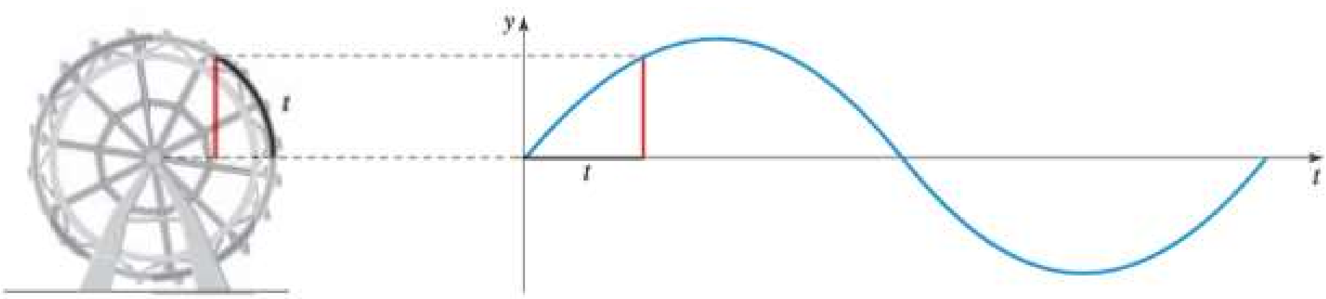
UNIDAD N°6

Trigonometría



El material que compone estas notas ha sido elaborado por la Prof. Estrellita Sobisch y revisado por las Profesoras Gisela Fitt y Celeste Scatragli, para brindarles a todos los estudiantes que cursen el módulo de Matemática, correspondiente al INGRESO de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Nacional de Cuyo, la posibilidad de revisar conceptos y habilidades de la disciplina adquiridos en el nivel medio, que son necesarios para poder cursar exitosamente las materias del Ciclo Básico.

Para el mismo se utilizaron las notas de clases de los docentes y como bibliografía principal:

- STEWART, J y Otros. (2001). *Precálculo (3ra ed.) México D. F., International Thomson Editores, S.A.*

1. INTRODUCCIÓN

La trigonometría es una de las ramas más versátiles de las matemáticas.

Tiene aplicaciones tanto teóricas como prácticas.

El poder y la versatilidad provienen del hecho que puede considerarse de dos maneras diferentes. Una de ellas define la trigonometría como el estudio de *funciones de números reales*, la otra como estudio de *funciones de ángulos.*

Las funciones trigonométricas definidas de estas dos formas son idénticas —asignan el mismo valor a un número real dado (en el segundo caso, el número real es la medida de un ángulo). La diferencia es sólo el punto de vista.

En uno de ellos, se presentan aplicaciones que abarcan procesos dinámicos como el movimiento armónico, el estudio de ondas sonoras y la descripción de los fenómenos periódicos.

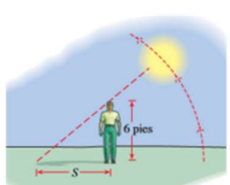
El otro enfoque permite aplicaciones estáticas, como por ejemplo la medición de distancias, fuerza, velocidad y, en general, aplicaciones que comprenden la medida de longitudes y direcciones.

Podríamos esquematizar sintéticamente de la siguiente manera.

TRIGONOMETRÍA

Podemos considerarla desde dos visiones distintas

Funciones de Ángulos



Aplicaciones que comprenden la medida de longitudes y direcciones

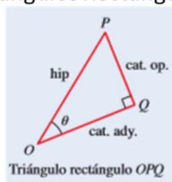
AMBAS EQUIVALENTES

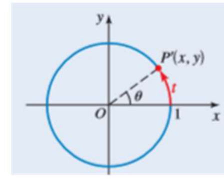
Difieren en las APLICACIONES

Funciones de Números Reales

Aplicaciones que abarcan procesos dinámicos como el movimiento armónico, el estudio de ondas sonoras y la descripción de los fenómenos periódicos

	Funciones de Ángulos	Funciones de Números Reales
Basadas en	Triángulos Rectángulo	**Circunferencia Unitaria**





Analizamos las relaciones métricas entre sus lados en sus definiciones:

Relaciones trigonométricas

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} \qquad \cos\theta = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} \qquad \tan\theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$$

$$\csc\theta = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} \qquad \sec\theta = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}} \qquad \cot\theta = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}}$$

Utilizamos las coordenadas de un punto en la circunferencia en sus definiciones:

Definición de las funciones trigonométricas

Sea t un número real y sea $P(x, y)$ el punto del círculo unitario determinado por t. Definimos

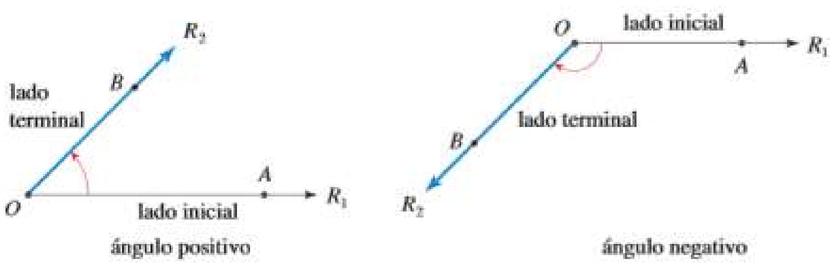
$$\operatorname{sen} t = y \qquad \cos t = x \qquad \tan t = \frac{y}{x} \quad (x \neq 0)$$

$$\csc t = \frac{1}{y} \quad (y \neq 0) \qquad \sec t = \frac{1}{x} \quad (x \neq 0) \qquad \cot t = \frac{x}{y} \quad (y \neq 0)$$

	Funciones de Ángulos	Funciones de Números Reales
Unidad de medida	Grado Sexagesimal	Radián
Equivalencia	$1^{\circ} = \frac{\pi}{180}\, rad$	$1\, rad = \left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ}$

¿Cómo podemos definir un ángulo?

Podemos considerar que un ángulo consta de dos rayos R_1 y R_2 con un vértice común O; uno de los rayos gira sobre el otro como muestra el ejemplo. Según el sentido de giro, el ángulo es positivo (si lo hace en el sentido antihorario) o negativo (en el sentido horario). (ver figura)



¿Qué significa medir un ángulo?

La medida de un ángulo es la cantidad que rota uno de los rayos (R_2) respecto del otro (R_1), que queda fijo, teniendo al vértice O como punto fijo para realizar la rotación.

De manera intuitiva, esto es ¿cuánto se “abre” el ángulo en este giro?

Pregunta: ¿Qué se necesita para medir?

Respuesta: Se necesita un sistema de medición y una unidad de medida adecuada, tomada como patrón.

Los sistemas de medición, y sus unidades, más utilizados son tres:

SISTEMA	UNIDAD
1. Centesimal	Grado Centesimal
2. Sexagesimal	Grado Sexagesimal
3. Circular	Radián

El sistema Centesimal prácticamente no es utilizado.

En el sistema sexagesimal la unidad de medida es el ***grado sexagesimal***.

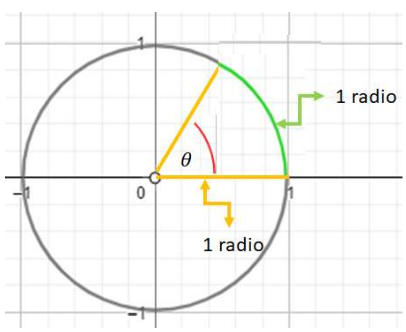
El ángulo cuya medida es 1 grado, es el que se obtiene al hacer rotar el lado terminal la $\frac{1}{360}$ parte de un giro completo. Este ángulo se toma como unidad de medida del sistema sexagesimal.

Cuando se dice "el ángulo α mide $28°$, significa que esta unidad cabe 28 veces en el ángulo α ; o que α puede ser subdividido en 28 ángulos de medida $1°$ cada uno"

En el sistema circular la unidad de medida es el ***radián***.

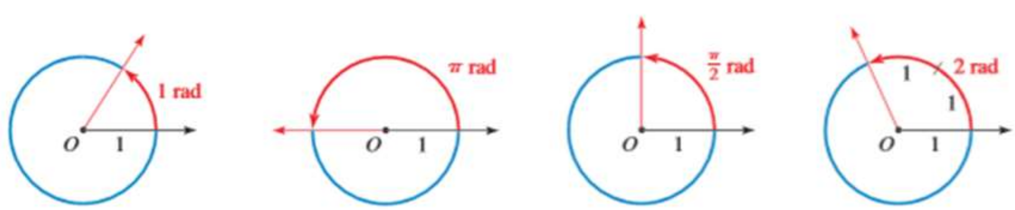
Este sistema es muy utilizado en cálculo y otras ramas de las matemáticas.

El ángulo de un radián es aquél que "barre" un arco de longitud 1 radio. De allí deriva su nombre.



El ángulo θ mide 1 radián. El arco de circunferencia determinado por sus lados tiene la misma medida que el radio de la circunferencia.

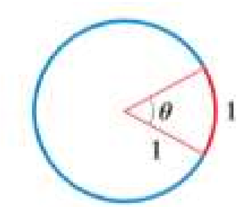
En el siguiente gráfico vemos varios ejemplos de ángulos expresados en radianes.



Unidad de medida

Puesto que un giro completo medido en grados es 360° y medido en radianes es 2π (que es la longitud de la circunferencia unitaria), se obtiene la siguiente relación entre estos dos métodos de medición de ángulo.

