Unidad 3

Ecuaciones: rectas y parábolas

En este apunte los estudiantes encontrarán contenidos básicos de:

- Función afín.
- Función cuadrática.
- Ecuaciones de primer grado
- Ecuaciones de segundo grado.
- Ecuaciones con valor absoluto
- Inecuaciones.
- Sistemas de ecuaciones.

Índice

1. Función Lineal - Afín **2**
Rectas paralelas y perpendiculares 2
Rectas paralelas 2
Rectas perpendiculares 3
Ecuaciones de la recta 4
Conocidos dos puntos 4
Conocidos un punto y la pendiente 4

2. Función Cuadrática **6**
Forma canónica 6
Máximos y mínimos 7
Forma factorizada 7
Fórmula para encontrar las raíces 8
El discriminante 8

3. Ecuaciones **10**
Ecuaciones de primer grado 10
Resolución de ecuaciones 11
Ecuaciones de segundo grado 13
1. Fórmula resolvente (general) 14
2. Propiedad de las soluciones 14
3. Método de completar cuadrados 15
Ecuaciones con valor absoluto 15

4. Inecuaciones **17**
Desigualdades de primer grado o lineales 17
Propiedades de las desigualdades 17
Desigualdades no lineales 19
Ejemplo 1 19
Ejemplo 2 21
Ejemplo 3 21
Desigualdades con valor absoluto 23
Propiedades de desigualdades con valor absoluto 23

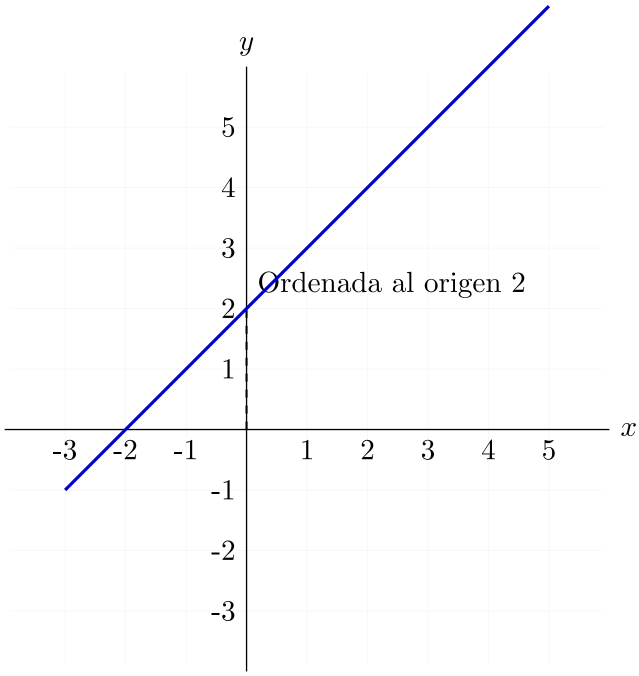
5. Sistemas de ecuaciones lineales **25**
Método de sustitución 26
Método de igualación 27
Método de eliminación 28
Interpretación gráfica 29
Modelado de problemas 29

1. Función Lineal - Afín

Una función f definida por la expresión $f(x) = mx + n$ se denomina **función afín** (o función polinómica de primer grado). Su gráfica corresponde a la recta representada por la ecuación $y = mx + n$, donde m es la pendiente y n la ordenada al origen.

Ejemplo:

$$f(x) = \frac{1}{2}x + 2$$



Función Afín

Una función afín tiene la forma general:

$$f(x) = mx + n$$

donde m es la pendiente y n la ordenada al origen. Su gráfica es una recta que **no necesariamente pasa por el origen**, ya que n puede ser cualquier número real.

