Unidad 6

Trigonometría

En este apunte los estudiantes encontrarán contenidos básicos de:

- Ángulos y sistemas de medición.
- Longitud de arco y circunferencia
- Trigonometría de triángulos rectángulos.
- Circunferencia unitaria.
- Funciones trigonométricas.
- Identidades trigonométricas.
- Ecuaciones trigonométricas.

Índice

1. Introducción **2**
Longitud de arco y circunferencia 5

2. Los triángulos rectángulos **6**
Resolución de problemas 8

3. La circunferencia unitaria **9**
Puntos sobre la Circunferencia Unitaria 12
Puntos especiales sobre la Circunferencia 14
Número de referencia y su importancia 15

4. Funciones trigonométricas de números reales **17**
Dominios de las Funciones Trigonométricas 18
Gráficos de las funciones trigonométricas 19
Periodicidad de las Funciones Trigonométricas 19
Propiedades periódicas del seno y el coseno 20
Gráfico de la funciones seno y coseno 20

5. Identidades trigonométricas **21**
Identidades Pitagóricas 21
Resumen de Identidades 22
Identidades Recíprocas 22
Identidades Pares-Impares 22
Demostración de las identidades trigonométricas 23
Fórmulas de Adición y Sustracción 24

6. Ecuaciones Trigonométricas **25**
Resolución de Ecuaciones Trigonométricas 25
Tipos de Ecuaciones Trigonométricas 26

1. Introducción

La trigonometría es una de las ramas más versátiles de las matemáticas.

Tiene aplicaciones tanto teóricas como prácticas.

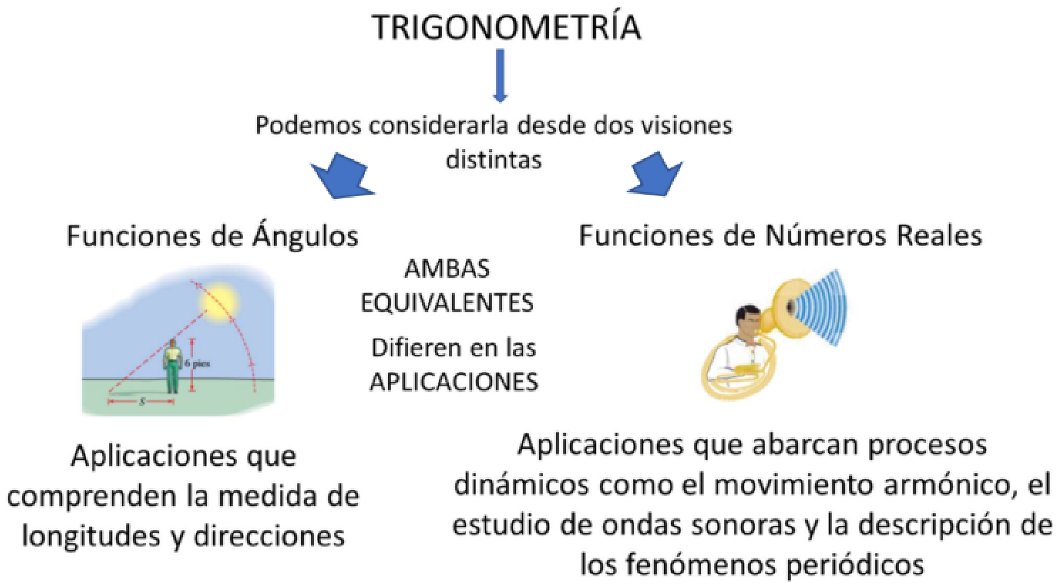
El poder y la versatilidad provienen del hecho que puede considerarse de dos maneras diferentes. Una de ellas define la trigonometría como el estudio de funciones de números reales, la otra como estudio de funciones de ángulos.

Las funciones trigonométricas definidas de estas dos formas son idénticas —asignan el mismo valor a un número real dado (en el segundo caso, el número real es la medida de un ángulo). La diferencia es sólo el punto de vista.

En uno de ellos, se presentan aplicaciones que abarcan procesos dinámicos como el movimiento armónico, el estudio de ondas sonoras y la descripción de los fenómenos periódicos.

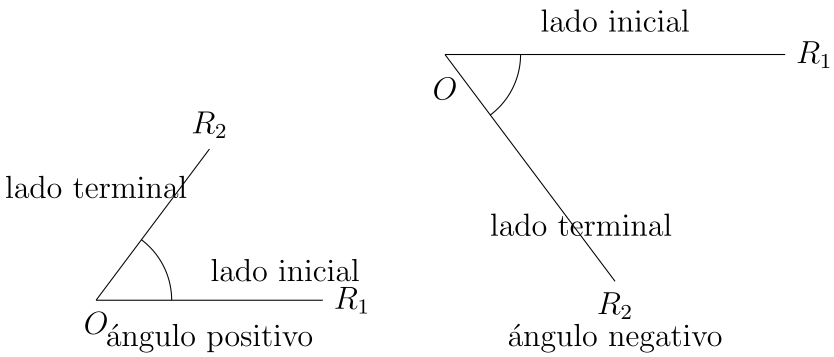
El otro enfoque permite aplicaciones estáticas, como por ejemplo la medición de distancias, fuerza, velocidad y, en general, aplicaciones que comprenden la medida de longitudes y direcciones.

Podríamos esquematizar sintéticamente de la siguiente manera.



¿Cómo podemos definir un ángulo?

Podemos considerar que un ángulo consta de dos rayos R_1 y R_2 con un vértice común O; uno de los rayos gira sobre el otro como muestra el ejemplo. Según el sentido de giro, el ángulo es positivo (si lo hace en el sentido antihorario) o negativo (en el sentido horario). Vea la figura siguiente:



¿Qué significa medir un ángulo?

La medida de un ángulo es la cantidad que rota uno de los rayos (R_2) respecto del otro (R_1), que queda fijo, teniendo al vértice O como punto fijo para realizar la rotación.

De manera intuitiva, esto es ¿cuánto se .ªbre.ᵉˡ ángulo en este giro?

Pregunta: ¿Qué se necesita para medir?

Respuesta: Se necesita un sistema de medición y una unidad de medida adecuada, tomada como patrón.

Los sistemas de medición, y sus unidades, más utilizados son tres:

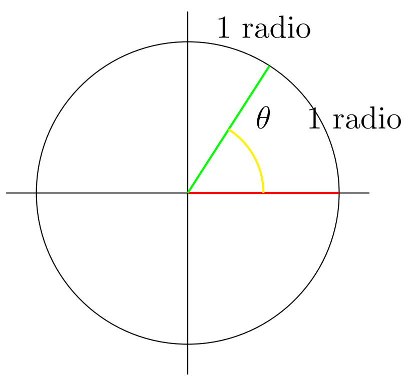
Sistema	**Unidad**
Centesimal	Grado centesimal (g)
Sexagesimal	Grado sexagesimal (°)
Circular	Radián (rad)

El sistema Centesimal prácticamente no es utilizado.

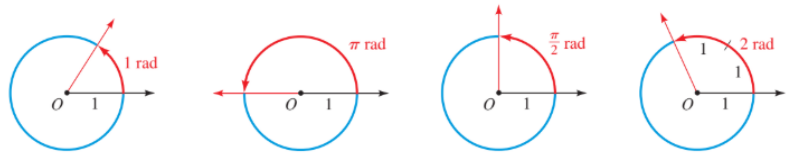
En el sistema sexagesimal la unidad de medida es el grado sexagesimal. El ángulo cuya medida es 1 grado, es el que se obtiene al hacer rotar el lado terminal la $\frac{1}{360}$ parte de un giro completo. Este ángulo se toma como unidad de medida del sistema sexagesimal. Cuando se dice "el ángulo α mide 28°", significa que esta unidad cabe 28 veces en el ángulo α; o que α puede ser subdividido en 28 ángulos de medida 1° cada uno.

En el sistema circular la unidad de medida es el radián.Este sistema es muy utilizado en cálculo y otras ramas de la matemática. El ángulo de un radián es aquél que "barre" un arco de longitud 1 radio. De allí deriva su nombre.

El ángulo θ mide 1 radián. El arco de circunferencia determinado por sus lados tiene la misma medida que el radio de la circunferencia.



En el siguiente gráfico vemos varios ejemplos de ángulos expresados en radianes.



Unidad de medida: Los ángulos se miden en radianes, donde un radián es el ángulo central que subtiende un arco igual al radio de la circunferencia.