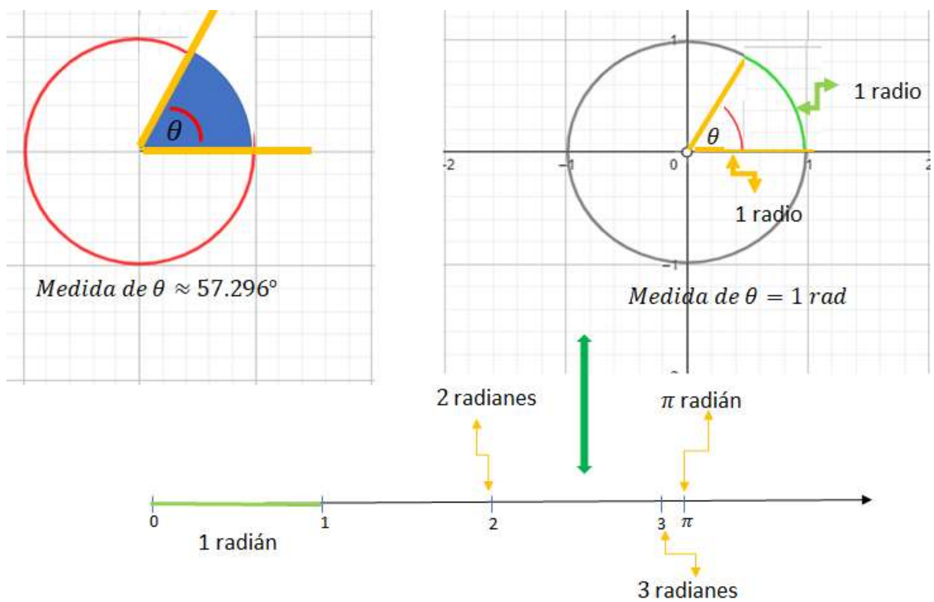
Relación entre grados y radianes
$180^{\circ} = \pi\, rad$ $\quad 1\, rad = \left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ}$ $\quad 1^{\circ} = \frac{\pi}{180}\, rad$ 1. Para convertir grados en radianes, multiplique por $\frac{\pi}{180}$.   2. Para convertir radianes en grados, multiplique por $\frac{180}{\pi}$



$$Medida\ de\ \theta = 1\, rad$$

$$Medida\ de\ \theta \approx 57.296°$$

¿Cuál es la diferencia importante que cabe ser destacada entre estos sistemas de medición?



En el gráfico anterior se muestra claramente el significado de la medida de un ángulo de 1 radián en ambos sistemas.

Queda claro entonces que la medida en radianes es una **longitud**, y como tal, puede ser representada en la recta real; ya, la medida en grados, que corresponde a un área, **NO** puede ser representada en la recta real, pues en ésta sólo se pueden representar longitudes.

Habiendo hecho estas consideraciones y usando la relación entre las unidades, podemos asociar las funciones trigonométricas de números reales, a funciones trigonométricas de ángulos.

La mayor aplicación de las funciones trigonométricas de ángulos es la resolución de problemas relacionados a la medición de distancias, fuerza, velocidad y, en general, aplicaciones que comprenden la medida de longitudes y direcciones.

Trabajo Práctico

Ejercicio N° 1

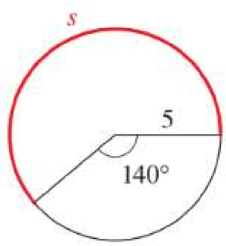
Complete la siguiente tabla:

Medida sexagesimal	$0°$	$30°$			$90°$		$135°$	$150°$		$240°$	$270°$		$360°$
Medida radial	0		$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$		$\frac{2}{3}\pi$			π			$\frac{5}{3}\pi$	

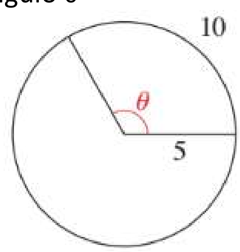
Ejercicio N° 2

En cada inciso calcule lo pedido:

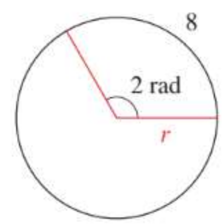
a. La longitud del arco s



b. El ángulo θ



c. El radio r



Ejercicio N° 3

Resuelva:

a. Las ruedas de un auto miden 70 cm de diámetro. ¿Qué distancia (en kilómetros y en metros) recorrerá el auto si sus ruedas giran 10,000 veces sin resbalar?

b. ¿Cuántas revoluciones hará una rueda de auto, de 75 cm de diámetro, cuando el auto recorre una distancia de 1,5 km?

c. Encuentre la distancia que la Tierra recorre en un día en su trayectoria alrededor del Sol. Suponga un año de 365 días y que la trayectoria de la Tierra alrededor del Sol es una circunferencia de $1{,}395 \times 10^8$ de km de radio.

2. LOS TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

Considere un triángulo rectángulo con θ como uno de sus ángulos agudos. Las relaciones trigonométricas se definen como sigue[1]:

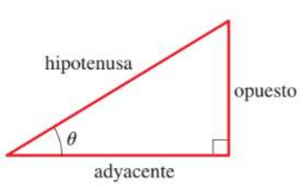


FIGURA 1

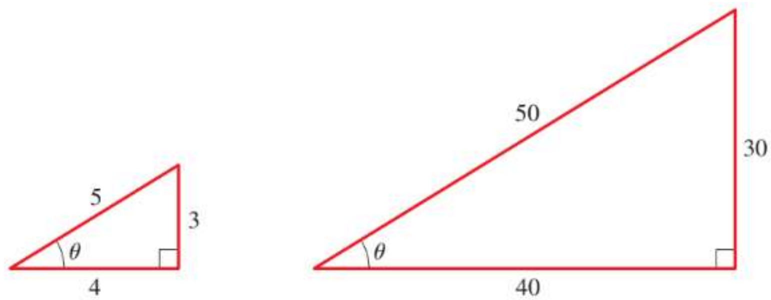
LAS RELACIONES TRIGONOMÉTRICAS

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{opuesto}}{\text{hipotenusa}} \qquad \cos\theta = \frac{\text{adyacente}}{\text{hipotenusa}} \qquad \tan\theta = \frac{\text{opuesto}}{\text{adyacente}}$$

$$\csc\theta = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{opuesto}} \qquad \sec\theta = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{adyacente}} \qquad \cot\theta = \frac{\text{adyacente}}{\text{opuesto}}$$

[1] También es usual la notación tg θ en lugar tan θ

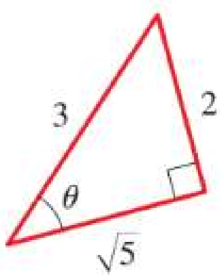
Los símbolos que usamos para esas relaciones son abreviaturas de sus nombres completos: **seno, coseno, tangente, cosecante, secante, cotangente**. Como dos triángulos rectángulos cualesquiera con ángulo θ son semejantes, estas relaciones son iguales, cualquiera que sea el tamaño del triángulo, es decir, **las relaciones trigonométricas dependen sólo del ángulo θ.**



$\text{sen}\,\theta = \frac{3}{5}$ $\qquad$ $\text{sen}\,\theta = \frac{30}{50} = \frac{3}{5}$

Ejemplo 1: Calcular razones trigonométricas

Calcule las seis razones trigonométricas para el ángulo en la figura



Solución

$$\text{sen}\,\theta = \frac{2}{3} \qquad \cos\theta = \frac{\sqrt{5}}{3} \qquad \tan\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

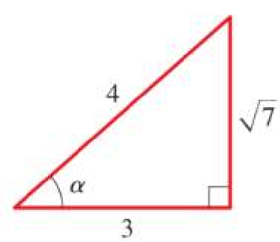
$$\csc\theta = \frac{3}{2} \qquad \sec\theta = \frac{3}{\sqrt{5}} \qquad \cot\theta = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Si $\cos\alpha = \dfrac{3}{4}$ trace un triángulo rectángulo con α como uno de sus ángulos agudos y calcule las razones trigonométricas restantes

Solución

Como $\cos\alpha$ está definido como la relación entre el lado adyacente y la hipotenusa, trazamos un triángulo con hipotenusa de longitud 4 y un lado de longitud 3 adyacente a α.

Si el lado opuesto es x, entonces por el Teorema de Pitágoras, $3^2 + x^2 = 4^2$ o sea $x^2 = 7$, de modo que $x = \sqrt{7}$. A continuación usamos el triángulo de la figura para hallar las relaciones:

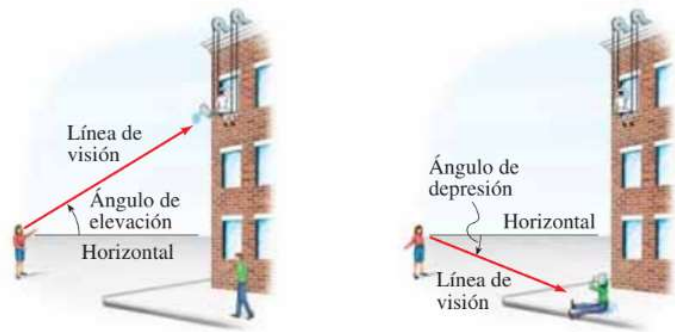


$$\text{sen}\,\alpha = \frac{\sqrt{7}}{4} \qquad \cos\alpha = \frac{3}{4} \qquad \tan\alpha = \frac{\sqrt{7}}{3}$$

$$\csc\alpha = \frac{4}{\sqrt{7}} \qquad \sec\alpha = \frac{4}{3} \qquad \cot\alpha = \frac{3}{\sqrt{7}}$$

La capacidad para resolver triángulos rectángulos con el uso de relaciones trigonométricas es fundamental para numerosos problemas en navegación, topografía, astronomía y las medidas de distancias. Las aplicaciones que consideramos siempre comprenden triángulos rectángulos, pero podrían generalizarse.

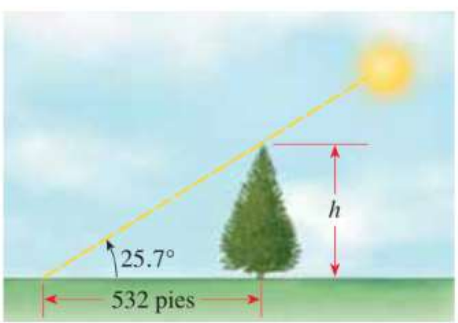
Para examinar los siguientes ejemplos, necesitamos alguna terminología. Si un observador está viendo un objeto, entonces la recta que va de sus ojos al objeto se llama **línea de visión** (Figura). Si el objeto que es observado está arriba de la horizontal, entonces el ángulo entre la línea de visión y la horizontal recibe el nombre de **ángulo de elevación**; si está debajo de la horizontal, entonces el ángulo entre la línea de visión y la horizontal se denomina **ángulo de depresión**.