Función Lineal

Un caso particular es la función lineal, que tiene la forma:

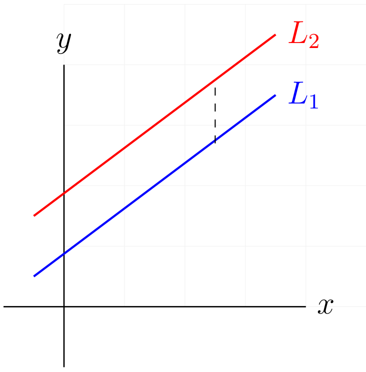
$$f(x) = mx$$

En este caso, al ser $n = 0$, su gráfica es una recta que **siempre pasa por el origen** de coordenadas.

Rectas paralelas y perpendiculares

Rectas paralelas

Dadas dos rectas $L_1(x) = m_1x+n_1$ y $L_2(x) = m_2x+n_2$, se dice que son **paralelas** cuando sus pendientes son iguales, es decir, $m_1 = m_2$.

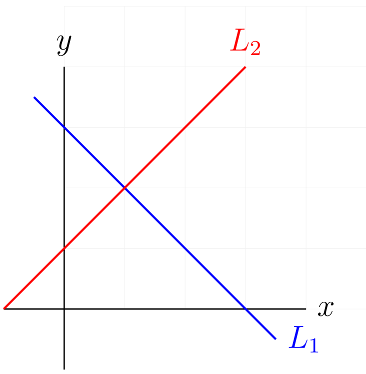


$$L_1 \parallel L_2 \Leftrightarrow m_1 = m_2$$

Rectas perpendiculares

Dadas dos rectas $L_1(x) = m_1x + n_1$ y $L_2(x) = m_2x + n_2$, se dice que son **perpendiculares** cuando sus pendientes son opuestas e inversas, es decir:

$$m_1 \cdot m_2 = -1 \quad \text{o equivalentemente} \quad m_2 = -\frac{1}{m_1}$$



$$L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow m_1 \cdot m_2 = -1$$

Trabajo Práctico

Ejercicio 1. Dada la recta $y = \frac{3}{4}x - 2$, ¿cuáles ecuaciones representan rectas paralelas a ella?

a. $y = \frac{3}{4}x + 5$

b. $y = -\frac{4}{3}x - 1$

c. $3x - 4y + 8 = 0$

d. $6x - 8y = 10$

e. $y = \frac{4}{3}x + 2$

f. $x = 4$

Ejercicio 2. Para la recta $2x + 5y = 7$, selecciona ecuaciones de rectas perpendiculares perpendiculares:

a. $y = \frac{5}{2}x - 3$

b. $5x - 2y = 10$

c. $y = -\frac{2}{5}x + 1$

d. $10x + 4y = 9$

e. $x = \frac{5}{2}$

f. $y = \frac{2}{5}x - 4$

Ecuaciones de la recta

Dos puntos en el plano $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ determinan una única recta. Si queremos encontrar la ecuación de la recta que pasa por esos puntos, podemos utilizar las siguientes ecuaciones:

Conocidos dos puntos

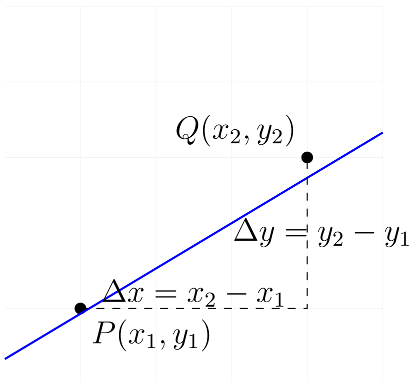
$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1)$$

- Esta forma se conoce como **ecuación punto-punto**
- El término $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ representa la pendiente (m) de la recta

Conocidos un punto y la pendiente

$$y - y_1 = m \cdot (x - x_1)$$

- Esta forma se conoce como **ecuación punto-pendiente**
- Requiere conocer un punto por el que pasa la recta (x_1, y_1) y su pendiente m



Trabajo Práctico

Ejercicio 3. Dadas las siguientes rectas:

