x) = \log_3 x$$



Observaciones importantes:

- Por conveniencia, asignamos a x valores que son potencias enteras de la base, ya que así obtenemos valores enteros para el logaritmo.
- Cuando el valor de x (positivo) se aproxima a cero, los puntos del gráfico se acercan cada vez más al eje y sin llegar a tocarlo nunca. Por lo tanto, el eje y es una asíntota de la curva.

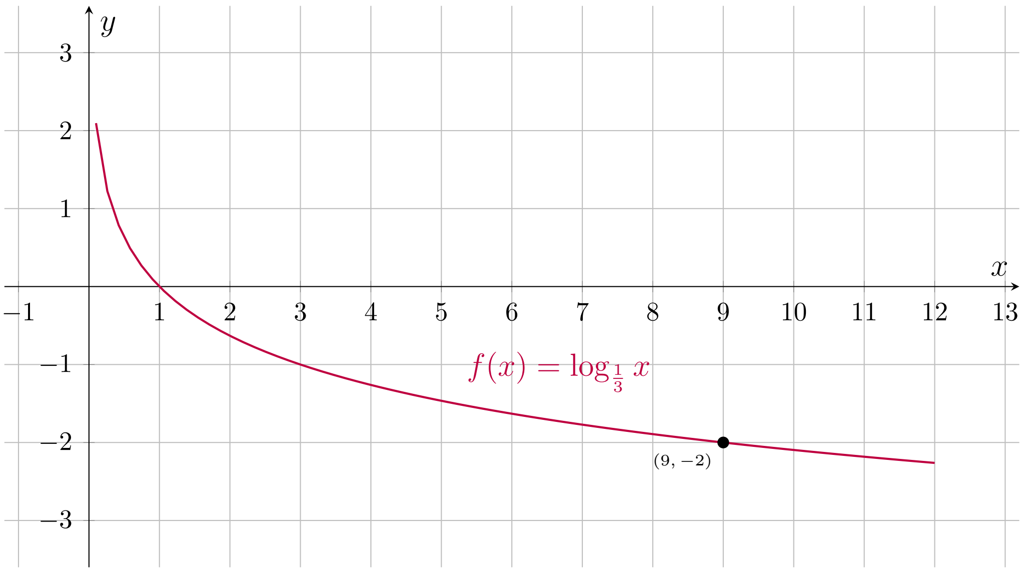
Ejemplo 2:
Consideremos la función definida por:

$$y = \log_{\left(\frac{1}{3}\right)} x$$

Construyamos una tabla de valores y puntos pertenecientes al gráfico de la función:

x	y
$\frac{1}{9}$	2
$\frac{1}{3}$	1
1	0
3	-1
9	-2

$$f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$$



Características del gráfico:

- La función es decreciente porque la base $a = \frac{1}{3}$ está entre 0 y 1
- Pasa por el punto (1,0) como todas las funciones logarítmicas
- Tiene una asíntota vertical en $x = 0$ (eje y)
- El dominio es $\mathbb{R}^+$ y el conjunto imagen es $\mathbb{R}$

Caracterización de la función logarítmica

1. El Dominio de la función es $\mathbb{R}^*_+$, o sea, solamente los números positivos poseen logaritmo.
2. El Conjunto Imagen de la función es $\mathbb{R}$, o sea que, cualquier número real es el logaritmo de algún número real positivo, en alguna base.
3. El gráfico de la función está a la derecha del $eje\, y$.
4. Si $x = 1 \Rightarrow y = \log_a 1 = 0$ pues $a^0 = 1$. O sea que el punto $P(1, 0)$ pertenece al gráfico de la función, es decir, en cualquier base, el logaritmo de 1 es 0.
5. Si $x = a$ es la base, tenemos que $y = \log_a a = 1$, pues $a^1 = a$. O sea que el logaritmo de la base es 1.
6. La función es inyectiva, pues si $x_1 \neq x_2 \Rightarrow \log_a x_1 \neq \log_a x_2$.
7. La función es sobreyectiva pues, para $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}^*_+ \mid y = \log_a x$.
8. La función es biyectiva, o uno a uno, pues es inyectiva y sobreyectiva al mismo tiempo.
9. En el caso de que $a > 1$, la función es creciente, pues si $x_1 > x_2 \Rightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2$.