Ejemplo 2: Calcular alturas

Un árbol proyecta una sombra de 532 pies de largo. Encuentre la altura del árbol si elángulo de elevación del Sol es 25.7°

Solución



Sea h la altura del árbol. De la Figura vemos que

$$\frac{h}{532} = \tan 25.7° \qquad \text{Definición de tangente}$$

$$h = 532 \tan 25.7° \qquad \text{Multiplique por 532}$$

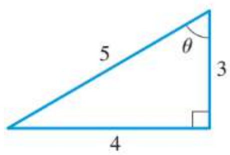
$$\approx 532(0.48127) \approx 256 \qquad \text{Use calculadora}$$

Por lo tanto la altura es aproximadamente 256 pies. El ejemplo está tomado del libro *Precálculo* de James Stewart, por lo tanto es común el uso de unidades del sistema imperial (pies, pulgadas, millas, etc). Esta situación se da con frecuencia en la bibliografía, sin embargo en los ejercicios y evaluaciones mantendremos las unidades del sistema métrico (metros, centímetros, kilómetros, etc)

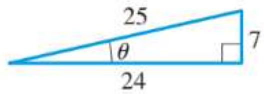
Ejercicio N° 4

Calcule las seis razones trigonométricas para cada ángulo θ

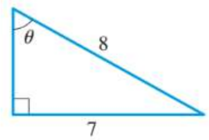
a.



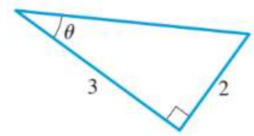
b.



c.



d.



Ejercicio N° 5

Resuelva cada situación, redondee cada respuesta a los centésimos.

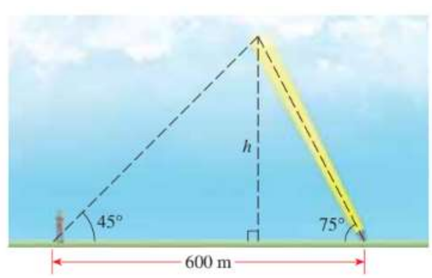
a. Se encuentra que el ángulo de elevación de lo alto de un edificio es de 11° desde el suelo, a una distancia de 1,5 km de la base del edificio. Usando esta información, encuentre la altura del edificio.

b. Desde lo alto de un faro de 60 m, el ángulo de depresión a un barco en el océano es de 23°. ¿A qué distancia está el barco desde la base del faro?

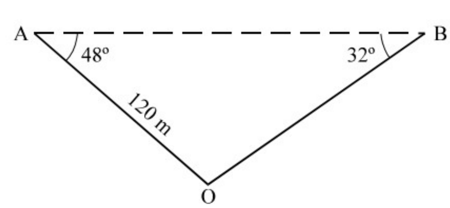
c. Una escalera de 6 m está inclinada contra un edificio, de modo que el ángulo entre el suelo y la es calera es de 72°. ¿A qué altura llega la escalera en el edificio?

d. Un cable de 180 m para sujeción está unido a lo alto de una torre de comunicaciones. Si el cable forma un ángulo de 65° con el suelo, ¿cuál es la altura de la torre de comunicaciones?

e. Para medir la altura de la capa de nubes en un aeropuerto, un trabajador enciende un reflector hacia arriba, a un ángulo de 75° de la horizontal. Un observador a 600 m de distancia mide el ángulo de elevación del reflector y ve que es de 45°. Encuentre la altura h de la capa de nubes.

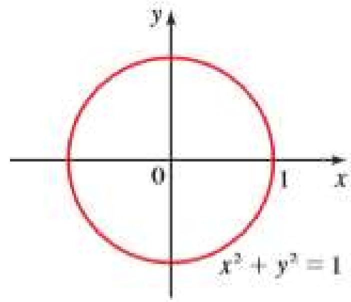


f. Calcula la longitud del puente que se quiere construir entre los puntos A y B, para lo cual se sabe que los ángulos ABO y OAB miden 32º y 48º respectivamente y que la distancia entre A y O, medida en línea recta es 120 m.



3. LA CIRCUNFERENCIA UNITARIA

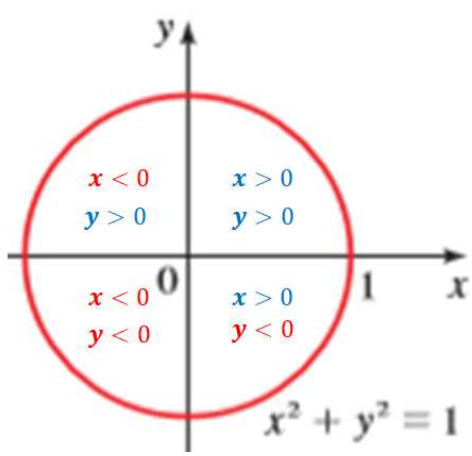
El conjunto de puntos del plano cartesiano que se encuentran a una distancia 1 (unidad de longitud) del origen, es una circunferencia cuyo radio mide 1 (unidad de longitud). Representada por $C_{(O,1)}$ cuya ecuación es $x^2 + y^2 = 1$.

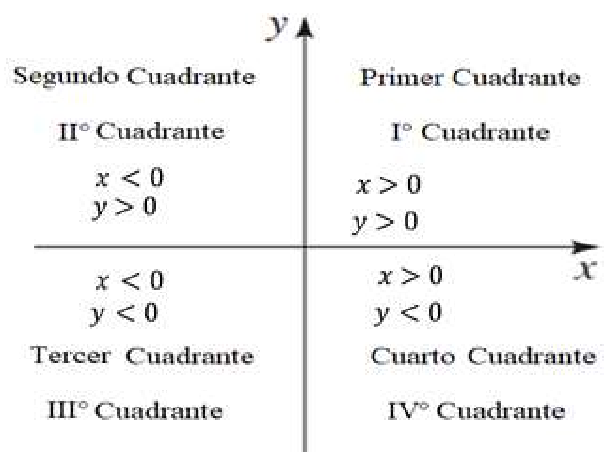


Definición de Circunferencia Unitaria

La Circunferencia Unitaria con centro en el origen de coordenadas O y radio $r = 1$, $C_{(O,1)}$, es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan del origen O una distancia de 1 unidad. Su ecuación es $(x-0)^2 + (y-0)^2 = 1$, más conocida como $x^2 + y^2 = 1$.

Los ejes cartesianos dividen al plano en cuatro cuadrantes, nombrados en el sentido antihorario, como indica la figura. Los puntos ubicados en cada cuadrante tienen coordenadas con signos positivos o negativos como está indicado.





El signo de las coordenadas de un punto $P(x, y)$ según el cuadrante son:

CUADRANTE	X	Y
PRIMER CUADRANTE	+	+
SEGUNDO CUADRANTE	−	+
TERCER CUADRANTE	−	−
CUARTO CUADRANTE	+	−

¿Cómo sabemos si un punto P está en la Circunferencia Unitaria C$_{(O,1)}$?

Ejemplo 3: Determinar si un punto pertenece a la Circunferencia Unitaria

Demuestre que el punto $P\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ está en la Circunferencia Unitaria.

Solución

Necesitamos demostrar que este punto cumple con la ecuación de la circunferencia, es decir, $x^2 + y^2 = 1$.

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{2}{4}+\frac{2}{4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

Podemos afirmar que P está en la Circunferencia Unitaria. ◆

Si un punto $P(x,y)$ del plano verifica $x^2+y^2<1$ se dice que es un punto interior de C$_{(O,1)}$.

Si un punto $P(x,y)$ del plano verifica $x^2+y^2>1$ se dice que es un punto exterior de C$_{(O,1)}$.

<u>Observación</u>: Tanto la coordenada x como la coordenada y deben ser menores o iguales a 1 para que el punto P esté sobre la circunferencia unitaria.

Si conocemos el cuadrante y una de las coordenadas de P, podemos fácilmente encontrar la coordenada faltante.

Ejemplo 4: Buscar las coordenadas de un punto en la Circunferencia Unitaria

El punto $P\left(\frac{1}{2},y\right)$ está en la Circunferencia Unitaria en el cuadrante IV. Encuentre su coordenada y.

Solución

Como está en la Circunferencia Unitaria, entonces

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = 1$$

$$y^2 = 1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

$$|y| = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Como el punto está en el IV cuadrante, su coordenada y debe ser negativa, así que $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ◆

Trabajo Práctico

Ejercicio N°6:

Determine cuáles de los siguientes puntos están en el círculo unitario, cuáles pertenecen a la circunferencia unitaria y cuáles se hallan fuera del círculo unitario.

a. $\left(-\frac{5}{7}, -\frac{2\sqrt{6}}{7}\right)$

b. $\left(-\frac{5}{8}, \frac{3}{8}\right)$

c. $\left(-\frac{5}{13}, \frac{12}{13}\right)$

d. $\left(\frac{5}{7}, -\frac{6}{7}\right)$

e. $\left(\frac{5}{6}, \frac{\sqrt{11}}{6}\right)$

Ejercicio N°7:

Determine la coordenada faltante de *P*, si se sabe que *P* es un punto de la circunferencia unitaria ubicado en el cuadrante indicado.