1. $y_1 = -\frac{5}{2}x - 2$
2. $y_2 = 2x + 3$
3. $y_3 = \frac{5}{3}x$
4. $y_4 = -x + 4$
5. $y_5 = -3x + \frac{3}{2}$
6. $y_6 = x - \frac{1}{2}$

a. Represente gráficamente cada una de ellas.

b. Encuentre de forma analítica el cero y la ordenada al origen de cada función.

c. Halle la ecuación de una recta paralela y otra perpendicular en cada caso. Represente gráficamente.

d. Encuentre para cada recta:

- La paralela que pasa por el punto P$(-1, 5)$
- La perpendicular que pasa por el punto Q$(3, -2)$

Ejercicio 4.Dadas las rectas representadas gráficamente:

Gráfico a)

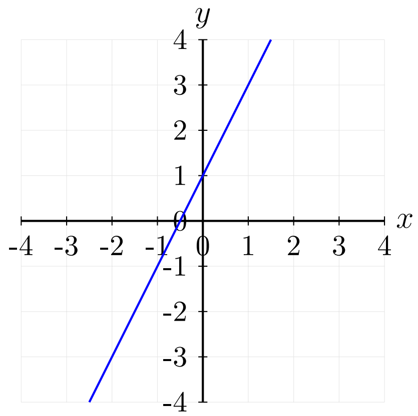
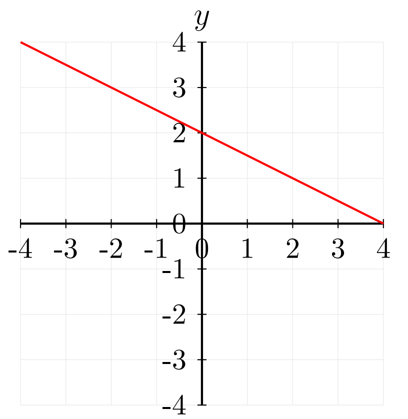
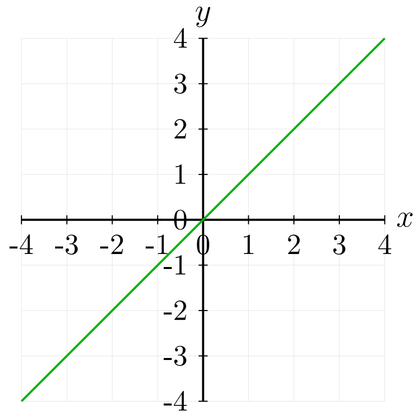


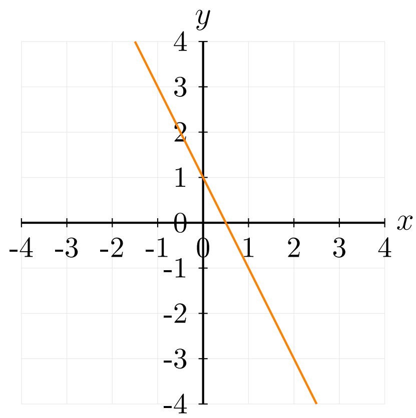
Gráfico b)



a. **Gráfico c)**



b. **Gráfico d)**



a. Halle la expresión algebraica explícita $(y = mx + b)$ de cada una de ellas.

b. Encuentre de forma analítica el cero (raíz) y la ordenada al origen de cada función. Verifique gráficamente.

c. Halle, para cada recta:

- La ecuación de la recta paralela que pase por $P(2, 2)$
- La ecuación de la recta perpendicular que pase por $Q(-3, -1)$

d. Represente gráficamente las rectas del inciso anterior.