10. En el caso de que $0 < a < 1$, la función es decreciente pues si $x_1 > x_2 \Rightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2$.
11. El *eje* y es una asíntota vertical de la función.
12. Si no se escribe la base, se sobreentiende que la base es 10, o sea, $\log_{10} x = \log x$.

Trabajo Práctico

Ejercicio 16. Indique cuáles expresiones corresponden a funciones crecientes, y cuales a decrecientes.

a. $y = \log_5 x$

b. $y = \log_{\frac{1}{2}} x$

c. $y = \log_{0,6} x$

d. $f(x) = \log_{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} x$

Ejercicio 17. Grafique cada función a partir de las transformaciones vistas en la Unidad 4.

a. $f(x) = \log_2(x-4)$

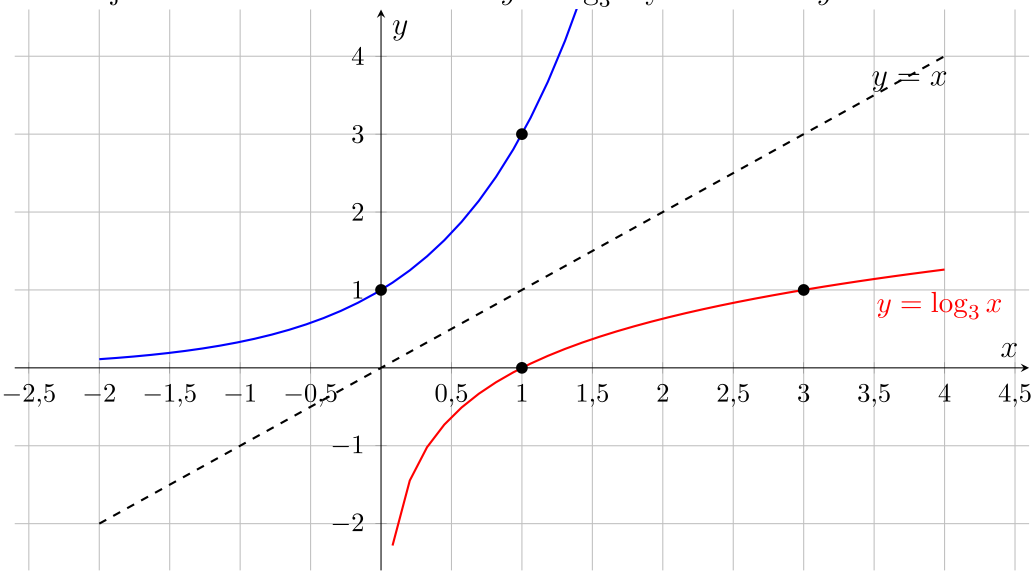
b. $g(x) = 2 + \log_3 x$

c. $h(x) = 1 - \log_{10} x$

La función logarítmica como función inversa

Cuando estudiamos la función exponencial, vimos que era biyectiva. Por esta razón admitía inversa. Anteriormente dijimos que la función logarítmica es biyectiva.

Por otro lado, el logaritmo está definido en función de una potencia, la cual podemos asociarla a la función exponencial. Sería natural suponer que la función exponencial es la inversa de la función logarítmica y viceversa. Hagamos en un mismo sistema de ejes cartesianos las funciones $y = \log_3 x$ y la función $y = 3^x$.



Ambas gráficas son simétricas respecto de la recta bisectriz del primero y tercer cuadrante, $y = x$. Recordemos que si f y g son funciones inversas, se cumple que:

$$(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = \mathrm{id}(x) = x$$

Verifiquemos que esto se cumple en los ejemplos dados.