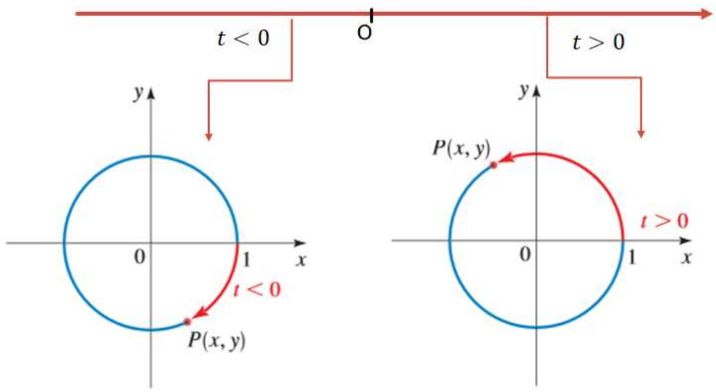
Coordenadas	Cuadrante
$\left(x_1, \frac{1}{3}\right)$	II
$\left(\frac{2}{5}, y_2\right)$	I
$\left(-\frac{3}{7}, y_3\right)$	III
$\left(x_4, -\frac{5}{8}\right)$	IV
$\left(x_5, \frac{2}{9}\right)$	II

Puntos sobre la Circunferencia Unitaria

Suponga que t es un número real.

La pregunta es: ¿Cómo hacemos para localizar este número real en la circunferencia unitaria?

Respuesta: Empezando en el punto $(1\,,0)$ y desplazándonos en el sentido contrario a las agujas del reloj si t es positivo, o bien, en el sentido de las manecillas del reloj si t es negativo, tantas unidades de medidas como indica t. De esta forma llegamos al punto $P(x,y)$ sobre la circunferencia determinado por el número real t. A este punto lo llamamos **punto terminal**.



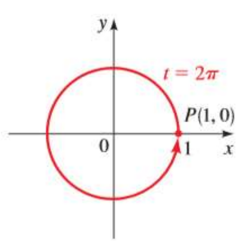
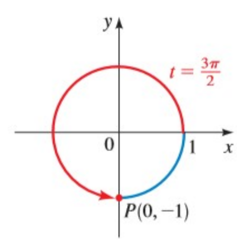
Punto $P(x, y)$ sobre la circunferencia determinado por $t<0$ — Punto $P(x, y)$ sobre la circunferencia determinado por $t>0$

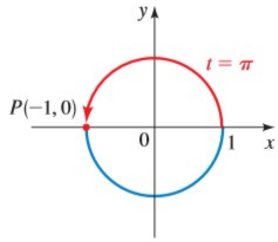
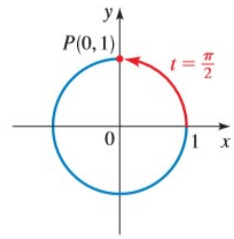
La longitud de la circunferencia unitaria es $C = 2\pi r = 2\pi(1) = 2\pi$. Entonces, tomando como punto de partida a $(1\,,0)$, si t se desplaza en el sentido contrario a las agujas del reloj a lo largo de la circunferencia, retornando al punto de partida, t habrá recorrido una distancia de 2π unidades (de longitud)

Si t se desplaza la mitad del camino alrededor de la circunferencia, habrá recorrido $\frac{1}{2}(2\pi) = \pi$ unidades

Para desplazarse un cuarto de la distancia alrededor de la circunferencia, t recorre $\frac{1}{4}(2\pi) = \frac{\pi}{2}$ unidades

La pregunta es: ¿Dónde se encuentra el punto terminal cuando t recorre ciertas distancias a lo largo de la circunferencia?

Si t recorre toda la circunferencia $C = 2\pi r = 2\pi(1) = 2\pi$ $P(x,y)$ se encuentra en la posición $(1{,}0)$		Si t recorre tres cuartas partes de la circunferencia $\frac{3}{4}(2\pi) = \frac{3}{2}\pi$ $P(x,y)$ se encuentra en la posición $(0,-1)$	

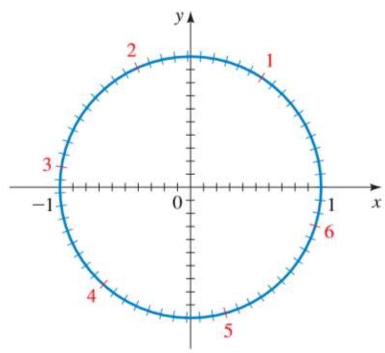
Si t recorre la mitad de la circunferencia $\frac{1}{2}(2\pi) = \pi$ $P(x, y)$ se encuentra en la posición $(-1{,}0)$		Si t recorre la cuarta parte de la circunferencia $\frac{1}{4}(2\pi) = \frac{\pi}{2}$ $P(x, y)$ se encuentra en la posición $(0{,}1)$	

Trabajo Práctico

Ejercicio N°8:

Mediante la figura encuentre el punto sobre la circunferencia determinado por el número real t, con coordenadas con una cifra decimal.

a) $t = 1$ b) $t = 2{,}5$ c) $t = -1{,}1$ d) $t = 4{,}2$



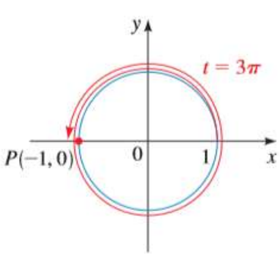
Ejemplo 5: Dado un número real t, encontrar el punto $P(x, y)$en la Circunferencia Unitaria

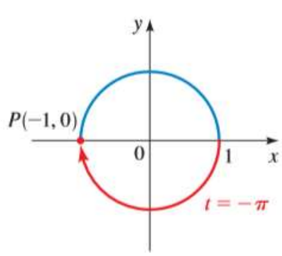
Calcule el punto $P(x, y)$ sobre la circunferencia unitaria determinado por cada número real t dado.

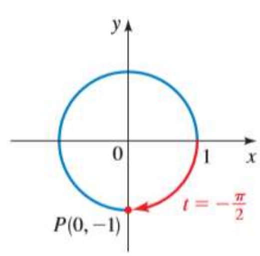
a) $t = 3\pi$ b) $t = -\pi$ c) $t = -\frac{\pi}{2}$

Solución

De acuerdo con la siguiente figura, observamos que:





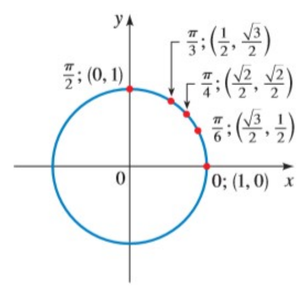


a) El punto determinado por $t = 3\pi$ es $(-1\,,0)$
b) El punto determinado por $t = -\pi$ es $(-1\,,0)$
c) El punto determinado por $t = -\frac{\pi}{2}$ es $(0\,,-1)$

Observe que valores diferentes de t pueden determinar el mismo punto.

Puntos especiales sobre la circunferencia y la determinación de sus coordenadas

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
Punto Terminal	$(1\,,0)$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$(0\,,1)$



Pregunta: ¿Para qué nos sirven estos números $t \in R$ y sus respectivos puntos terminales $P(x, y)$ localizados en la circunferencia, todos en el primer cuadrante?

Respuesta: Con ayuda de ellos, podremos obtener las coordenadas de puntos en los demás cuadrantes.

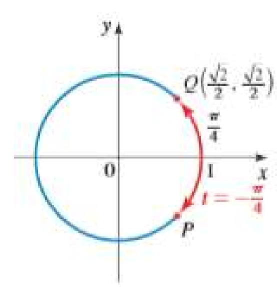
Ejemplo 6: Determinación de puntos sobre la circunferencia

Calcule el punto sobre la circunferencia determinado por cada número real dado t.

a) $t = -\frac{\pi}{4}$

El punto $P(x_1, y_1)$ determinado por $t = -\frac{\pi}{4}$ y el punto $Q(x_2, y_2)$ determinado por $t = \frac{\pi}{4}$ tienen las mismas coordenadas en el $eje\ x$ $(esto\ es,\ x_1 = x_2)$ pero coordenadas opuestas en el $eje\ y$ $(esto\ es,$ $y_1 = -y_2)$, ya que Q se encuentra en el I Cuadrante y P en el IV Cuadrante.

Por lo tanto, las coordenadas el punto P en el $IV\ \ Cuadrante$ en la circunferencia son $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ◆

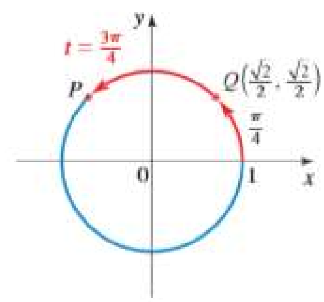


a)

b) $t = \frac{3\pi}{4}$

El punto $P(x_1, y_1)$ determinado por $t = \frac{3\pi}{4}$ y el punto $Q(x_2, y_2)$ determinado por $t = \frac{\pi}{4}$ tienen las mismas coordenadas en el $eje\ y$ $(esto\ es,\ y_1 = y_2)$ pero coordenadas opuestas en el $eje\ x$ $(esto\ es,\ x_1 = -x_2)$, ya que Q se encuentra en el I Cuadrante y P en el IV Cuadrante.

Por lo tanto, las coordenadas el punto P en el II Cuadrante en la circunferencia son $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ◆

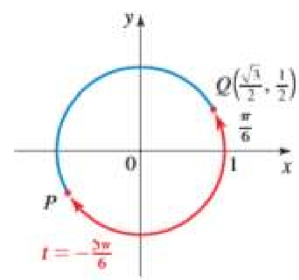


b)

c) $t = -\frac{5\pi}{6}$

El punto $P(x_1, y_1)$ determinado por $t = -\frac{5\pi}{6}$ y el punto $Q(x_2, y_2)$ determinado por $t = \frac{\pi}{6}$ tienen coordenadas opuestas en el $eje\ y$ $(esto\ es,\ y_1 = -y_2)$ y también coordenadas opuestas en el $eje\ x$ $(esto\ es,\ x_1 = -x_2)$, ya que Q se encuentra en el I Cuadrante y P en el III Cuadrante.

Por lo tanto, las coordenadas el punto P en el III Cuadrante en la circunferencia son $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ ◆



c)

Número de Referencia y su Importancia

Los ejemplos anteriores muestran que, para conocer las coordenadas de un punto en cualquier cuadrante, basta conocer las coordenadas del punto correspondiente en el primer cuadrante.