Ejercicio 5. Dados los puntos:

$$A(0,3) \quad \text{y} \quad B(-4,0)$$

a. Representarlos en el gráfico, identificando cada uno de ellos.

b. Trazar la recta que une A y B.

c. A partir del gráfico, completar la siguiente tabla:

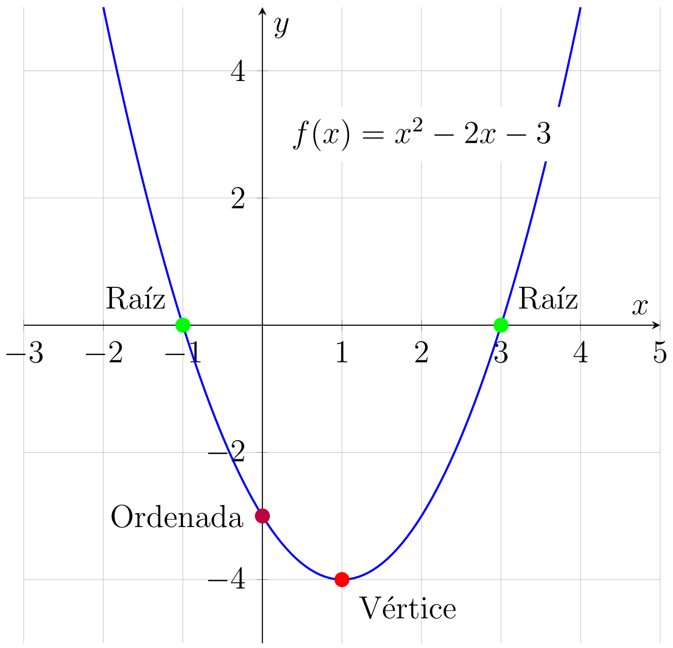
Ecuación	**Pend.**	**Ord.**	**Cero**	**Perpendicular**

d. Representar gráficamente la recta perpendicular que fue elegida en el inciso anterior.

2. Función Cuadrática

Una expresión de la forma $f(x) = ax^2+bx+c$, donde a, b y c son números reales, con a distinto de cero ($a \neq 0$) representa la fórmula de una **función cuadrática**, o función polinómica de segundo grado.

La gráfica de una función cuadrática es una **parábola**.



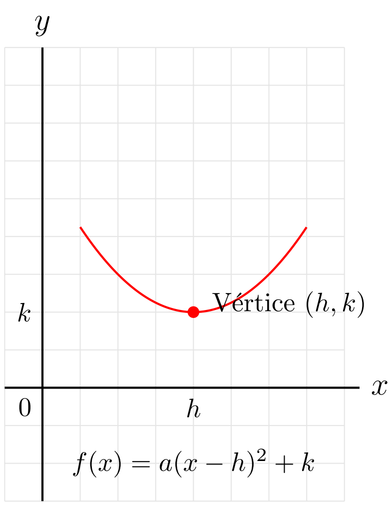
Forma canónica

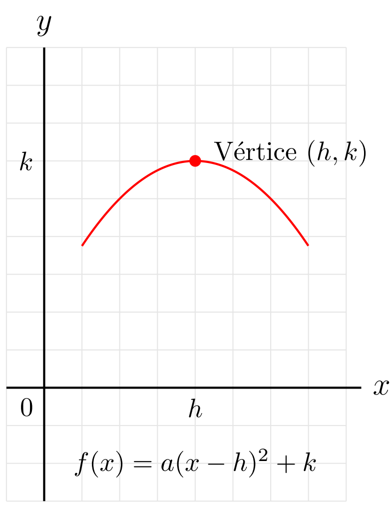
Una función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ se puede expresar en la forma estándar o canónica:

$$f(x) = a(x-h)^2 + k$$

donde el vértice está en $V(h,k)$. La parábola se abre:

- Hacia arriba si $a > 0$
- Hacia abajo si $a < 0$





Máximos y mínimos

Sea f una función cuadrática en su forma estándar $f(x) = a(x-h)^2 + k$. El valor máximo o mínimo de f ocurre en $x = h$.