(a)
$$f(x) = \log_3 x \text{ y } g(x) = 3^x$$
$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3^x) = \log_3(3^x) \overset{*}{=} x \cdot \log_3 3 \overset{**}{=} x \cdot 1 = x$$

Aplicamos que:

* Ley del logaritmo de una potencia.

** El logaritmo de la base es 1.

(b)
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\log_3 x) = 3^{\log_3 x} \overset{*}{=} x$$

Por Definición de logaritmo. Recordemos que el $\log_3 x$ es el **exponente** al que hay que elevar la base 3, para obtener x.

Por (a) y (b) las funciones $f(x) = \log_3 x$ y $g(x) = 3^x$ son inversas entre sí.

Dominio de funciones logarítmicas

Recordemos que en la función logarítmica:

- El logaritmando debe ser real y positivo
- La base debe ser real, positiva y diferente de 1

Veamos algunos ejemplos de determinación de dominio, dado que situaciones como estas surgen en Cálculo I o Elementos de Cálculo :

Ejemplo 1

Determinar el dominio de las siguientes funciones logarítmicas:

a) $y = \log_5(3x + 10)$

Para que el logaritmo esté definido:

$$3x + 10 > 0$$
$$3x > -10$$
$$x > -\frac{10}{3}$$

Por lo tanto, el dominio es:

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x > -\frac{10}{3} \right\}$$

b) $f(x) = \log_4(5 - 12x)$

Para que el logaritmo esté definido:

$$5 - 12x > 0$$

$$-12x > -5$$

$$x < \frac{5}{12}$$

Por lo tanto, el dominio es:

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{5}{12} \right\}$$

Trabajo Práctico

Ejercicio 18.Determina el dominio de las siguientes funciones logarítmicas:

a) $y = \log_{12}(5x + 1)$

b) $f(x) = \log_4 \left(3 - \frac{x}{4}\right)$

c) $y = \log_2(x^2 - 15x)$

d) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 + 9)$

e) $g(x) = \log_5(2x - 7)$

f) $h(x) = \log_3 \left(6 - \frac{x}{3}\right)$

---

6. Ecuaciones logarítmicas

Las ecuaciones logarítmicas son aquellas que presentan logaritmos con la incógnita figurando en el logaritmo (resultado), en el logaritmando o en la base. Ejemplos de ecuaciones logarítmicas:

a. $\log_2(3x + 1) = 3$

b. $\log_x 5 = 12$

c. $\log_5 12 = x$

d. $\log_2(x - 1) + \log_7 2x = 1$

e. $\log x + \log(x - 1) = 1$

Algunos de estos ejemplos pueden resolverse sólo con la definición de logaritmo, mientras que otros como el ejemplo (d) requieren más elaboración.

Observación: Al resolver ecuaciones logarítmicas, debemos considerar las restricciones para los logaritmos, sus bases y la incógnita:

¿Cómo determinamos estas restricciones? Debemos asegurar que:

1) El logaritmando sea positivo:

$$\log_2(3x + 1) = 3 \quad \text{restricción } 3x + 1 > 0$$

2) La base sea positiva y distinta de 1:

$$\log_a(30) = 2 \quad \text{restricción } a > 0 \text{ y } a \neq 1$$

A estas restricciones se les llama también çondiciones de existencia.º ”dominio de definición”, siendo todas estas designaciones equivalentes.

El **Conjunto Universo** (U) es el conjunto de números reales que cumplen ambas restricciones. El **Conjunto Solución** (S) es un subconjunto de U cuyos elementos verifican la igualdad planteada ($S \subseteq U$).