Puesto que un giro completo medido en grados es 360 y medido en radianes es 2π (que es la longitud de la circunferencia unitaria), se obtiene la siguiente relación entre estos dos métodos de medición de ángulo.

$$180^\circ = \pi \text{ rad} \quad 1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ \qquad 1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad}$$

1. Para convertir grados en radianes, multiplique por $\frac{\pi}{180}$.
2. Para convertir radianes en grados, multiplique por $\frac{180}{\pi}$.

Ejemplo:

a. Exprese 60° en radianes.

b. Exprese $\frac{\pi}{6}$ rad en grados.

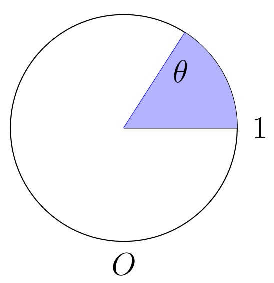
Solución: La relación entre grados y radianes da

a. $60^\circ = 60\left(\frac{\pi}{180}\right) \text{ rad} = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$

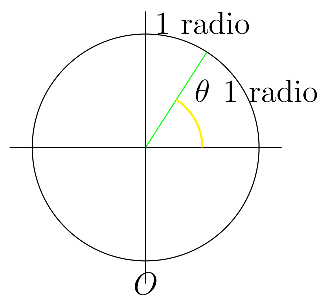
b. $\frac{\pi}{6} \text{ rad} = \left(\frac{\pi}{6}\right)\left(\frac{180}{\pi}\right) = 30^\circ$

Para resolver ejemplos semejantes podrá usar la noción de proporcionalidad o la estrategia que prefiera a partir de la equivalencia que comentamos anteriormente.

¿Cuál es la diferencia importante que cabe ser destacada entre estos sistemas de medición?



Medida de $\theta \approx 57{,}296^\circ$



Medida de $\theta = 1$ rad

Los grados son una unidad arbitraria dividida en 360 partes iguales. Los radianes son una unidad natural basada en la relación entre el arco de circunferencia y su radio. Un radián es el ángulo central que subtiende un arco igual al radio de la circunferencia.

En el gráfico anterior se muestra claramente el significado de la medida de un ángulo de 1 radián en ambos sistemas.

Queda claro entonces que la medida en radianes es una **longitud**, y como tal, puede ser representada en la recta real; ya, la medida en grados, que corresponde a un área, **no** puede ser representada en la recta real, pues en ésta sólo se pueden representar longitudes.

Longitud de arco y circunferencia

Un ángulo cuya medida en radianes es θ está subtendido por un arco que es la fracción $\theta/(2\pi)$ de la circunferencia de un círculo. Entonces, en una circunferencia de radio r, la longitud s de un arco que subtiende al ángulo θ (vea Figura 9) es

$$s = \frac{\theta}{2\pi} \times \text{circunferencia de círculo}$$

$$= \frac{\theta}{2\pi}(2\pi r) = \theta r$$

En una circunferencia de radio r, la longitud s de un arco que subtiende un ángulo central de θ radianes es

$$s = r\theta$$

Despejando θ, obtenemos la importante fórmula

$$\theta = \frac{s}{r}$$

Esta fórmula nos permite definir medidas en radianes usando una circunferencia de cualquier radio r. La medida en radianes de un ángulo θ es s/r, donde s es la longitud del arco circular que subtiende a θ en una circunferencia de radio r

Habiendo hecho estas consideraciones y usando la relación entre las unidades, podemos asociar las funciones trigonométricas de números reales, a funciones trigonométricas de ángulos.

Ejemplo:

a. Encuentre la longitud de un arco de circunferencia con radio 10 m que subtiende un ángulo central de 30°.

b. Un ángulo central θ de un círculo de radio 4 m está subtendido por un arco de longitud 6 m. Encuentre la medida de θ en radianes.

Solución:

a. Del ejemplo anterior vemos que $30° = \pi/6$ rad, por lo que la longitud del arco es

$$s = r\theta = (10)\frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{3}\,\text{m}$$

b. Por la fórmula $\theta = s/r$, tenemos

$$\theta = \frac{s}{r} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}\,\text{rad}$$

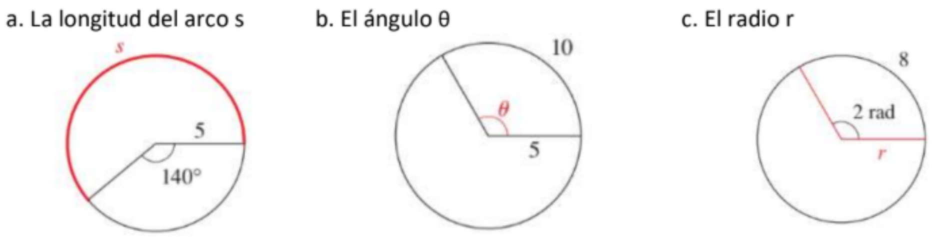
La mayor aplicación de las funciones trigonométricas de ángulos es la resolución de problemas relacionados a la medición de distancias, fuerza, velocidad y, en general, aplicaciones que comprenden la medida de longitudes y direcciones.

Trabajo Práctico

Ejercicio 1.Complete la siguiente tabla:

Medida sexagesimal	$0°$	$30°$			$90°$		$135°$	$150°$		$360°$
Medida radial	0		$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$		$\frac{2}{3}\pi$			π	

Ejercicio 2. En cada inciso calcule lo pedido:



Ejercicio 3. Resuelva:

a. Las ruedas de un auto miden 70 cm de diámetro. ¿Qué distancia (en kilómetros y en metros) recorrerá el auto si sus ruedas giran 10,000 veces sin resbalar?

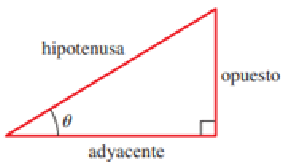
b. ¿Cuántas revoluciones hará una rueda de auto, de 75 cm de diámetro, cuando el auto recorre una distancia de 1,5 km?

c. Encuentre la distancia que la Tierra recorre en un día en su trayectoria alrededor del Sol. Suponga un año de 365 días y que la trayectoria de la Tierra alrededor del Sol es una circunferencia de $1,395 \times 10^8$ de km de radio.

---

2. Los triángulos rectángulos

Considere un triángulo rectángulo con θ como uno de sus ángulos agudos. Las relaciones trigonométricas se definen como sigue:

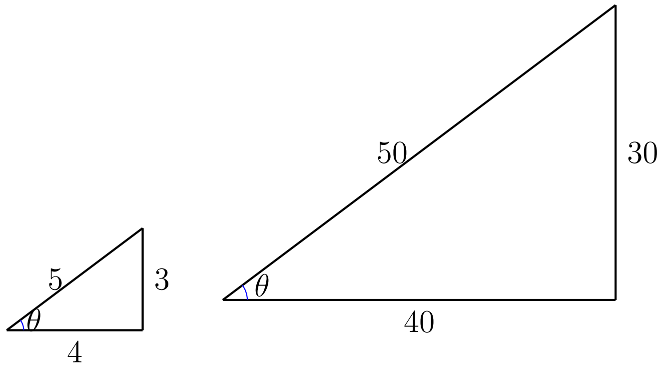


LAS RELACIONES TRIGONOMÉTRICAS

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{opuesto}}{\text{hipotenusa}} \qquad \cos\theta = \frac{\text{adyacente}}{\text{hipotenusa}} \qquad \tan\theta = \frac{\text{opuesto}}{\text{adyacente}}$$

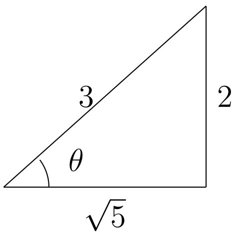
$$\csc\theta = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{opuesto}} \qquad \sec\theta = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{adyacente}} \qquad \cot\theta = \frac{\text{adyacente}}{\text{opuesto}}$$

Los símbolos que usamos para esas relaciones son abreviaturas de sus nombres completos: **seno**, **coseno**, **tangente**, **cosecante**, **secante**, **cotangente**. Como dos triángulos rectángulos cualesquiera con ángulo θ son semejantes, estas relaciones son iguales, cualquiera que sea el tamaño del triángulo, es decir, las relaciones trigonométricas dependen sólo del ángulo θ.