- Si $a > 0$, la parábola abre hacia arriba y $f(h) = k$ es el **valor mínimo** de la función.
- Si $a < 0$, la parábola abre hacia abajo y $f(h) = k$ es el **valor máximo** de la función.

Para una función cuadrática en su forma general $f(x) = ax^2 + bx + c$, el vértice (punto crítico) se encuentra en:

$$x = -\frac{b}{2a}$$

- Si $a > 0$, la función tiene un **mínimo** en $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$.
- Si $a < 0$, la función tiene un **máximo** en $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$.

Nota: Una forma equivalente de calcular la ordenada del vértice es mediante la expresión $k = c - \frac{b^2}{4a}$, pero como con otras expresiones no alentamos aprenderlas de memoria, si no recordar que es la imagen que corresponde a x_v y calcular.

Forma factorizada

Se llama expresión **factorizada** de la función cuadrática a aquella que se forma en función de los ceros:

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Fórmula para encontrar las raíces

Para encontrar las raíces de una función cuadrática podemos utilizar la fórmula estudiada en la Unidad anterior, llamada *fórmula resolvente* o *fórmula de Baskara*:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

El discriminante

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

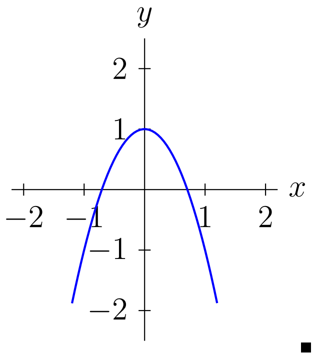
Esta expresión se llama **discriminante** y nos brinda información sobre las raíces:

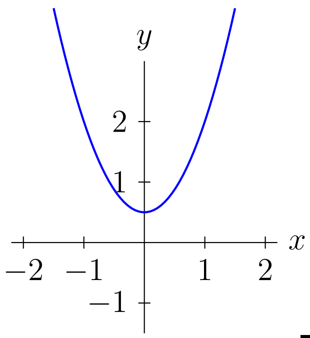
- Si $\Delta > 0$: Dos raíces reales diferentes
- Si $\Delta = 0$: Una raíz real doble
- Si $\Delta < 0$: No tiene raíces reales

Trabajo Práctico

Ejercicio 6. Observe cada una de las parábolas y complete el signo de los coeficientes a, c y del discriminante Δ.

Gráfico A

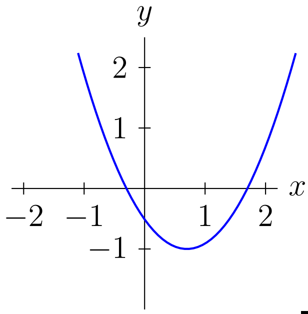




- a: ______
- c: ______
- Δ: ______

Gráfico C

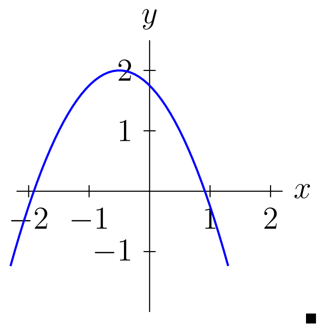
- a: ______
- c: ______
- Δ: ______



- a: ______
- c: ______
- Δ: ______

Gráfico B

Gráfico D



- a: ______
- c: ______
- Δ: ______

Ejercicio 7.Dadas las siguientes expresiones:

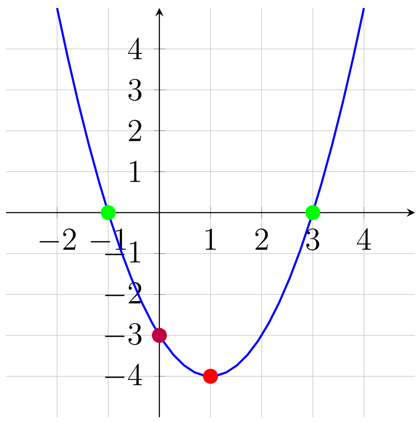
- $y_1 = -x^2 - 3x + 4$
- $y_3 = -x^2 + 5x$
- $y_5 = x^2 - 3x + 4$
- $y_2 = -2x^2 - 3x + 2$
- $y_4 = -x^2 + 16$
- $y_1 = -x^2 + 2x + 5$

a. Calcule el vértice, eje de simetría, ordenada al origen y ceros, si existen en los números reales.

b. Represente gráficamente.

c. Halle la forma canónica y la factorizada, cuando sea posible en los reales.