Por ejemplo, en $\log_2(3x+1) = 3$:

$$U = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x > -\frac{1}{3} \right\}$$

$$S = \left\{ \frac{7}{3} \right\} \subseteq U$$

Ejemplo 1

Resuelva la ecuación $\log_4(5x-1) = 2$

Solución

$$\begin{aligned}
\log_4(5x-1) &= 2 \\
4^2 &= 5x - 1 \quad \text{(por definición de logaritmos)} \\
16 &= 5x - 1 \\
5x &= 17 \\
x &= \frac{17}{5}
\end{aligned}$$

Verificación:

El logaritmando debe satisfacer $5x - 1 > 0$:

$$5\left(\frac{17}{5}\right) - 1 = 16 > 0$$

Conjunto solución:

$$S = \left\{ \frac{17}{5} \right\}$$

Ejemplo 2

Resolver las ecuaciones siguientes:

a) $\log_8(x) = \frac{2}{3}$

$$\begin{aligned}
8^{2/3} &= x \\
\sqrt[3]{8^2} &= x \\
x &= 4
\end{aligned}$$

Comprobación de respuestas

Para $x = 4$:

$$\log_8(4) = \frac{\log 4}{\log 8} = \frac{2}{3}$$

b) $\log_4(x-1) = \frac{1}{2}$
(Se deja como ejercicio)

c) $\log_2(2-x) = -1$
(Se deja como ejercicio)

El siguiente ejercicio es meramente ilustrativo; para mostrar que la expresión en el argumento del logaritmo podría ser un polinomio de grado 2.

Ejemplo 3

Resuelva la ecuación $\log_2(x^2 - 2x - 16) = 3$

Solución

$$\begin{aligned} \log_2(x^2 - 2x - 16) &= 3 \\ 2^3 &= x^2 - 2x - 16 \quad \text{(por definición de logaritmos)} \\ 8 &= x^2 - 2x - 16 \\ x^2 - 2x - 24 &= 0 \quad \text{(ecuación cuadrática)} \\ x &= \frac{2 \pm \sqrt{4+96}}{2} \\ x &= \frac{2 \pm 10}{2} \\ x_1 &= -4 \quad \text{y} \quad x_2 = 6 \end{aligned}$$

Comprobación de respuestas

Para $x = -4$:
$$\log_2((-4)^2 - 2(-4) - 16) = \log_2(8) = 3$$
Para $x = 6$:
$$\log_2(6^2 - 2(6) - 16) = \log_2(8) = 3$$

Verificación de condiciones:

El logaritmando debe satisfacer $x^2 - 2x - 16 > 0$:

- Para $x = -4$: $(-4)^2 - 2(-4) - 16 = 8 > 0$
- Para $x = 6$: $(6)^2 - 2(6) - 16 = 8 > 0$

Conjunto solución:
$$S = \{-4, 6\}$$

Ejemplo 4

Resolver la ecuación:

$$\log_2(3x+1) + \log_2(9-x) = 5$$

$$\log_2(3x+1) + \log_2(9-x) = 5$$

$$
\begin{aligned}
\log_2[(3x+1)(9-x)] &= 5 && \text{(logaritmo de un producto)}\\
\log_2[27x-3x^2+9-x] &= 5 && \text{(suma de términos semejantes)}\\
\log_2[-3x^2+26x+9] &= 5 &&\\
2^5 = -3x^2+26x+9 & && \text{(por definición de logaritmos)}\\
-3x^2+26x-23 &= 0 && \text{(resolución de ec. cuadrática)}\\
x_1 = 1 \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{23}{3} & &&
\end{aligned}
$$

Para verificar que las soluciones satisfacen la ecuación original y el dominio de los logaritmos, se debe asegurar que $3x+1>0$ y $9-x>0$ para cada solución encontrada.

- Para $x=1$:

$$3(1)+1=4>0 \quad \text{y} \quad 9-1=8>0$$

Por lo tanto, $x=1$ pertenece al conjunto solución.

- Para $x=\frac{23}{3}$:

$$3\left(\frac{23}{3}\right)+1=24>0 \quad \text{y} \quad 9-\frac{23}{3}=\frac{4}{3}>0$$

Por lo tanto, $x=\frac{23}{3}$ también pertenece al conjunto solución.