$\operatorname{sen}\theta = \frac{3}{5}$ $\qquad$ $\operatorname{sen}\theta = \frac{30}{50} = \frac{3}{5}$

Ejemplo 1
Calcule las seis razones trigonométricas para el ángulo θ en la figura:

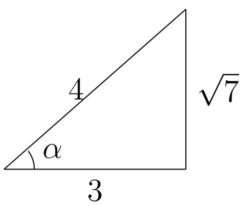


$\operatorname{sen}\theta = \frac{2}{3}$	$\cos\theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$	$\operatorname{tg}\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$
$\csc\theta = \frac{3}{2}$	$\sec\theta = \frac{3}{\sqrt{5}}$	$\cot\theta = \frac{\sqrt{5}}{2}$

Ejemplo 2
Si $\cos\alpha = \frac{3}{4}$ trace un triángulo rectángulo con α como uno de sus ángulos agudos y calcule las razones trigonométricas restantes.

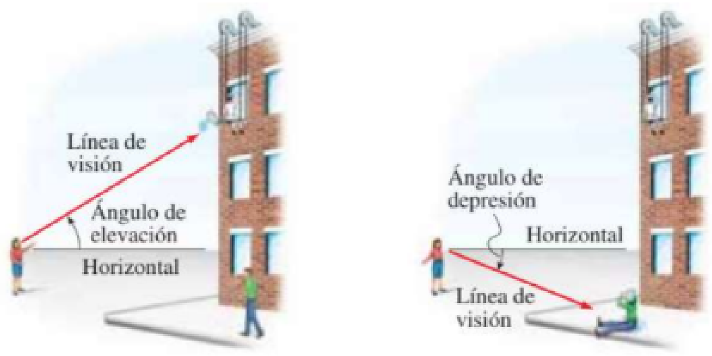
Solución: Como $\cos\alpha$ está definido como la relación entre el lado adyacente y la hipotenusa, trazamos un triángulo con hipotenusa de longitud 4 y un lado de longitud 3 adyacente a α. Si el lado opuesto es x, entonces por el Teorema de Pitágoras, $3^2 + x^2 = 4^2$ o sea $x^2 = 7$, de modo que $x = \sqrt{7}$. A continuación usamos el triángulo de la figura para hallar las relaciones:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}, \quad \cos\alpha = \frac{3}{4}, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{7}}{3},$$
$$\csc\alpha = \frac{4}{\sqrt{7}}, \quad \sec\alpha = \frac{4}{3}, \quad \cot\alpha = \frac{3}{\sqrt{7}}.$$

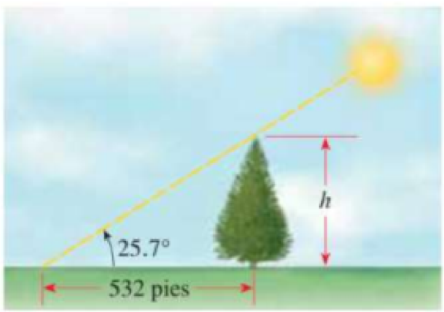


Resolución de problemas

La capacidad para resolver triángulos rectángulos con el uso de relaciones trigonométricas es fundamental para numerosos problemas en navegación, topografía, astronomía y las medidas de distancias. Las aplicaciones que consideramos siempre comprenden triángulos rectángulos, pero podrían generalizarse.
Para examinar los siguientes ejemplos, necesitamos alguna terminología. Si un observador está viendo un objeto, entonces la recta que va de sus ojos al objeto se llama línea de visión (Figura). Si el objeto que es observado está arriba de la horizontal, entonces el ángulo entre la línea de visión y la horizontal recibe el nombre de ángulo de elevación; si está debajo de la horizontal, entonces el ángulo entre la línea de visión y la horizontal se denomina ángulo de depresión.



Ejemplo 1:
Un árbol proyecta una sombra de 532 pies de largo. Encuentre la altura del árbol si elángulo de elevación del Sol es 25,7 grados sexagesimales.



Sea h la altura del árbol. De la Figura vemos que

$$\frac{h}{532} = \operatorname{tg} 25{,}7^\circ$$

Definición de tangente

$$h = 532 \operatorname{tg} 25{,}7^\circ$$

Multiplique por 532

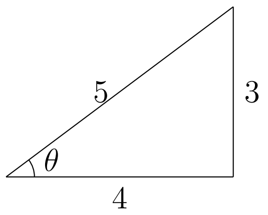
$$\approx 532(0{,}48127) \approx 256$$

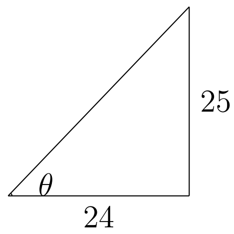
Use calculadora

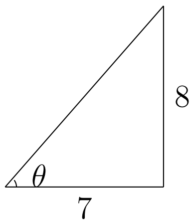
Por lo tanto la altura es aproximadamente 256 pies. El ejemplo está tomado del libro Precálculo de James Stewart, por lo tanto es común el uso de unidades del sistema imperial (pies, pulgadas, millas, etc). Esta situación se da con frecuencia en la bibliografía, sin embargo en los ejercicios y evaluaciones mantendremos las unidades del sistema métrico (metros, centímetros, kilómetros, etc)

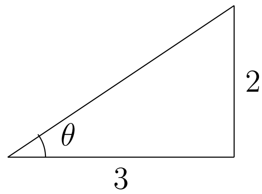
Trabajo Práctico

Ejercicio 4. Calcule las seis razones trigonométricas para cada ángulo θ:

a.


b.


c.


d.


Ejercicio 5.Resuelva cada situación, redondee cada respuesta a los centésimos.

a. Se encuentra que el ángulo de elevación de lo alto de un edificio es de 11° desde el suelo, a una distancia de 1,5 km de la base del edificio. Usando esta información, encuentre la altura del edificio.

b. Desde lo alto de un faro de 60 m, el ángulo de depresión a un barco en el océano es de 23°. ¿A qué distancia está el barco desde la base del faro?

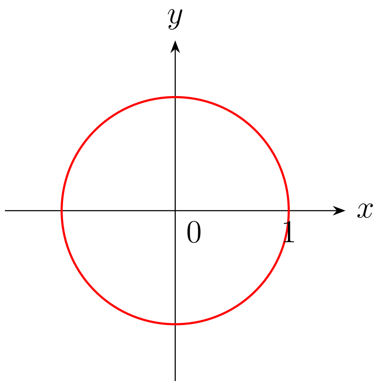
c. Una escalera de 6 m está inclinada contra un edificio, de modo que el ángulo entre el suelo y la escalera es de 72°. ¿A qué altura llega la escalera en el edificio?

d. Un cable de 180 m para sujeción está unido a lo alto de una torre de comunicaciones. Si el cable forma un ángulo de 65° con el suelo, ¿cuál es la altura de la torre de comunicaciones?

e. Para medir la altura de la capa de nubes en un aeropuerto, un trabajador enciende un reflector hacia arriba, a un ángulo de 75° de la horizontal. Un observador a 600 m de distancia mide el ángulo de elevación del reflector y ve que es de 45°. Encuentre la altura h de la capa de nubes.

3. La circunferencia unitaria

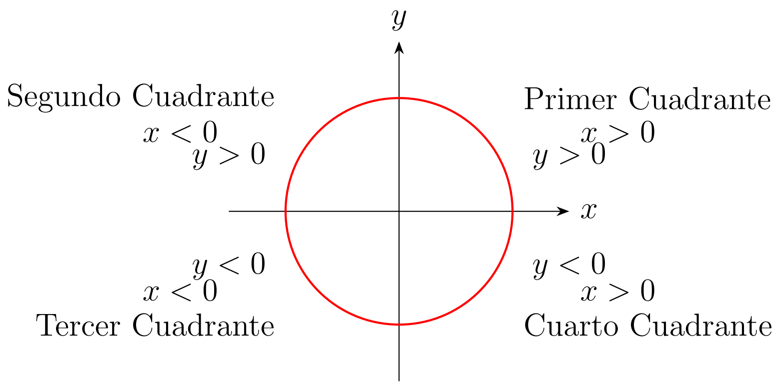
El conjunto de puntos del plano cartesiano que se encuentran a una distancia 1 (unidad de longitud) del origen, es una circunferencia cuyo radio mide 1 (unidad de longitud). Representada por $C_{(0,1)}$ cuya ecuación es $x^2 + y^2 = 1$.



$x^2 + y^2 = 1$

La **circunferencia unitaria** con centro en el origen de coordenadas O y radio $r = 1$, $C_{(0,1)}$, es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan del origen O una distancia de 1 unidad. Su ecuación es $(x-0)^2 + (y-0)^2 = 1$, más conocida como $x^2 + y^2 = 1$.

Los ejes cartesianos dividen al plano en cuatro cuadrantes, nombrados en el sentido antihorario, como indica la figura. Los puntos ubicados en cada cuadrante tienen coordenadas con signos positivos o negativos como está indicado.