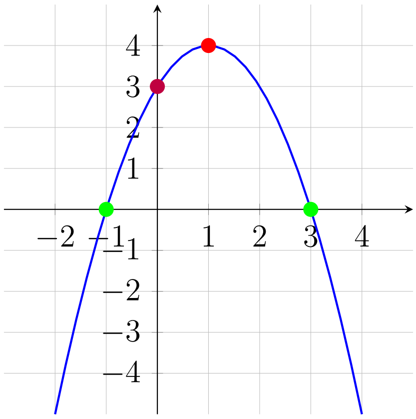
Ejercicio 8.Dado el gráfico, completa las siguientes representaciones de la parábola representada



a) Forma factorizada: $f(x) =$ ______________________________

b) Forma canónica: $f(x) =$ ______________________________

c) Forma polinómica: $f(x) =$ ______________________________



a) Forma factorizada: $f(x) =$ ____________________

b) Forma canónica: $f(x) =$ ____________________

c) Forma polinómica: $f(x) =$ ____________________

---

3. Ecuaciones

Ecuaciones de primer grado

Una ecuación es un enunciado en el que se establece que dos expresiones matemáticas son iguales. La mayor parte de las ecuaciones que se estudian en el Álgebra contienen *incógnitas*, es decir, letras que representan números.

Llamamos **solución** de una ecuación, al número real que hace verdadera la igualdad. Y denotaremos por **Conjunto Solución**, a todos los valores que hacen cierta la igualdad.

Ejemplo 1: Resolver la ecuación $2x + 3 = 7$

Resolución:

$$\begin{aligned} 2x + 3 &= 7 \\ 2x &= 4 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Verificación:

$$\begin{aligned} 2(2) + 3 &= 7 \\ 4 + 3 &= 7 \\ 7 &= 7 \quad \checkmark \end{aligned}$$

Conjunto solución: $\mathbb{S} = \{2\}$

Ejemplo 2: Resolver $x^2 - 4 = 0$

Resolución:

$$\begin{aligned} x^2 - 4 &= 0 \\ x^2 &= 4 \\ x &= \pm 2 \end{aligned}$$

Verificación:

$$\begin{aligned} (2)^2 - 4 &= 0 \\ 4 - 4 &= 0 \quad \checkmark \\ (-2)^2 - 4 &= 0 \\ 4 - 4 &= 0 \quad \checkmark \end{aligned}$$

Conjunto solución: $\mathbb{S} = \{-2, 2\}$

Trabajo Práctico
Ejercicio 9.Determine en cada uno de los casos si los valores propuestos son solución de la ecuación:

(a) $(5x-3)\cdot 4=(2-2x)\cdot 6$ $\qquad x_1=0\ ;\ x_2=\dfrac{3}{4}$

(b) $3-[4-(2-m)]=3m-(-4+m)$ $\qquad m_1=-1\ ;\ m_2=\dfrac{1}{2}$

(c) $\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x-3}=\dfrac{2}{3}$ $\qquad x_1=\dfrac{3}{2}\ ;\ x_2=3$

(d) $\sqrt{4-x}=-1$ $\qquad x_1=5\ ;\ x_2=3$

Consideramos a la letra como la "incógnita" de la ecuación, por lo que el objetivo, ahora, es determinar el valor de la incógnita que hace que la igualdad en la ecuación sea cierta, y el proceso para determinar las soluciones se llama **resolución de una ecuación**. También es importante verificar las soluciones obtenidas, sobre todo como veremos más adelante en el caso de las ecuaciones logarítmicas o trigonométricas.