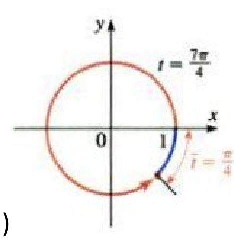
Introducimos el concepto de "número de referencia" para facilitarnos el cálculo de los puntos sobre la circunferencia.

Número de Referencia
Sea t un número real. El número de referencia $\underline{t}$ asociado a t es la distancia más corta a lo largo de la circunferencia unitaria entre el punto sobre la circunferencia determinado por t y el $eje\ x$.

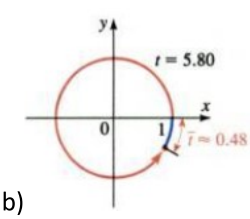
Ejemplos

a) $t = \frac{7\pi}{4} \rightarrow \underline{t} = 2\pi - \frac{7\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$

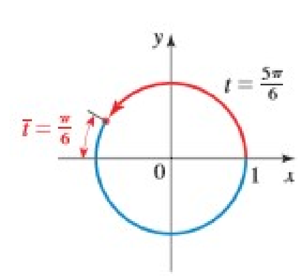
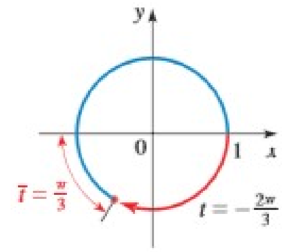
b) $t = 5{,}80 \rightarrow \underline{t} = 2\pi - 5{,}80 \approx 0{,}48$



a)



b)

c) $t = \frac{5\pi}{6} \;\rightarrow\; \underline{t} = \pi - \frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$ d) $t = -\frac{2\pi}{3} \;\rightarrow\; \underline{t} = \pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$	c) 	d) 

Este procedimiento se conoce como "**Reducción al primer cuadrante**"

Ejemplo 7:

Calcule el punto terminal P sobre la circunferencia determinado por cada uno de los números reales t.

a) $t = \frac{5\pi}{6}$ b) $t = \frac{7\pi}{4}$ c) $t = -\frac{2\pi}{3}$

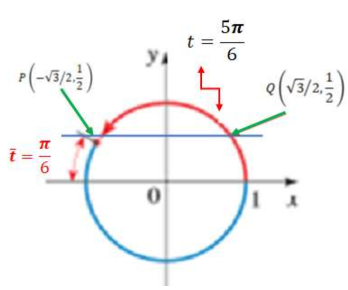
¿Cómo procedemos?

Para determinar el punto P definido por cualquier valor de t, seguimos los pasos siguientes:

1. Encontrar el número de referencia $\underline{t}$. (Recién calculado)
2. Encontrar el punto sobre la circunferencia $Q(a, b)$ definido por $\underline{t}$.
3. El punto determinado por t es $P(\pm a, \pm b)$, donde los signos se eligen de acuerdo con el cuadrante en el cual está este punto sobre la circunferencia.

a) Resolveremos sólo el primer caso, el resto se deja al estudiante. Si $t = \frac{5\pi}{6}$, el número de referencia es $\underline{t} = \frac{\pi}{6}$, el cual define el punto $Q\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$ sobre la circunferencia conforme calculamos antes.

Puesto que el punto determinado por t está en el segundo cuadrante, su coordenada x es negativa y su coordenada y es positiva. Por consiguiente, el punto sobre la circunferencia deseado es $P\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$.



ϕ

Trabajo Práctico

Ejercicio N°9

Suponga que el punto definido por t es el punto $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ de la circunferencia unitaria. Encuentre las coordenadas del punto sobre la circunferencia definido por cada uno de los siguientes valores:

a. $\pi - t$

b. $-t$

c. $\pi + t$

d. $t - \pi$

Ejercicio N° 10

Calcule el número de referencia para cada valor de t y el punto determinado por t.

e. $t = \frac{5}{4}\pi$

f. $t = \frac{7}{3}\pi$

g. $t = -\frac{4}{3}\pi$

h. $t = \frac{\pi}{6}$

4. FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE NÚMEROS REALES.

Una función real de variable real es una regla que asigna a cada número real un único número real. En la Unidad 4 nos referíamos a este hecho como unicidad y existencia.

Usaremos los puntos sobre la circunferencia unitaria para definir las funciones trigonométricas de números reales.

Sea entonces

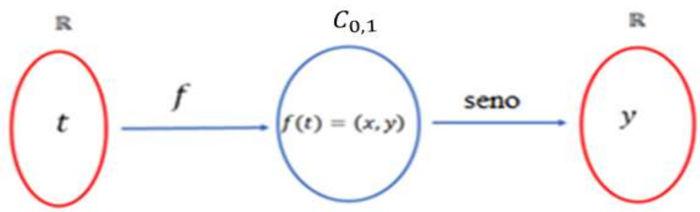
$$f:\ R \to C_{O,1}$$
$$t \to f(t) = (x, y) \quad tal\ que\ x^2 + y^2 = 1$$

Con estas coordenadas de $P(x, y)$ **definimos** las funciones trigonométricas así:

Definición de las funciones Trigonométricas		
Sea t un número real y sea $P(x, y)$ el punto de la circunferencia unitaria determinado por t. Definimos		
$sen(t) = y$	$cos\,(t) = x$	$tan\,(t) = \frac{y}{x}\ \ (x \neq 0)$
$cosec(t) = \frac{1}{y}\ \ (y \neq 0)$	$sec(t) = \frac{1}{x}\ \ (x \neq 0)$	$cot\,(t) = \frac{x}{y}\ \ (y \neq 0)$

Dado que estas funciones se pueden definir en términos de la circunferencia unitaria, se las llama también funciones circulares.

Podemos esquematizar una de las funciones, a manera de ejemplo, de la siguiente manera:



$sen\colon\ C_{0,1} \ \to\ R$ $\quad (x, y)\ \to\ y$

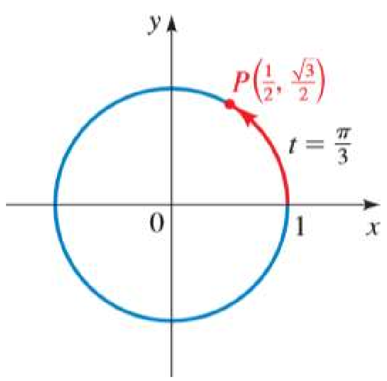
$cos\colon\ C_{0,1} \ \to\ R$ $\quad (x, y)\ \to\ x$

$tan\colon\ C_{0,1} \ \to\ R$ $\quad (x, y)\ \to\ \dfrac{y}{x}$ para $x \neq 0$

Ejemplo 8: Evaluación de las funciones trigonométricas

Calcule las seis funciones trigonométricas de cada número real t dado.

a) $t = \frac{\pi}{3}$ b) $t = \frac{\pi}{2}$



Según la tabla, vemos que el punto determinado por $t = \frac{\pi}{3}$ es $P\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

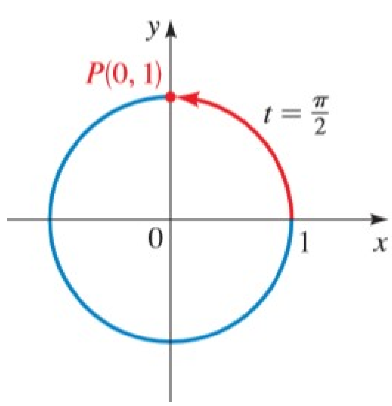
Las coordenadas son $x = \frac{1}{2}$ e $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Por lo tanto, las funciones circulares son:

$sen\left(\frac{\pi}{3}\right) = y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad cos\ cos\ \left(\frac{\pi}{3}\right) = x = \frac{1}{2}$

$tan\ tan\ \left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$ $\qquad cosec\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

$sec\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2$ $\qquad cot\ cot\ \left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ◆



Según la tabla, vemos que el punto determinado por $t = \frac{\pi}{2}$ es $P(0\,,1)$.

Las coordenadas son $x = 0$ e $y = 1$

Por lo tanto, las funciones circulares son:

$sen\left(\frac{\pi}{2}\right) = y = 1$ $\qquad cos\ cos\ \left(\frac{\pi}{2}\right) = x = 0$

$tan\ tan\ \left(\frac{\pi}{2}\right)\ no\ está\ definida$ $\qquad cosec\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{1} = 1$

$sec\left(\frac{\pi}{2}\right) no\ está\ definida$ $\qquad cot\ cot\ \left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{0}{1} = 0$

	Tanto $tan\, tan\left(\frac{\pi}{2}\right)$ como $sec\left(\frac{\pi}{2}\right)$ no están definidas porque $x = 0$ aparece en el denominador en cada una de sus definiciones. ◆

Podemos hacer la siguiente tabla, de forma nemotécnica:

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
Seno	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$
Coseno	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$

Al resolver y simplificar nos queda:

$$sen\left(\frac{\pi}{2}\right) = y = 1$$

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
Seno	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
Coseno	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Esta tabla puede ser completada con las demás funciones trigonométricas:

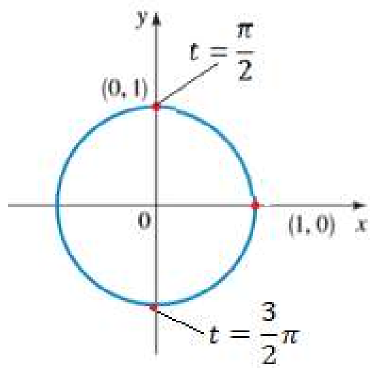
t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$sen(t)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$cos(t)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$tan(t)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	----
$cosec(t)$	----	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	1
$sec(t)$	1	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2	----
$cot(t)$	----	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Como podemos observar, existen algunos valores de t para los cuales algunas funciones no están definidas.

Dominios de las Funciones Trigonométricas

Como $sen(t) = y$ y $cos(t) = x$, ambas funciones están definidas para todos los números reales.