$x^2 + y^2 = 1$

El signo de las coordenadas de un punto $P(x, y)$ según el cuadrante son:

Cuadrante	**X**	**Y**
Primer cuadrante	$+$	$+$
Segundo cuadrante	$-$	$+$
Tercer cuadrante	$-$	$-$
Cuarto cuadrante	$+$	$-$

¿Cómo sabemos si un punto P está en la Circunferencia Unitaria $C_{(0,1)}$?
Ejemplo 1: Determinar si un punto pertenece a la Circunferencia Unitaria
Demuestre que el punto $P\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ está en la Circunferencia Unitaria.
Solución:
Necesitamos demostrar que este punto cumple con la ecuación de la circunferencia, es decir, $x^2 + y^2 = 1$.

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{2}{4} + \frac{2}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Podemos afirmar que P está en la Circunferencia Unitaria.

Si un punto $P(x, y)$ del plano verifica $x^2 + y^2 < 1$ se dice que es un punto interior de $C_{(0,1)}$. Si un punto $P(x, y)$ del plano verifica $x^2 + y^2 > 1$ se dice que es un punto exterior de $C_{(0,1)}$.

Observación: Tanto la coordenada x como la coordenada y deben ser menores o iguales a 1 para que el punto P esté sobre la circunferencia unitaria. Si conocemos el cuadrante y una de las coordenadas de P, podemos fácilmente encontrar la coordenada faltante.

Ejemplo 2: Buscar las coordenadas de un punto en la Circunferencia Unitaria

El punto $P\left(\frac{1}{2}, y\right)$ está en la Circunferencia Unitaria en el cuadrante IV. Encuentre su coordenada y.

Solución:

Como está en la Circunferencia Unitaria, entonces

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = 1$$

$$y^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$|y| = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Como el punto está en el IV cuadrante, su coordenada y debe ser negativa, así que $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Trabajo Práctico

Ejercicio 6.Determine cuáles de los siguientes puntos están en el círculo unitario, cuáles pertenecen a la circunferencia unitaria y cuáles se hallan fuera del círculo unitario.

a. $\left(-\frac{5}{7}, -\frac{2\sqrt{6}}{7}\right)$

b. $\left(-\frac{5}{6}, \frac{3}{8}\right)$

c. $\left(-\frac{5}{13}, \frac{12}{13}\right)$

d. $\left(\frac{5}{7}, -\frac{6}{7}\right)$

e. $\left(\frac{5}{6}, \frac{\sqrt{11}}{6}\right)$

f. $\left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$

Ejercicio 7. Determine la coordenada faltante de P, si se sabe que P es un punto de la circunferencia unitaria ubicado en el cuadrante indicado.

Coordenadas	Cuadrante
$\left(x_1, \frac{1}{3}\right)$	II
$\left(\frac{2}{5}, y_2\right)$	I
$\left(-\frac{3}{7}, y_3\right)$	III
$\left(x_4, -\frac{5}{8}\right)$	IV
$\left(x_5, \frac{2}{9}\right)$	II

Puntos sobre la Circunferencia Unitaria

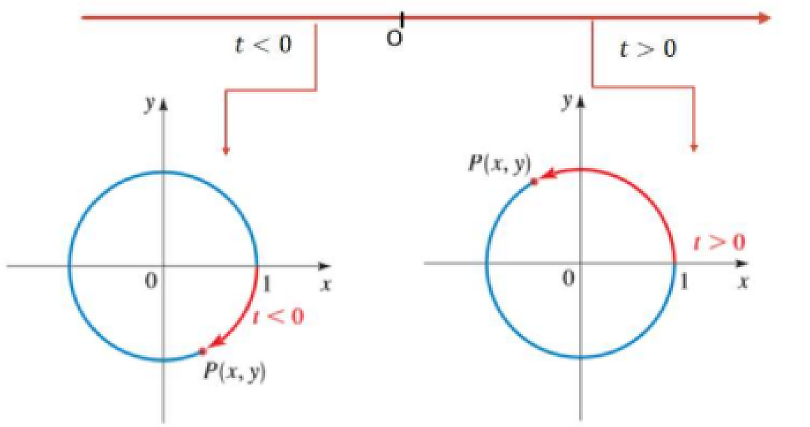
Suponga que t es un número real.

La pregunta es: ¿Cómo hacemos para localizar este número real en la circunferencia unitaria?

Respuesta: Empezando en el punto $(1, 0)$ y desplazándonos:

- En el sentido contrario a las agujas del reloj si t es positivo
- En el sentido de agujas del reloj si t es negativo

Tantas unidades de medida como indica t. De esta forma llegamos al punto $P(x, y)$ sobre la circunferencia determinado por el número real t. A este punto lo llamamos *punto terminal*.



Punto $P(x, y)$ sobre la circunferencia determinado por $t < 0$

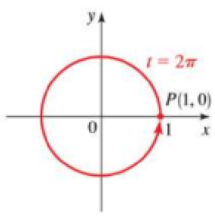
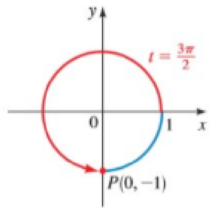
Punto $P(x, y)$ sobre la circunferencia determinado por $t > 0$

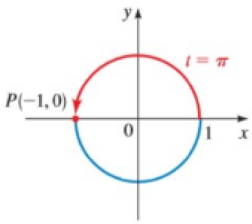
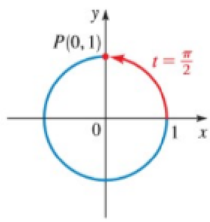
La longitud de la circunferencia unitaria es $C = 2\pi r = 2\pi(1) = 2\pi$. Entonces, tomando como punto de partida $(1, 0)$, si t se desplaza en el sentido contrario a las agujas del reloj a lo largo de la circunferencia, retornando al punto de partida, t habrá recorrido una distancia de 2π unidades (de longitud).

Si t se desplaza la mitad del camino alrededor de la circunferencia, habrá recorrido $\frac{1}{2}(2\pi) = \pi$ unidades.

Para desplazarse un cuarto de la distancia alrededor de la circunferencia, t recorre $\frac{1}{4}(2\pi) = \frac{\pi}{2}$ unidades.

La pregunta es: ¿Dónde se encuentra el punto terminal cuando t recorre ciertas distancias a lo largo de la circunferencia?

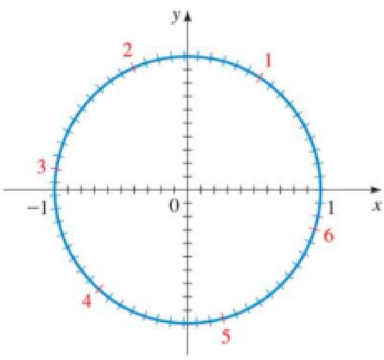
Si t recorre toda la circunferencia $C = 2\pi r = 2\pi(1) = 2\pi$ $P(x,y)$ se encuentra en la posición (1,0)		Si t recorre tres cuartas partes de la circunferencia $\frac{3}{4}(2\pi) = \frac{3}{2}\pi$ $P(x,y)$ se encuentra en la posición $(0,-1)$	

Si t recorre la mitad de la circunferencia $\frac{1}{2}(2\pi) = \pi$ $P(x,y)$ se encuentra en la posición $(-1{,}0)$		Si t recorre la cuarta parte de la circunferencia $\frac{1}{4}(2\pi) = \frac{\pi}{2}$ $P(x,y)$ se encuentra en la posición (0,1)	

Trabajo Práctico

Ejercicio 8. Mediante la figura encuentre el punto sobre la circunferencia determinado por el número real t, con coordenadas con una cifra decimal.

a) $t = 1$ b) $t = 2{,}5$ c) $t = -1{,}1$ d) $t = 4{,}2$

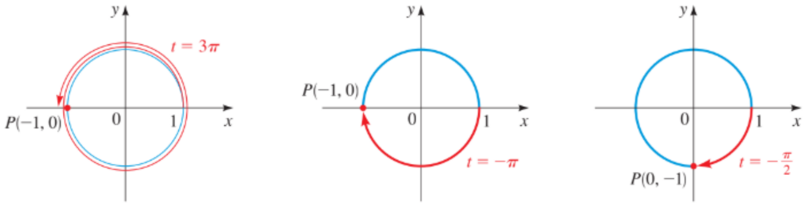


Observemos el siguiente ejemplo para algunos valores especiales de t.

Ejemplo: Calcule el punto $P(x,y)$ sobre la circunferencia unitaria determinado por cada número real t dado.