Resolución de ecuaciones

Dos ecuaciones con exactamente las mismas soluciones se llaman **ecuaciones equivalentes**. Para resolver una ecuación, tratamos de encontrar una ecuación más simple y equivalente en la que la variable esté sola en un lado del signo de "igual". Las propiedades que aplicamos para resolver una ecuación son:

Aquí A, B y C representan expresiones algebraicas y el símbolo $\Leftrightarrow$ significa "equivale a".

Propiedad	**Ejemplo**	**Descripción**
$A=B \iff A+C=B+C$	$x-3+3=5+3 \Rightarrow x=8$	Sumar la misma cantidad a ambos miembros mantiene la equivalencia.
$A=B \iff C\cdot A=C\cdot B$	$\frac{y}{2}\cdot 2=4\cdot 2 \Rightarrow y=8$	Multiplicar ambos miembros por el mismo número (distinto de cero) mantiene la equivalencia.

Resolvemos la ecuación cambiándola a una equivalente en la que todos los términos que tienen la variable están en un lado y todos los términos constantes están en el otro.

Ejemplo:

$$\frac{4}{3}p+p-3=\frac{p+1}{2}$$

$$\frac{4}{3}p + p - 3 = \frac{p+1}{2} \qquad \textbf{Ecuación dada}$$

$$\frac{4}{3}p + \frac{3}{3}p - 3 = \frac{p+1}{2} \qquad \text{Fracción equivalente a } p$$

$$\frac{7}{3}p - 3 = \frac{p+1}{2} \qquad \text{Sumar términos semejantes}$$

$$2 \cdot \left(\frac{7}{3}p - 3\right) = p + 1 \qquad \text{Multiplicar ambos lados por 2}$$

$$\frac{14}{3}p - 6 = p + 1 \qquad \text{Distribuir}$$

$$\frac{14}{3}p - p = 1 + 6 \qquad \text{Restar } p \text{ y sumar 6 a ambos lados}$$

$$\frac{11}{3}p = 7 \qquad \text{Simplificar}$$

$$p = 7 \cdot \frac{3}{11} \qquad \text{Multiplicar por el recíproco}$$

$$p = \frac{21}{11} \qquad \textbf{Solución}$$

Verificación:

$$\begin{aligned}
\frac{4}{3}\left(\frac{21}{11}\right) + \frac{21}{11} - 3 &= \frac{\frac{21}{11}+1}{2} \\
\frac{84}{33} + \frac{21}{11} - 3 &= \frac{\frac{32}{11}}{2} \\
\frac{84}{33} + \frac{63}{33} - \frac{99}{33} &= \frac{16}{11} \\
\frac{48}{33} &= \frac{16}{11} \\
\frac{16}{11} &= \frac{16}{11} \quad \checkmark
\end{aligned}$$

En los desarrollos anteriores incluimos todos los pasos, sin embargo algunos o su justificación escrita pueden omitirse. Lo importante es que el propio proceso de resolver pueda seguirse, y pueda entenderse por otra persona.

Trabajo Práctico

Ejercicio 10.Resuelva y verifique cada una de las ecuaciones:

a. $-3(8x-2) = 78$

b. $\left(\frac{3}{2}m + 2\right) \div (-3) = -5$

c. $\frac{5}{3}t - 2 = \frac{3}{2}t - \frac{3}{4}$

d. $3(2-2x) = -2(3+2x) - 5$

e. $\frac{4}{3}p + p - 3 = \frac{p+1}{2}$

f. $\frac{5}{2}y - \frac{2}{3}(y-2) = \frac{3y+6}{2}$

k. $\sqrt{3}x + \sqrt{12} = \frac{x+5}{\sqrt{3}}$

Otra situación que se da frecuentemente en Física determinar una expresión en función de otras conocidas, lo que conocemos como *despejar* alguna variable. Por ejemplo:
Despeje de S en la ecuación $T = \sqrt{\frac{R-S}{S}}$