Ya $tan\,tan\,(t)\ = \frac{y}{x}\ (x \neq 0)$ y $sec(t) = \frac{1}{x}\ (x \neq 0)$ no están definidas cuando $P(x, y)$ tiene coordenada $x = 0$. Esto ocurre, por ejemplo, para $t = \frac{\pi}{2}$ y para $t = \frac{3}{2}\pi$.

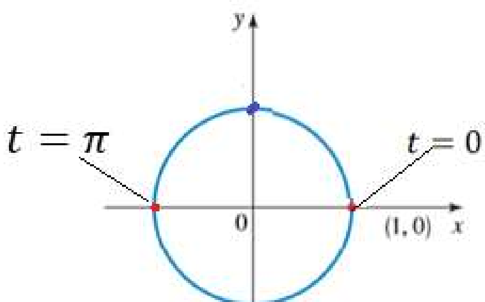


Como P pasa por estos puntos cada $n\pi$ - veces, podemos sintetizar el dominio de la $tan\,tan\,(t)$ y de la $sec(t)$ como

$$\left\{t \in R:\ t \neq \frac{\pi}{2} + n\pi\ \ para\ todo\ \ n \epsilon Z\ \right\}$$

Como $cot\,cot\,(t)\ = \frac{x}{y}\ (y \neq 0)$ y $cosec(t) = \frac{1}{y}\ (y \neq 0)$ no están definidas para $y = 0$, estos casos deben ser excluidos del dominio.

¿Cuándo el punto final P tiene ordenada $y = 0$?



Esto ocurre cuando $t = 0,\ \pi,\ 2\pi,\ 3\pi, \ldots,\ n\pi$, lógicamente, estos valores deben ser retirados del dominio de estas funciones. El dominio queda así:

$$\{t \in R:\ t \neq n\pi\ \ para\ todo\ n\ \epsilon\ Z\}$$

Dominio de las funciones trigonométricas	
Función	Dominio
$seno, coseno$	Todos los números reales
$tangente, secante$	Todos los números reales diferentes de $\frac{\pi}{2} + n\pi$ para cualquier entero n
$cotangente\ , cosecante$	Todos los números reales que no sean $n\pi$ para cualquier entero n

Conocemos los valores de las funciones trigonométricas para los t que determinan puntos en el primer cuadrante. Para calcular los valores de las funciones en los demás cuadrantes, lo primero que necesitamos conocer son los signos que toman las mismas en los diferentes cuadrantes.

Los signos de las funciones trigonométricas dependen del cuadrante en el cual se encuentre el punto determinado por t, conforme indica el siguiente cuadro.

Signos de Las Funciones Trigonométricas		
Cuadrante	Función Positiva	Función Negativa
I	Todas	Ninguna
II	Seno, Cosecante	Coseno, Secante, Tangente, Cotangente
III	Tangente, Cotangente	Seno, Cosecante, Coseno, Secante
IV	Coseno, Secante	Seno, Cosecante, Tangente, Cotangente

Ejemplo 9: Cálculo de todas las funciones trigonométricas a partir del valor de una.

Si $cos\,(t)\ = \frac{3}{5}$ y t está en el cuadrante IV, calcule los valores de todas las funciones trigonométricas en t.

Solución

Sabemos que $x = cos\ cos\ t$ e $y = sen\ t$, también sabemos que $P(x, y)$ el punto de la circunferencia unitaria determinado por t y vale la ecuación $x^2 + y^2 = 1$, por lo que:

$$sen^2(t) + cos^2(t) = 1$$

$$sen^2(t) + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1 \qquad \text{Sustitución de } cos\ cos\ (t)\ = \frac{3}{5}$$

$$sen^2(t) = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \qquad \text{Despeje de } sen^2(t)$$

$$sen(t) = \pm\frac{4}{5} \qquad \text{Obtención de las raíces cuadradas}$$

Puesto que este punto está en el cuadrante IV, $sen(t)$ es negativo, de modo que $sen(t) = -\frac{4}{5}$. Ahora que ya conocemos tanto $sen(t)$ como $cos(t)$, podemos calcular los valores de las otras funciones trigonométricas usando sus definiciones:

$$y = sen(t) = -\frac{4}{5} \qquad (t)\ = \frac{3}{5} \qquad tan\ tan\ (t)\ = \frac{y}{x} = \frac{sen(t)}{cos\ (t)} = \frac{\frac{-4}{5}}{\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}$$

$$cosec(t) = \frac{1}{y} = \frac{1}{sen(t)} = -\frac{5}{4} \qquad sec\ (t)\ = \frac{1}{x} = \frac{1}{cos\ (t)} = \frac{5}{3} \qquad cot(t) = \frac{x}{y} = \frac{1}{tan\ (t)} = -\frac{3}{4}$$

◆

Trabajo Práctico

Ejercicio N° 11

Determine sin calculadora el valor exacto de la función trigonométrica en el número dado.

a. $sen\frac{2\pi}{3}$ b. $cos\frac{5\pi}{6}$ c. $tan\frac{7\pi}{3}$

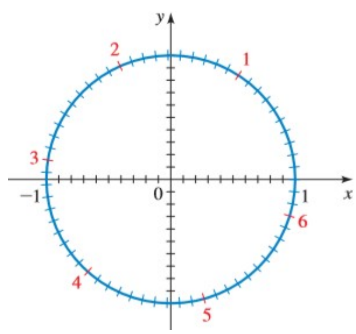
d. $cot\frac{5\pi}{4}$ e. $sec\frac{7\pi}{3}$ f. $cosec-\frac{\pi}{2}$

Ejercicio N° 12

Estime el valor aproximado de la función trigonométrica dada usando a) la figura y b) una calculadora. Compare los dos valores.

a) $sen(1)$ b) $cos(0.8)$ c) sen (1.2) d) $cos(5)$

e) $tan(0.8)$ f) $tan(-1.3)$ g) cos (4.1) h) $sen(-5.2)$



Ejercicio N° 13

Se proporciona el punto $P(x, y)$ determinado por un número real t. Encuentre $sen\ (t)$, $cos\ (t)$ y $tan\ (t)$.

a) $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ b) $\left(\frac{\sqrt{5}}{4}, -\frac{\sqrt{11}}{4}\right)$ c) $\left(-\frac{6}{7}, \frac{\sqrt{13}}{7}\right)$ d) $\left(-\frac{5}{13}, -\frac{12}{13}\right)$

4. GRÁFICAS DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS.

La gráfica de una función describe el comportamiento de ésta.

Las funciones trigonométricas pueden ser graficadas y se les pueden aplicar las mismas transformaciones que se estudiaron en la unidad 4, a saber, sumar (dentro y fuera del argumento), multiplicar (dentro y fuera del argumento) y reflejar.

Comenzaremos graficando el seno y el coseno.

Algunas observaciones se imponen. La primera es que dichas funciones, al estar definidas en función de las coordenadas del punto $P(x, y)$ sobre la circunferncia unitaria, necesariamente, repiten su valor según cierto patrón.

Recordemos que la longitud de la circunferencia unitaria es 2π. Podemos inferir entonces que el punto $P(x,y)$ determinado por (t) es el mismo que el determinado por $(t+2\pi)$. Este hecho lo podemos expresar en término de las funciones trigonométricas. Así:

$$sen(t+2n\pi)=sen(t) \qquad \text{para cualquier entero } n$$

$$cos\, cos\,(t+2n\pi)\; =cos(t) \qquad \text{para cualquier entero } n$$

A este tipo de funciones se las conoce como funciones periódicas.

Una función se dice **periódica** si existe un número positivo "p" tal que $f(t+p)=f(t)$ para todo t.

Tal número positivo mínimo "p" , si existe, es llamado de periodo de la función f.

Si f tiene periodo p, entonces se dice que la gráfica de f en cualquier intervalo de longitud p es un periodo completo de f.

Propiedades periódicas del seno y el coseno
Las funciones seno y coseno tienen periodo 2π: $sen(t+2\pi)=sen(t) \qquad cos\,(t+2\pi)\; =cos(t)$

Por tanto, las funciones seno y coseno repiten sus valores en cualquier intervalo de longitud 2π.

Generalmente graficamos un periodo. En este caso, el comprendido entre $0\le t<2\pi$

Podemos usar varios Métodos:

Método 1. Mediante calculadora: completar una tabla de valores, localizar los puntos en el plano cartesiano y trazar la gráfica.

Método 2. Usar los elementos aprendidos en la unidad de funciones sobre la caracterización de éstas: Dominio, aquí $0\le t<2\pi$, ceros, puntos de máximo y de mínimo, junto con algunos recursos del ítem anterior, si se hace necesario.

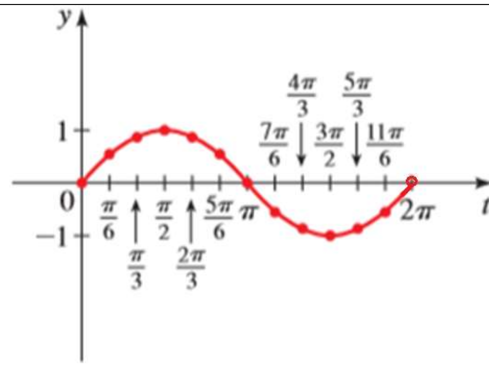
Método 3. Usar un método geométrico, el cual creemos más apropiado, por lo menos en la construcción de la gráfica de la función seno.

Veamos cómo procedemos con cada uno de estos métodos, sus ventajas y desventajas.

Función Seno

Usando esta tabla de valores construida con ayuda de la circunferencia trigonométrica (reducción al primer cuadrante- ejemplo 4 y 5), localizamos los puntos en el plano cartesiano y los unimos.