1. $t = 3\pi$
2. $t = -\pi$
3. $t = -\frac{\pi}{2}$

De acuerdo con la siguiente figura, observamos que:

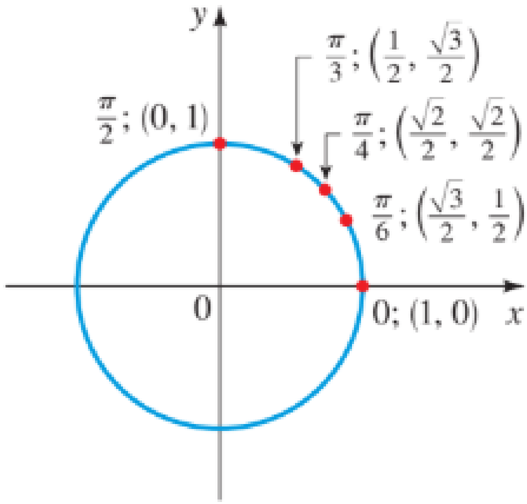


1. El punto determinado por $t = 3\pi$ es $(-1, 0)$.
2. El punto determinado por $t = -\pi$ es $(-1, 0)$.
3. El punto determinado por $t = -\frac{\pi}{2}$ es $(0, -1)$.

Observación: Observe que valores diferentes de t pueden determinar el mismo punto.

Puntos especiales sobre la Circunferencia

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
Punto Terminal	$(1, 0)$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$(0, 1)$



Pregunta: ¿Para qué nos sirven estos números $t \in \mathbb{R}$ y sus respectivos puntos terminales $P(x, y)$ localizados en la circunferencia, todos en el primer cuadrante?

Respuesta: Con ayuda de ellos, podremos obtener las coordenadas de puntos en los demás cuadrantes.

Ejemplo:

a. Sea P el punto terminal determinado por $-\pi/4$, y sea Q el punto terminal determinado por $\pi/4$. De la Figura 7(a) vemos que el punto P tiene las mismas coordenadas que Q excepto por el signo de la coordenada en y. Como P está en el cuarto cuadrante, su coordenada x es positiva y su coordenada y es negativa. Entonces, el punto terminal es $P\left(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2\right)$.

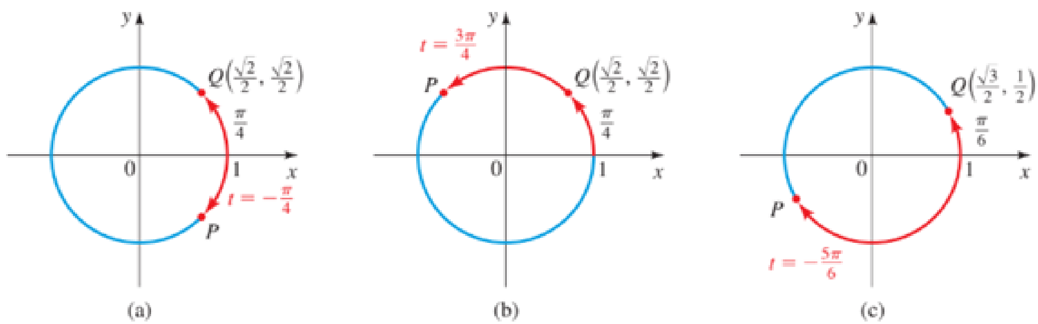
$$Q\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

b. Sea P el punto terminal determinado por $3\pi/4$, y sea Q el punto terminal determinado por $\pi/4$. De la Figura 7(b) vemos que el punto P tiene las mismas coordenadas que Q excepto por el signo de la coordenada en x. Como P está en el segundo cuadrante, su coordenada x es negativa y su coordenada y es positiva. Entonces, el punto terminal es $P\left(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2\right)$.

$$Q\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

c. Sea P el punto terminal determinado por $-5\pi/6$, y sea Q el punto terminal determinado por $\pi/6$. De la Figura 7(c) vemos que el punto P tiene las mismas coordenadas que Q excepto por el signo. Como P está en el tercer cuadrante, sus coordenadas son ambas negativas. Entonces, el punto terminal es $P\left(-\sqrt{3}/2, -\frac{1}{2}\right)$.

$$Q\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

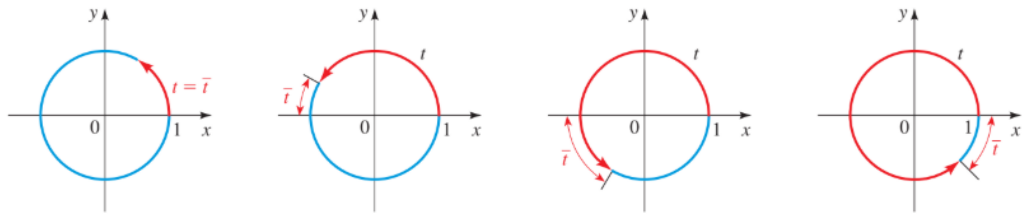


Número de referencia y su importancia

Los ejemplos anteriores muestran que, para conocer las coordenadas de un punto en cualquier cuadrante, basta conocer las coordenadas del punto correspondiente en el primer cuadrante. Introducimos el concepto de “número de referencia” para facilitarnos el cálculo de los puntos sobre la circunferencia.

> Sea t un número real. El número de referencia $\bar{t}$ asociado con t es la distancia más corta a lo largo de la circunferencia unitaria entre el punto terminal determinado por t y el eje x.

La figura muestra que para hallar el número de referencia $\bar{i}$, es útil saber el cuadrante en el que se encuentre el punto terminal determinado por t. Si el punto terminal se encuentra en el primero o cuarto cuadrante, donde x es positiva, encontramos $\bar{i}$ al movernos a lo largo de la circunferencia al eje $xpositivo$. Si se encuentra en los cuadrantes segundo o tercero, donde x es negativa, encontramos $\bar{i}$ al movernos a lo largo de la circunferencia al eje $xnegativo$.



Ejemplo: Hallar números de referencia.
Encuentre el número de referencia para cada valor de t.

a. $t = \frac{5\pi}{6}$ b. $t = \frac{7\pi}{4}$ c. $t = -\frac{2\pi}{3}$ d. $t = 5{,}80$

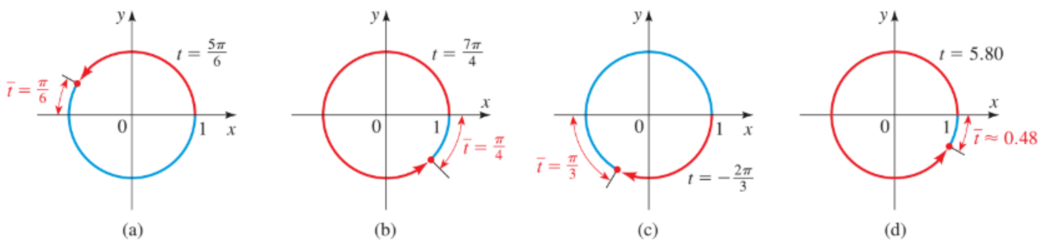
Solución: De la figura siguiente encontramos los números de referencia como sigue:

a. $\bar{t} = \pi - \frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$

b. $\bar{t} = 2\pi - \frac{7\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$

c. $\bar{t} = \pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$

d. $\bar{t} = 2\pi - 5{,}80 \approx 0{,}48$



Trabajo Práctico

Ejercicio 9.Suponga que el punto definido por t es el punto $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ de la circunferencia unitaria. Encuentre las coordenadas del punto sobre la circunferencia definido por cada uno de los siguientes valores:

a. $\pi - t$ b. $-t$ c. $\pi + t$ d. $t - \pi$

Ejercicio 10. Calcule el número de referencia para cada valor de t y el punto determinado por t.

a. $t = \frac{5}{4}\pi$ b. $t = \frac{7}{3}\pi$ c. $t = -\frac{4}{3}\pi$ d. $t = \frac{\pi}{6}$

4. Funciones trigonométricas de números reales

Una función real de variable real es una regla que asigna a cada número real un único número real. En la Unidad 4 nos referíamos a este hecho como unicidad y existencia.

Usaremos los puntos sobre la circunferencia unitaria para definir las funciones trigonométricas de números reales.