Por lo tanto, el conjunto solución de la ecuación logarítmica es:

$$S=\left\{1,\frac{23}{3}\right\}$$

Trabajo Práctico

Ejercicio 19. Resuelva las ecuaciones y exprese el conjunto solución:

a. $\ln(2+x)=1$

b. $\log(3x+5)=2$

c. $\log_3(x^2+4x-5)=2$

d. $\log_2(x^2-x-2)=2$

e. $\log x+\log(x-3)=1$

f. $\log_5 x+\log_5(x+1)=\log_5 20$

g. $\log_5(x+1)-\log_5(x-1)=2$

h. $\log_2 3+\log_2 x=\log_2 5+\log_2(x-2)$

Ejercicio 20. Resuelva cada ecuación, redondeando la solución a cuatro lugares decimales.

a. $10^{-x}=4$

b. $3^{2x-1}=5$

c. $2e^{12x}=17$

d. $4+3^{5x}=8$

e. $\frac{3^{-x}}{14} = 0{,}1$

f. $\left(\frac{1}{4}\right)^x = 75$

g. $\dfrac{50}{1+e^{-x}} = 4$

Ejercicio 21. Resuelva cada problema de modelado:

A. El número de bacterias en un cultivo se modela mediante la función

$$n_t = 500\,e^{0{,}45t}$$

donde t se mide en horas y n es el número de bacterias en miles.

i. ¿Cuál es el número inicial de bacterias?

ii. ¿Cuántas bacterias están en el cultivo después de tres horas?

iii. ¿Después de cuántas horas la cantidad de bacterias llega a 10000?

B. En una fiesta se sirve un tazón de sopa caliente. Comienza a enfriarse según la ley de enfriamiento de Newton, de modo que su temperatura en el instante t se determina mediante

$$T_t = 65 + 145\,e^{-0{,}05t}$$

donde t representa al tiempo en minutos y T la temperatura de la sopa medida en °F.

i. ¿Cuál es la temperatura inicial de la sopa?

ii. ¿Cuál es la temperatura de la sopa después de diez minutos?

iii. ¿Después de cuánto tiempo la temperatura será de 100°F?

C. Un lago pequeño contiene cierta especie de pez. La población de peces se modela mediante la función

$$P = \frac{10}{1+4e^{-0{,}8t}}$$

donde P es el número de peces en miles y t se mide en años desde que se aprovisionó el lago.

i. Encuentre la población de peces después de tres años.

ii. ¿Después de cuántos años la población de peces llegará a cinco mil?

D. Los médicos emplean el yodo radiactivo como trazador para diagnosticar ciertos trastornos de la glándula tiroides. Este tipo de yodo se desintegra de tal manera que la masa restante después de t días se determina mediante la función

$$m_t = 6\,e^{-0{,}087t}$$

donde m es la masa de yodo en gramos y t es el tiempo en días.

i. Encuentre la masa inicial de yodo.

ii. ¿Cuánta masa queda después de veinte días?

iii. ¿Cuántos días habrán transcurridos si se sabe que queda una masa de 0,57 g?

E. Un paracaidista salta desde una altura razonable al suelo. La resistencia del aire que experimenta es proporcional a su velocidad, y la constante de proporcionalidad es de 0,2. Se puede demostrar que la velocidad de descenso del paracaidista se expresa como

$$v(t) = 80(1 - e^{-0{,}2t})$$

donde t se mide en segundos y $v(t)$ se mide en pies por segundo.

i. Encuentre la velocidad inicial del paracaidista.

ii. Calcule la velocidad después de cinco segundos y después de diez segundos.

iii. Halle el tiempo que transcurre hasta que alcanza una velocidad de 77 pies/seg.

Bibliografía

- Larson, R y Otros. (2012). Precálculo (8va. ed.) México D. F., Cengage Learning Editores S.A. de C.V.
- Stewart, J y Otros. (2001). Precálculo (6ta ed.) México D. F., International Thomson Editores, S.A.
- Sullivan, M. (1997): Precálculo, (4ta ed.) , México, Pearson Educación, Prentice Hall, Addison Wesley. Faires, D