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\operatorname{sen} t$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0



Un periodo de $y = sen(t)$

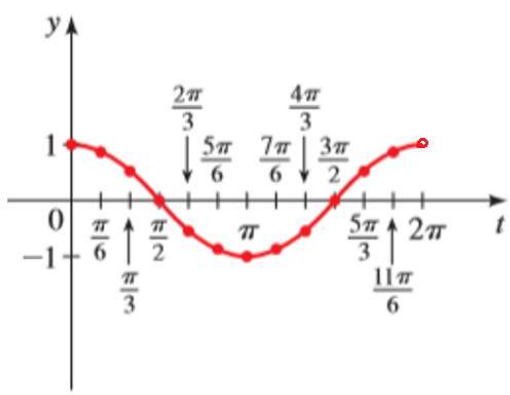
$0 \leq t < 2\pi$

La principal dificultad de este método consiste en la localización de puntos tales como $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, incluso del propio $(\pi, 0)$

Función Coseno

Analizaremos ahora la función coseno. Al igual que en el caso de la función seno usamos una tabla de valores construida con ayuda de la circunferencia trigonométrica, localizamos los puntos en el plano cartesiano y los unimos.

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\cos t$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1



Un periodo de $y = cos(t)$

$0 \leq t < 2\pi$

La principal dificultad continúa siendo la misma, o sea, la localización de puntos tales como $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, incluso del propio $(\pi, 0)$

5. GRÁFICAS DE TRANSFORMACIONES DE SENO Y COSENO

A partir de ahora, como no utilizaremos más la circunferencia trigonométrica, haremos uso de la letra x para representar la variable independiente de las funciones trigonométricas.

Consideraremos las gráficas de funciones que son transformaciones de las funciones seno y coseno. Podemos utilizar las mismas técnicas de graficación de las funciones de la Unidad 4.

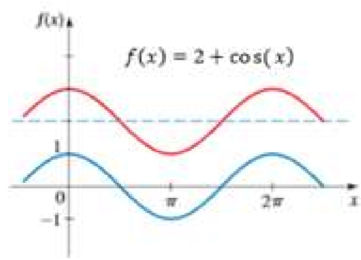
Ejemplo 8: Curvas del coseno

Trace la gráficas de cada función.

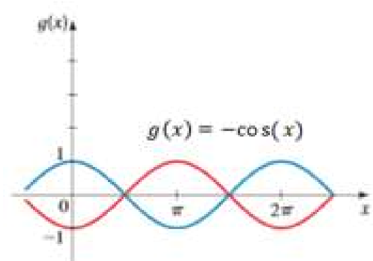
a) $f(x) = 2 + cos(x)$ b) $g(x) = -cos(x)$

Solución

a) La gráfica de $y = cos(x)$, se desplaza hacia arriba 2 unidades, como ocurriría con cualquier función estudiada en la Unidad 4.



b) Al multiplicar por (-1) se produce una reflexión respecto del $eje\ x$ de la gráfica $y = cos(x)$, como ocurriría con cualquier función estudiada en la Unidad 4.



Trabajo Práctico

Ejercicio N° 14

Dibuje la gráfica de las funciones

a) $y = 3 + cos(x)$ b) $y = -2 - sen(x)$ c) $y = |sen(x)|$

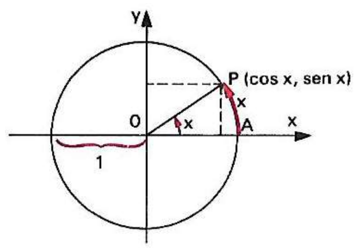
Observación importante:

En todas las gráficas, en el $eje\ x$, las únicas unidades de medida que se deben representar son de $longitud$. Jamás deben colocarse grados sexagesimales, ya que estamos trabajando con funciones de Dominio e Imagen reales.

8. IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS.

Relaciones entre las funciones trigonométricas

Ahora que conocemos las varias funciones trigonométricas, veremos algunas importantes relaciones que las vinculan.



La distancia de $P(cos\ cos\ (x)\ , sen(x))$ al origen del sistema $(0\ ,0)$ es 1. Entonces:

$$\sqrt{(cos\ cos\ x - 0\ )^2 + (sen\ x - 0)^2} = 1 \Rightarrow \sqrt{cos^2x + sen^2x} = 1 \text{ elevando al cuadrado}$$

$$cos^2x + sen^2x = 1 \text{ relación fundamental}$$

A partir de esta relación podemos obtener las siguientes relaciones conocidas como ecuaciones pitagóricas.

Dividiendo ambos miembros de la relación fundamental por cos^2x queda:

$$\frac{cos^2x}{cos^2x} + \frac{sen^2x}{cos^2x} = \frac{1}{cos^2x}$$

$$1 + tan^2x = \frac{1}{cos^2x} = sec^2x$$

Dividiendo ambos miembros de la relación fundamental por sen^2x queda:

$$\frac{cos^2x}{sen^2x} + \frac{sen^2x}{sen^2x} = \frac{1}{sen^2x}$$

$$cotan^2x + 1 = \frac{1}{sen^2x} = cosec^2x$$

Resumiendo, tenemos que para cualquier valor real de x, para el cual las funciones existen, son verdaderas las siguientes ecuaciones.

Identidades Pitagóricas		
$cos^2x + sen^2x = 1$	$1 + tan^2x = sec^2x$	$cotan^2x + 1 = cosec^2x$

Ecuaciones de este tipo, que producen sentencias numéricas verdaderas para cualquier valor de x - siempre que x pertenezca al dominio de las funciones involucradas - son llamadas **IDENTIDADES**.

Veamos otras identidades importantes:

Identidades Recíprocas		
$cosec(x) = \frac{1}{sen(x)}$	$sec(x) = \frac{1}{cos(x)}$	$cot(x) = \frac{1}{tan(x)}$
$tan(x) = \frac{sen(x)}{cos(x)}$	$cot(x) = \frac{cos(x)}{sen(x)}$	
Identidades pares-impares		
$sen(-x) = -sen(x)$	$cos(-x) = cos(x)$	$tan\, tan\,(-x) = -tan(x)$

Estas identidades permiten **simplificar** expresiones trigonométricas.

Para simplificar las **expresiones algebraicas**, usamos

la factorización,

denominadores comunes y

las fórmulas de productos especiales.

Para simplificar **expresiones trigonométricas** usamos

estas mismas técnicas y

las identidades trigonométricas fundamentales

Veamos algunos ejemplos y aplicaciones:

Simplificación de expresiones trigonométricas

Ejemplo 11: Simplificación de una expresión trigonométrica

Simplifique la expresión $cos\, cos\,(t) + tan\, tan\,(t)\, sen(t)$

Solución

Primero volvemos a escribir la expresión en términos de seno y coseno.

$$\begin{aligned}
\cos t + \tan t \operatorname{sen} t &= \cos t + \left(\frac{\operatorname{sen} t}{\cos t}\right)\operatorname{sen} t && \text{Identidad recíproca} \\
&= \frac{\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t}{\cos t} && \text{Denominador común} \\
&= \frac{1}{\cos t} && \text{Identidad pitagórica} \\
&= \sec t && \text{Identidad recíproca}
\end{aligned}$$

◆

Ejemplo 12: Simplificación mediante combinación de fracciones

Simplifique la expresión $\frac{sen\theta}{cos\theta} + \frac{cos\theta}{1+sen}$

Solución

Combinamos las fracciones usando un denominador común.

$$\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{1+\operatorname{sen}\theta}=\frac{\operatorname{sen}\theta\,(1+\operatorname{sen}\theta)+\cos^2\theta}{\cos\theta\,(1+\operatorname{sen}\theta)}$$ Denominador común

$$=\frac{\operatorname{sen}\theta+\operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta}{\cos\theta\,(1+\operatorname{sen}\theta)}$$ Distribución de sen θ

$$=\frac{\operatorname{sen}\theta+1}{\cos\theta\,(1+\operatorname{sen}\theta)}$$ Identidad pitagórica

$$=\frac{1}{\cos\theta}=\sec\theta$$ Cancelación y uso de la identidad recíproca

◆

Demostración de Identidades Trigonométricas.

Ahora estamos en condiciones de trabajar con ecuaciones que contengan expresiones trigonométricas y verificar si dichas ecuaciones son identidades o no lo son.

Resulta útil tener un criterio o procedimiento sugerido para tal fin.

Primero, es fácil decidir cuándo una ecuación no es una identidad. Todo lo que necesitamos hacer es demostrar que la ecuación no se cumple para algunos valores de la variable (o variables). Por consiguiente, la ecuación:

$$sen(x) + cos\ cos\ (x) = 1$$

no es una identidad, porque cuando $x = \frac{\pi}{4}$, tenemos:

$$sen\left(\frac{\pi}{4}\right) + cos\ cos\ \left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}\neq 1$$

Para comprobar que una ecuación trigonométrica es una identidad, transformamos un miembro de la ecuación en el otro mediante una serie de pasos, cada uno de los cuales es en sí mismo una identidad.

Criterios para demostrar identidades trigonométricas

1. **Empezar con un miembro.** Elija un miembro de la ecuación y escríbalo. Su objetivo es transformarlo en el otro miembro. Por lo regular es más fácil iniciar con el lado más complicado.
2. **Aplicar identidades conocidas.** Use el álgebra y las identidades que conozca para cambiar el lado con el que empezó. Obtenga el común denominador de las expresiones, factorice y aplique las identidades fundamentales para simplificar las expresiones.
3. **Convertir en senos y cosenos.** Si encuentra difícil continuar, es útil volver a escribir todas las funciones en términos de senos y cosenos.

Veremos algunos ejemplos importantes, pero que no agotan los recursos del procedimiento.