Sea entonces

$$f : \mathbb{R} \to C_{(0,1)}$$
$$t \mapsto f(t) = (x, y) \quad \text{tal que } x^2 + y^2 = 1$$

Con estas coordenadas de $P(x, y)$ definimos las funciones trigonométricas así:

Definición de las Funciones Trigonométricas

Sea t un número real y sea $P(x, y)$ el punto de la circunferencia unitaria determinado por t. Definimos:

$$\operatorname{sen}(t) = y \qquad \operatorname{cosec}(t) = \frac{1}{y} \quad (y \neq 0)$$
$$\cos(t) = x \qquad \sec(t) = \frac{1}{x} \quad (x \neq 0)$$
$$\operatorname{tg}(t) = \frac{y}{x} \quad (x \neq 0) \qquad \cot(t) = \frac{x}{y} \quad (y \neq 0)$$

Dado que estas funciones se pueden definir en términos de la circunferencia unitaria, se las llama también funciones circulares.

Podemos esquematizar una de las funciones, a manera de ejemplo, de la siguiente manera:

$$\operatorname{sen(t)} : C_{(0,1)} \to \mathbb{R} \qquad \cos(t) : C_{(0,1)} \to \mathbb{R} \qquad \operatorname{tg}(t) : C_{(0,1)} \to \mathbb{R}$$
$$(x, y) \to y \qquad (x, y) \to x \qquad (x, y) \to \tfrac{y}{x} \text{ para } x \neq 0$$

Ejemplo:
Podemos hacer la siguiente tabla, de forma nemotécnica:

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
Seno	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$
Coseno	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$

Al resolver y simplificar nos queda:

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
Seno	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
Coseno	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Esta tabla puede ser completada con las demás funciones trigonométricas:

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\operatorname{sen}(t)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(t)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg}(t)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—
$\csc(t)$	—	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	1
$\sec(t)$	1	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2	—
$\cot(t)$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Como podemos observar, existen algunos valores de t para los cuales algunas funciones no están definidas.

Nota: No se pedirá memorizar la información de esa tabla, aunque hay algunos valores que se usan con más frecuencia; para otros valores es necesario el uso de calculadora.

Dominios de las Funciones Trigonométricas

Como $\operatorname{sen}(t) = y$ y $\cos(t) = x$, ambas funciones están definidas para todos los números reales. Las funciones $\operatorname{tg}(t) = \frac{y}{x}$ $(x \neq 0)$ y $\sec(t) = \frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$ no están definidas cuando el punto $P(x, y)$ tiene coordenada $x = 0$. Esto ocurre, por ejemplo, para $t = \frac{\pi}{2}$ y $t = \frac{3\pi}{2}$.

Dado que P pasa por estos puntos cada $n\pi$ veces, podemos sintetizar el dominio de $\operatorname{tg}(t)$ y $\sec(t)$ como:

$$\left\{t \in \mathbb{R} : t \neq \frac{\pi}{2} + n\pi \text{ para todo } n \in \mathbb{Z}\right\}$$

Por otro lado, las funciones $\cot(t) = \frac{x}{y}$ $(y \neq 0)$ y $\csc(t) = \frac{1}{y}$ $(y \neq 0)$ no están definidas cuando $y = 0$. Esto ocurre cuando $t = 0, \pi, 2\pi, \ldots, n\pi$. Por lo tanto, estos valores deben ser excluidos del dominio, quedando:

$$\{t \in \mathbb{R} : t \neq n\pi \text{ para todo } n \in \mathbb{Z}\}$$

Resumimos todo lo anterior:

Función	**Dominio**
Seno, Coseno	Todos los números reales $\mathbb{R}$
Tangente, Secante	$\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\right\}$
Cotangente, Cosecante	$\mathbb{R} - \{n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\}$

Conocemos los valores de las funciones trigonométricas para los t que determinan puntos en el primer cuadrante. Para calcular los valores de las funciones en los demás cuadrantes, lo primero que necesitamos conocer son los signos que toman las mismas en los diferentes cuadrantes. Los signos de las funciones trigonométricas dependen del cuadrante en el cual se encuentre el punto determinado por t, conforme indica el siguiente cuadro:

Cuadrante	Función Positiva	Función Negativa
I	Todas	Ninguna
II	Seno, Cosecante	Coseno, Secante, Tangente, Cotangente
III	Tangente, Cotangente	Seno, Cosecante, Coseno, Secante
IV	Coseno, Secante	Seno, Cosecante, Tangente, Cotangente

Gráficos de las funciones trigonométricas

La gráfica de una función describe su comportamiento. Las funciones trigonométricas pueden ser graficadas y se les pueden aplicar las mismas transformaciones que se estudiaron en la unidad 4, a saber:

- Sumar (dentro y fuera del argumento)
- Reflejar

Algunas observaciones se imponen. La primera es que dichas funciones, al estar definidas en función de las coordenadas del punto $P(x, y)$ sobre la circunferencia unitaria, necesariamente repiten su valor según cierto patrón.

Periodicidad de las Funciones Trigonométricas

Recordemos que la longitud de la circunferencia unitaria es 2π. Podemos inferir entonces que el punto $P(x, y)$ determinado por t es el mismo que el determinado por $(t+2\pi)$. Este hecho lo podemos expresar en término de las funciones trigonométricas. Así:

$$\operatorname{sen}(t + 2n\pi) = \operatorname{sen}(t) \quad \text{para cualquier entero } n$$

$$\cos(t + 2n\pi) = \cos(t) \quad \text{para cualquier entero } n$$

A este tipo de funciones se las conoce como **funciones periódicas**.

Una función se dice **periódica** si existe un número positivo p tal que $f(t + p) = f(t)$ para todo t.

Tal número positivo mínimo p, si existe, es llamado **periodo** de la función f.

Si f tiene periodo p, entonces se dice que la gráfica de f en cualquier intervalo de longitud p es un **periodo completo** de f.

Propiedades periódicas del seno y el coseno

$$\boxed{\text{Las funciones seno y coseno tienen periodo } 2\pi :}$$

$$\operatorname{sen}(t+2\pi)=\operatorname{sen}(t) \qquad \cos(t+2\pi)=\cos(t)$$

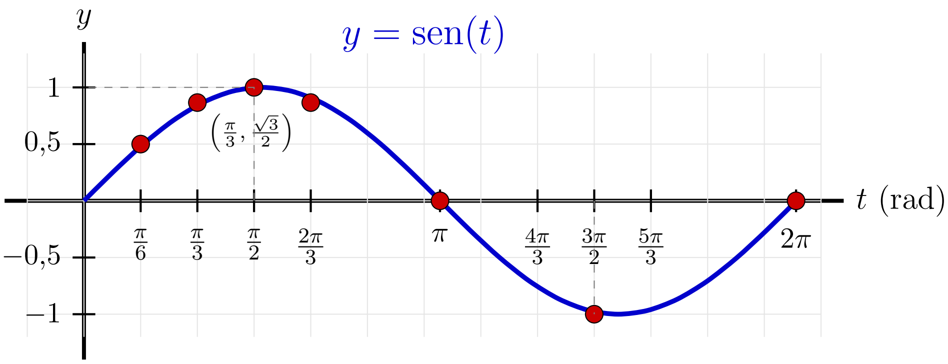
Por tanto, las funciones seno y coseno repiten sus valores en cualquier intervalo de longitud 2π.

Generalmente graficamos un periodo. En este caso, el comprendido entre $0 \leq t < 2\pi$. Veamos los ejemplos para seno y coseno. Las restantes funciones se abordarán en Cálculo I / Elementos de Cálculo I.

Gráfico de la funciones seno y coseno

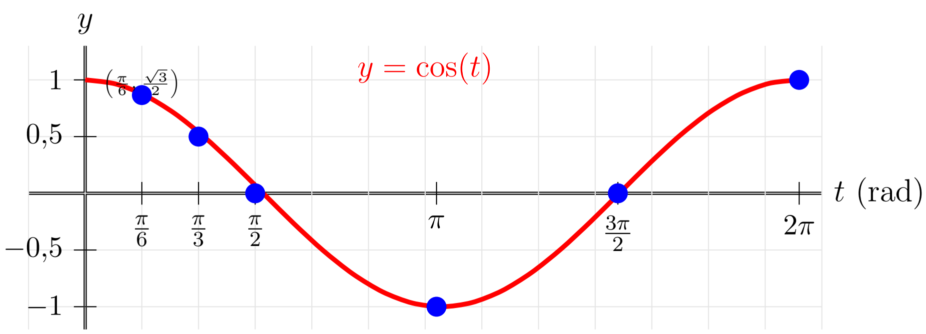
Usando esta tabla de valores construida con ayuda de la circunferencia trigonométrica localizamos los puntos en el plano cartesiano y los unimos.

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$\operatorname{sen}(\mathbf{t})$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0



Y tenemos el caso de la función coseno:

Ángulo (t)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$\cos(\mathbf{t})$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1



En el siguiente ejemplo vemos algunas transformaciones para la función coseno:

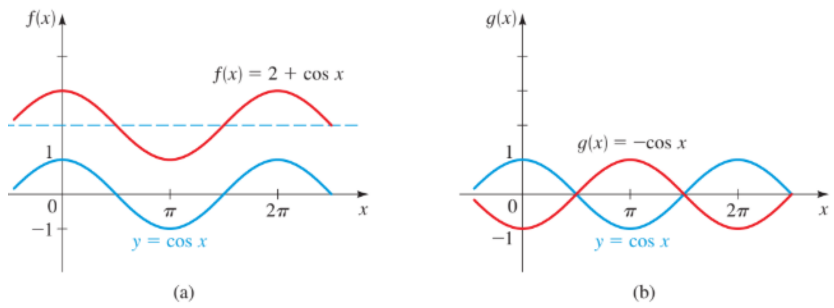
Ejemplo:

Trace la gráfica cada fución:

a. $f(x) = 2 + \cos x$ b. $g(x) = -\cos x$

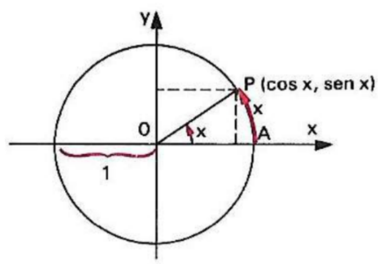
a. La gráfica de $y = 2 + \cos x$ es la misma que la gráfica de $y = \cos x$, pero desplazada 2 unidades hacia arriba (vea Figura 4(a)).

b. La gráfica de $y = -\cos x$ en la Figura 4(b) es la reflexión de la gráfica de $y = \cos x$ en el eje x.



5. Identidades trigonométricas

Ahora que conocemos las varias funciones trigonométricas, veremos algunas importantes relaciones que las vinculan.



La distancia de $P(\cos(x), \text{sen}(x))$ al origen del sistema $(0, 0)$ es 1. Entonces:

$$\sqrt{(\cos x - 0)^2 + (\text{sen}\, x - 0)^2} = 1 \Rightarrow \sqrt{\cos^2 x + \text{sen}^2 x} = 1$$

Elevando al cuadrado:

$$\cos^2 x + \text{sen}^2 x = 1 \quad \text{(Relación fundamental)}$$

Identidades Pitagóricas

A partir de esta relación podemos obtener las siguientes relaciones conocidas como ecuaciones pitagóricas.

Dividiendo ambos miembros de la relación fundamental por $\cos^2 x$ queda:

$$\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

Dividiendo ambos miembros de la relación fundamental por $\operatorname{sen}^2 x$ queda:

$$\frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} + \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}$$

$$\cot^2 x + 1 = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} = \csc^2 x$$

Resumen de Identidades

Para cualquier valor real de x, para el cual las funciones existen, son verdaderas las siguientes ecuaciones:

Identidades Pitagóricas		
$\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$	$1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x$	$\cot^2 x + 1 = \csc^2 x$

Ecuaciones de este tipo, que producen sentencias numéricas verdaderas para cualquier valor de x (siempre que x pertenezca al dominio de las funciones involucradas) son llamadas **identidades**.

Identidades Recíprocas

$\csc(x) = \dfrac{1}{\operatorname{sen}(x)}$	$\sec(x) = \dfrac{1}{\cos(x)}$	$\cot(x) = \dfrac{1}{\operatorname{tg}(x)}$

Identidades Pares-Impares

$\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen}(x)$	$\cos(-x) = \cos(x)$	$\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg}(x)$

Estas identidades permiten **simplificar** expresiones trigonométricas.
Para simplificar las **expresiones algebraicas**, usamos:

- Factorización
- Denominadores comunes
- Fórmulas de productos especiales

Para simplificar **expresiones trigonométricas** usamos:

- Estas mismas técnicas
- Las identidades trigonométricas fundamentales

Veamos algunos ejemplos y aplicaciones:
Ejemplo 1: Simplificación de una expresión trigonométrica
Simplifique la expresión $\cos(t) + \operatorname{tg}(t)\operatorname{sen}(t)$
Solución:
Primero volvemos a escribir la expresión en términos de seno y coseno.

$$\cos t + \operatorname{tg} t \operatorname{sen} t = \cos t + \left(\frac{\operatorname{sen} t}{\cos t}\right)\operatorname{sen} t$$

$$= \cos t + \frac{\operatorname{sen}^2 t}{\cos t} = \frac{\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t}{\cos t}$$

$$= \frac{1}{\cos t} \quad \text{(Identidad pitagórica)}$$

$$= \sec t \quad \text{(Identidad recíproca)}$$

Ejemplo 2: Simplificación mediante combinación de fracciones
Simplifique la expresión

$$\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{1+\operatorname{sen}\theta}$$

Solución:
Combinamos las fracciones usando un denominador común.

$$\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{1+\operatorname{sen}\theta} = \frac{\operatorname{sen}\theta(1+\operatorname{sen}\theta) + \cos^2\theta}{\cos\theta(1+\operatorname{sen}\theta)}$$

$$= \frac{\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta}{\cos\theta(1+\operatorname{sen}\theta)} = \frac{\operatorname{sen}\theta + 1}{\cos\theta(1+\operatorname{sen}\theta)}$$

$$= \frac{1}{\cos\theta} = \sec\theta$$

Demostración de las identidades trigonométricas

Ahora estamos en condiciones de trabajar con ecuaciones que contengan expresiones trigonométricas y verificar si dichas ecuaciones son identidades o no lo son.

Resulta útil tener un criterio o procedimiento sugerido para tal fin.

Primero, es fácil decidir cuándo una ecuación no es una identidad. Todo lo que necesitamos hacer es demostrar que la ecuación no se cumple para algunos valores de la variable. Por consiguiente, la ecuación:

$$\operatorname{sen}(x) + \cos(x) = 1$$

no es una identidad, porque cuando $x = \frac{\pi}{4}$, tenemos:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \neq 1$$

Criterios para demostrar identidades trigonométricas

Para comprobar que una ecuación trigonométrica es una identidad, transformamos un miembro de la ecuación en el otro mediante una serie de pasos, cada uno de los cuales es en sí mismo una identidad.

1. **Empezar con un miembro:** Elija un miembro de la ecuación (generalmente el más complicado) y transformelo en el otro miembro.

2. **Aplicar identidades conocidas:** Use álgebra e identidades trigonométricas para simplificar la expresión. Obtenga común denominador, factorice y aplique identidades fundamentales.

3. **Convertir en senos y cosenos:** Si encuentra dificultades, reescriba todas las funciones en términos de senos y cosenos.

Veremos algunos ejemplos importantes, pero que no agotan los recursos del procedimiento.

Ejemplo 3: Demostración de una identidad

Compruebe la identidad $\cos\theta(\sec\theta - \cos\theta) = \operatorname{sen}^2\theta$

Solución

El primer miembro se ve más complicado, así que iniciamos con él y tratamos de transformarlo en el segundo miembro.

$$\begin{aligned} PM &= \cos\theta(\sec\theta - \cos\theta) \\ &= \cos\theta\left(\frac{1}{\cos\theta} - \cos\theta\right) \quad \text{(Identidad recíproca)} \\ &= 1 - \cos^2\theta \quad \text{(Desarrollo)} \\ &= \operatorname{sen}^2\theta = SM \quad \text{(Identidad pitagórica)} \end{aligned}$$

Ejemplo 4: Demostración mediante combinación de fracciones

Verifique la identidad $2\operatorname{tg}(x)\sec(x) = \frac{1}{1-\operatorname{sen}(x)} - \frac{1}{1+\operatorname{sen}(x)}$

Solución:

Mediante un común denominador y la combinación de las fracciones en el segundo miembro:

$$\begin{aligned} SM &= \frac{1}{1-\operatorname{sen}x} - \frac{1}{1+\operatorname{sen}x} \\ &= \frac{(1+\operatorname{sen}x)-(1-\operatorname{sen}x)}{(1-\operatorname{sen}x)(1+\operatorname{sen}x)} \quad \text{(Común denominador)} \\ &= \frac{2\operatorname{sen}x}{1-\operatorname{sen}^2 x} \quad \text{(Simplificación)} \\ &= \frac{2\operatorname{sen}x}{\cos^2 x} \quad \text{(Identidad pitagórica)} \\ &= 2\cdot\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}\cdot\frac{1}{\cos x} \quad \text{(Factorización)} \\ &= 2\operatorname{tg}x\sec x = PM \quad \text{(Identidades recíprocas)} \end{aligned}$$

Fórmulas de Adición y Sustracción

Veremos otras identidades útiles (sin demostración) que se usan con mucha frecuencia:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(\alpha+\beta) &= \operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta)+\cos(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)\\
\operatorname{sen}(\alpha-\beta) &= \operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta)-\cos(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)\\
\cos(\alpha+\beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta)-\operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)\\
\cos(\alpha-\beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta)+\operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)
\end{aligned}$$

Nuevamente recordamos no memorizarlas directamente, estas son de uso frecuente al resolver integrales en Cálculo I o más avanzadas.