Ejemplo 13: Demostración de una identidad mediante la reescritura en términos de seno y coseno

Compruebe la identidad $cos\ cos\ \theta(sec\theta - cos\theta) = sen^2\theta$

Solución

El primer miembro se ve más complicado, así que iniciamos con él y tratamos de transformarlo en el segundo miembro.

$$
\begin{aligned}
\text{PM} &= \cos\theta\,(\sec\theta - \cos\theta) & \\
&= \cos\theta\left(\frac{1}{\cos\theta} - \cos\theta\right) && \text{Identidad recíproca} \\
&= 1 - \cos^2\theta && \text{Desarrollo} \\
&= \text{sen}^2\theta = \text{SM} && \text{Identidad pitagórica}
\end{aligned}
$$

◆

Ejemplo 14: Demostración de una identidad mediante la combinación de fracciones

Verifique la identidad $2tan\,(x)\,sec\,(x) = \frac{1}{1-s\quad(x)} - \frac{1}{1+sen(x)}$

Solución

Mediante un común denominador y la combinación de las fracciones en el segundo miembro de esta ecuación obtenemos

$$
\begin{aligned}
\text{SM} &= \frac{1}{1-\text{sen}\,x} - \frac{1}{1+\text{sen}\,x} & \\
&= \frac{(1+\text{sen}\,x)-(1-\text{sen}\,x)}{(1-\text{sen}\,x)(1+\text{sen}\,x)} && \text{Común denominador} \\
&= \frac{2\,\text{sen}\,x}{1-\text{sen}^2x} && \text{Simplificación} \\
&= \frac{2\,\text{sen}\,x}{\cos^2x} && \text{Identidad pitagórica} \\
&= 2\,\frac{\text{sen}\,x}{\cos x}\left(\frac{1}{\cos x}\right) && \text{Factorización} \\
&= 2\tan x\sec x = \text{PM} && \text{Identidades recíprocas}
\end{aligned}
$$

◆

Veremos otras identidades útiles (sin demostración) que se usan con mucha frecuencia.

Fórmulas de adición y sustracción.

$$
\begin{gathered}
sen(\alpha+\beta) = sen(\alpha)cos(\beta) + cos(\alpha)sen(\beta) \\
sen(\alpha-\beta) = sen(\alpha)cos(\beta) - coscos(\alpha)sen(\beta) \\
cos(\alpha+\beta) = cos(\alpha)cos(\beta) - (\alpha)sen(\beta) \\
cos(\alpha-\beta) = cos(\alpha)cos(\beta) + sen(\alpha)sen(\beta)
\end{gathered}
$$

Trabajo Práctico

Ejercicio N° 15

Verifique las siguientes identidades trigonométricas

a. $(\operatorname{sen} x + \cos x)^2 = 1 + 2 \operatorname{sen} x \cos x$

b. $\frac{\sec x \ \cot x}{\csc x} = 1$

c. $\frac{\csc x - \cot x}{\sec x - 1} = \cot x$

d. $\csc x\, [\csc x - \operatorname{sen} x] = \cot^2 x$

e. $\tan^2 x - \operatorname{sen}^2 x = \tan^2 x \ \operatorname{sen}^2 x$

f. $\cot(-x) \cos(-x) + \operatorname{sen}(-x) = -\csc x$

g. $\operatorname{sen} 8x = 2 \operatorname{sen} 4x \cos 4x$

h. $\frac{2 \tan x}{1+\tan^2 x} = \operatorname{sen} 2x$

i. $\frac{2(\tan x - \cot x)}{\tan^2 x - \cot^2 x} = \operatorname{sen} 2x$

j. $\cot 2x = \frac{1-\tan^2 x}{2 \tan x}$

9. ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS.

Una ecuación que contiene funciones trigonométricas se denomina **ECUACIÓN TRIGONOMÉTRICA**.

Ejemplos:

$$sen^2(x) + cos^2(x) = 1$$

$$2sen(x) - 1 = 0$$

$$tan^2(x) - 3 = 0$$

La primera ecuación, como ya vimos, es una identidad, o sea, es una sentencia verdadera para todo valor de la variable x.

Las otras dos ecuaciones se cumplen sólo para ciertos valores de x.

Para resolver una ecuación trigonométrica, calculamos <u>todos</u> los valores de la variable que hacen que la ecuación sea verdadera.

Siempre usaremos radianes para la variable excepto en algunos problemas de aplicación.

¿Qué tipo de ecuaciones trigonométricas veremos en este curso?

1. Resolución de ecuaciones trigonométricas del tipo:

$$2sen(x) - 1 = 0$$

$$tan^2(x) - 3 = 0$$

2. Una ecuación del tipo cuadrático

$$2cos^2(x) - 7cos(x) + 3 = 0.2$$

3. Funciones trigonométricas de ángulos múltiples

$$\sqrt{3}tan\left(\frac{x}{2}\right) - 1 = 0$$

Resolución de ecuaciones trigonométricas

Aplicamos las reglas del álgebra y aislamos la función trigonométrica en un lado del signo igual.

Luego usamos los conocimientos de los valores de las funciones trigonométricas para determinar la variable.

Ejemplo 15: Resolución de una ecuación trigonométrica

Resuelva la ecuación $2sen(x) - 1 = 0$

Solución

Empezamos por aislar $sen\ (x)$.

$2\ sen(x) - 1 = 0$ Ecuación dada

$2\ sen(x) = 1$ Sumando 1 en ambos miembros

$sen(x) = \frac{1}{2}$ Dividiendo por 2 ambos miembros de la igualdad

Puesto que el seno tiene un periodo de 2π, primero calculamos las soluciones en el intervalo $[0, 2\pi)$. Éstas son $x = \pi/6$ y $x = 5\pi/6$. Para determinar todas las otras soluciones sumamos cualquier múltiplo entero de 2π a estas soluciones. Por lo tanto, las soluciones son

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad , \quad x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

donde k es cualquier entero.

En la figura 1. se ilustra una representación gráfica de las soluciones usando las funciones trigonométricas.

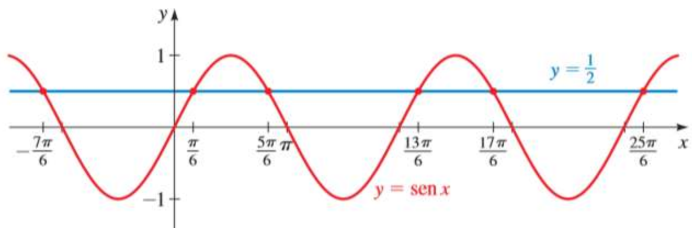


Fig 1.

En la fig 2. se ilustra una representación gráfica de las soluciones usando la circunferencia trigonométrica. Esta representación suele ser muy útil.

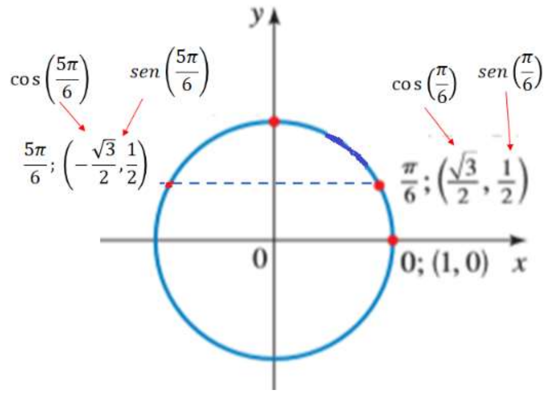


Fig 2

◆

Ejemplo 15:Una ecuación de tipo cuadrático

Resuelva la ecuación $2cos^2(x) - 7cos(x) + 3 = 0.2$

Solución

Factorizamos el primer miembro de la ecuación:

Ecuación de tipo cuadrático
$2C^2 - 7C + 3 = 0$
$(2C - 1)(C - 3) = 0$

		$2\cos^2 x - 7\cos x + 3 = 0$	Ecuación dada
		$(2\cos x - 1)(\cos x - 3) = 0$	Factorización
$2\cos x - 1 = 0$	o	$\cos x - 3 = 0$	Cada factor se iguala a 0
$\cos x = \frac{1}{2}$	o	$\cos x = 3$	Determinación de cos x

Puesto que el coseno tiene periodo de 2π, primero calculamos las soluciones en el intervalo $[0, 2\pi)$. En el caso de la primera ecuación, son $x = \pi/3$ y $x = 5\pi/3$. La segunda ecuación no tiene soluciones porque $cos\ (x)$ nunca es mayor que 1. Por consiguiente, las soluciones son

$$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad , \quad x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$$

donde k es cualquier entero. ◆

Ejemplo 16: Uso de una identidad trigonométrica

Resuelva la ecuación $1 + sen(x) = 2cos^2(x)$

Solución

Usamos una identidad trigonométrica para volver a escribir la ecuación en términos de una sola función trigonométrica.

	$1 + \operatorname{sen} x = 2\cos^2 x$	Ecuación dada
	$1 + \operatorname{sen} x = 2(1 - \operatorname{sen}^2 x)$	Identidad pitagórica
	$2\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - 1 = 0$	Todos los términos se pasan a un solo lado de la ecuación
Ecuación de tipo cuadrático $2S^2 + S - 1 = 0$ $(2S-1)(S+1) = 0$	$(2\operatorname{sen} x - 1)(\operatorname{sen} x + 1) = 0$	Factorización
	$2\operatorname{sen} x - 1 = 0 \quad \text{o} \quad \operatorname{sen} x + 1 = 0$	Todos los factores se igualan a 0
	$\operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \quad \text{o} \quad \operatorname{sen} x = -1$	Determinación de sen x
	$x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \quad \text{o} \quad x = \frac{3\pi}{2}$	Determinación de x en el intervalo $[0, 2\pi)$

Como el periodo del seno es 2π, obtenemos todas las soluciones de la ecuación sumando cualquier entero múltiplo de 2π a estas soluciones. Por lo tanto, las soluciones son

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad , \quad x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \quad , \quad x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$$

donde k es un entero cualquiera. ◆

Trabajo Práctico

Ejercicio N° 16

Encuentre todos los valores de x para los cuales se verifica:

$$sen\ x + 2 = -sen^2 x + \frac{5}{2}\ sen\ x + \frac{3}{2}$$

Ejercicio N° 17

Resuelve cada ecuación trigonométrica en el intervalo $[0, 2\pi)$ y verifique las soluciones.

a. $2cos^2 x + 5cos\ x + 2 = 0$

b. $sen^2 x - cos\ x = 0$

a. $(tan\ x + \sqrt{3})(cos\ x + 2) = 0$

b. $cos\ x\ .\ senx - 2\ cosx = 0$

e. $sen^2 x = 4 - cos^2 x$