Trabajo Práctico
Ejercicio 11. Verifique las siguientes identidades:

a. $(\operatorname{sen} x+\cos x)^2 = 1+2\operatorname{sen} x\cos x$

b. $\dfrac{\sec x\cdot\cot x}{\csc x} = 1$

c. $\dfrac{\csc x-\cot x}{\sec x-1} = \cot x$

d. $\csc x[\csc x-\operatorname{sen} x] = \cot^2 x$

e. $\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{sen}^2 x = \operatorname{tg}^2 x\operatorname{sen}^2 x$

f. $\dfrac{2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \operatorname{sen} 2x$

g. $\dfrac{2(\operatorname{tg} x-\cot x)}{\operatorname{tg}^2 x-\cot^2 x} = \operatorname{sen} 2x$

h. $\cot 2x = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2 x}{2\operatorname{tg} x}$

6. Ecuaciones Trigonométricas

Una ecuación que contiene funciones trigonométricas se denomina **ecuación trigonométrica**.

Ejemplos:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}^2(x)+\cos^2(x) &= 1\\
2\operatorname{sen}(x)-1 &= 0\\
\operatorname{tg}^2(x)-3 &= 0
\end{aligned}$$

La primera ecuación, como ya vimos, es una identidad, es decir, es válida para todo valor de la variable x.

Las otras dos ecuaciones se cumplen sólo para ciertos valores de x.

Resolución de Ecuaciones Trigonométricas

Para resolver una ecuación trigonométrica, calculamos todos los valores de la variable que hacen que la ecuación sea verdadera. Siempre usaremos radianes para la variable excepto en algunos problemas de aplicación.

Tipos de Ecuaciones Trigonométricas

1. Ecuaciones básicas:

$$2\,\mathrm{sen}(x) - 1 = 0$$
$$\mathrm{tg}^2(x) - 3 = 0$$

2. Ecuaciones cuadráticas:

$$2\cos^2(x) - 7\cos(x) + 3 = 0$$

3. Funciones de ángulos múltiples:

$$\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right) - 1 = 0$$

Aplicamos las reglas del álgebra para aislar la función trigonométrica en un lado de la ecuación, luego usamos los valores conocidos de las funciones trigonométricas para determinar la variable.

Ejemplo 1:
Resuelva la ecuación $2\,\mathrm{sen}(x) - 1 = 0$
Solución:

$$\begin{aligned} 2\,\mathrm{sen}(x) - 1 &= 0 \quad \text{(Ecuación dada)} \\ 2\,\mathrm{sen}(x) &= 1 \quad \text{(Sumando 1 a ambos lados)} \\ \mathrm{sen}(x) &= \frac{1}{2} \quad \text{(Dividiendo por 2)} \end{aligned}$$

Como el seno tiene período 2π, primero calculamos las soluciones en $[0, 2\pi)$:

$$x = \frac{\pi}{6} \quad \text{y} \quad x = \frac{5\pi}{6}$$

Las soluciones generales son:

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{y} \quad x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

donde k es cualquier entero.

Ejemplo 2: Una ecuación de tipo cuadrático
Resuelva la ecuación $2\cos^2(x) - 7\cos(x) + 3 = 0{,}2$.
Solución:
Factorizamos el primer miembro de la ecuación:

$$2\cos^2 x - 7\cos x + 3 = 0$$

$$(2\cos x - 1)(\cos x - 3) = 0$$

Puesto que el coseno tiene período 2π, primero calculamos las soluciones en el intervalo $[0, 2\pi)$. En el caso de la primera ecuación, son $x = \frac{\pi}{3}$ o $x = \frac{5\pi}{3}$. La segunda ecuación no tiene soluciones porque $\cos(x)$ nunca es mayor que 1. Por consiguiente, las soluciones son

$$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$$

donde k es cualquier entero.

Ejemplo 3: Uso de una identidad trigonométrica

Resuelva la ecuación $1 + \operatorname{sen}(x) = 2\cos^2(x)$.

Solución:

Usamos una identidad trigonométrica para volver a escribir la ecuación en términos de una sola función trigonométrica.

$$1 + \operatorname{sen} x = 2\cos^2 x$$

$$1 + \operatorname{sen} x = 2(1 - \operatorname{sen}^2 x)$$

$$2\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - 1 = 0$$

$$(2\operatorname{sen} x - 1)(\operatorname{sen} x + 1) = 0$$

$$2\operatorname{sen} x - 1 = 0 \quad \text{o} \quad \operatorname{sen} x + 1 = 0$$

$$\operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \quad \text{o} \quad \operatorname{sen} x = -1$$

$$x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \quad \text{o} \quad x = \frac{3\pi}{2}$$

Como el período del seno es 2π, obtenemos todas las soluciones de la ecuación sumando cualquier entero múltiplo de 2π a estas soluciones. Por lo tanto, las soluciones son

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \quad x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$$

donde k es un entero cualquiera.

Trabajo Práctico

Ejercicio 12. Encuentre todos los valores de x para los cuales se verifica:

$$\operatorname{sen} x + 2 = -\operatorname{sen}^2 x + \frac{5}{2}\operatorname{sen} x + \frac{3}{2}$$

Ejercicio 13.Resuelve cada ecuación trigonométrica en el intervalo $[0, 2\pi)$ y verifique las soluciones.

a. $2\cos^2 x + 5\cos x + 2 = 0$

b. $\operatorname{sen}^2 x - \cos x = 0$

c. $(\operatorname{tg} x + \sqrt{3})(\cos x + 2) = 0$

d. $\cos x \cdot \operatorname{sen} x - 2\cos x = 0$

e. $\operatorname{sen}^2 x = 4 - \cos^2 x$

f. $\cot x \cdot \sec x = \sqrt{2}$

Trabajo Práctico - Ejercicios adicionales

Ejercicio 1. El minutero de un reloj tiene 15.2 cm de largo.

a. ¿Qué distancia recorre la punta del minutero en 15 minutos?

b. ¿Qué distancia recorre en 25 minutos?

Ejercicio 2. Una torre de alta tensión está sujeta al piso, con un cable que tiene un extremo fijo al suelo, como se ve en el dibujo. Se sabe que la longitud del cable es de 13 m y que el ángulo que forma éste con la horizontal es de 50°. ¿Cuál es la altura de la torre? ¿A qué distancia del pie de la misma está sujeto el cable?

Ejercicio 3. Un helicóptero viaja de una ciudad hacia otra, distantes entre sí 40 km. En un determinado momento, los ángulos que forman las visuales, desde el helicóptero, hacia las ciudades con la horizontal son de 14° y 26°, respectivamente. ¿A qué altura está el helicóptero? ¿Qué distancia hay en este momento entre el helicóptero y cada una de las ciudades?

Ejercicio 4. Desde un punto sobre el suelo a 150 metros de la base de un edificio, se observa que el ángulo de elevación hasta la parte superior del edificio es de 60° y que el ángulo de elevación hasta la parte superior del asta de la bandera del edificio es de 65°. Determinar:

a. La altura del edificio.

b. La longitud del asta de la bandera.

Ejercicio 5. Un cuadro localizado sobre una pared, es tal que su borde inferior está a una distancia de 20 cm sobre el nivel del ojo de un observador situado a 2 metros de la pared. Si el ángulo que forman las visuales con los bordes inferior y superior, respectivamente, mide 15°. ¿Cuál es la altura del cuadro?

Ejercicio 6. Un árbol está sostenido por un alambre que se extiende desde 1,5 metros debajo del punto más alto del árbol hasta una estaca en el suelo. El alambre mide 24 metros de largo y forma un ángulo de 30° con el suelo. ¿Qué altura tiene el árbol?

Bibliografía

- Altman, S.; y Otros (2001): Matemática, Buenos Aires, Longseller.
- Larson, R y Otros. (2012). Precálculo (8va. ed.) México D. F., Cengage Learning Editores S.A. de C.V.
- Stewart, J y Otros. (2001). Precálculo (6ta ed.) México D. F., International Thomson Editores, S.A.