$T = \sqrt{\dfrac{R-S}{S}}$	**Expresión dada**
$T^2 = \left(\sqrt{\dfrac{R-S}{S}}\right)^2$	Elevar al cuadrado ambos miembros
$T^2 = \dfrac{R-S}{S}$	Simplificar radical
$S \cdot T^2 = R - S$	Multiplicar ambos lados por S
$ST^2 + S = R$	Sumar S a ambos lados
$S(T^2+1) = R$	Factorizar S en el lado izquierdo
$S = \dfrac{R}{T^2+1}$	Dividir ambos lados por T^2+1

Trabajo Práctico
Ejercicio 11.Despeje la incógnita encerrada entre llaves en cada una de las siguientes igualdades.

a. $\{n\}\ I = \dfrac{nE}{R+nr}$

b. $\{P\}\ x = \dfrac{Pgt^2}{2u(1+m)}$

c. $\{x\}\ a = \dfrac{2bx}{1+b(x-1)}$

d. $\{L\}\ T = \dfrac{W(u^2-2gt)}{gl}$

e. $\{K\}\ T = 2\pi\sqrt{\dfrac{k^2+h^2}{gh}}$

f. $\{c\}\ 2ax = \sqrt{b-4ac} - b$

h. $\{R\}\ I = E\sqrt{R^2+w^2L^2}$

i. $\{p\}\ \dfrac{1}{f} = (p-1)\left(\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{s}\right)$

Ecuaciones de segundo grado

Para resolver ecuaciones de segundo grado de la forma $ax^2+bx+c=0$, disponemos de varios enfoques equivalentes:

1. **Fórmula resolvente (general)**:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Este método universal proporciona directamente las soluciones mediante sustitución algebraica.

2. **Propiedad de las soluciones (Relaciones de Cardano-Vieta)**: Si r_1 y r_2 son las soluciones, se cumple:

$$r_1 + r_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{y} \quad r_1 \cdot r_2 = \frac{c}{a}$$

Particularmente útil cuando se conocen relaciones entre las soluciones.

3. **Completar cuadrados**: Transformación a la forma:

$$a(x+h)^2 + k = 0$$

donde $h = \frac{b}{2a}$ y $k = c - \frac{b^2}{4a}$. Este método revela directamente el vértice de la parábola, como se vio anteriormente

Cada técnica ofrece distintas perspectivas: mientras la fórmula resolvente proporciona soluciones inmediatas, completar cuadrados muestra propiedades geométricas, y las relaciones entre raíces son valiosas para análisis algebraicos. En general no se pedirá un método específico, sino la capacidad de resolverlo; pero es importante destacar que la estrategia de completar el cuadrado se utiliza con frecuencia en Cálculo y en materias siguientes.

Veremos cada estrategia con el mismo ejemplo:
Resolución de la ecuación cuadrática $x^2 - 5x + 6 = 0$

1. Fórmula resolvente (general)

Identificamos los coeficientes $a = 2; b = -5; c = 6$. Recuerde que siempre corresponden con el término cuadrático, con el lineal y con el término independiente respectivamente.

$$\begin{aligned}
x_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2} \\
&= \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} \\
x_1 &= \frac{5+1}{2} = 3 \\
x_2 &= \frac{5-1}{2} = 2
\end{aligned}$$

2. Propiedad de las soluciones

Para la ecuación $x^2 - 5x + 6 = 0$:

$$\begin{aligned}
\text{Suma de soluciones} &= -\frac{b}{a} = 5 \\
\text{Producto de soluciones} &= \frac{c}{a} = 6
\end{aligned}$$

Buscamos dos números que sumen 5 y multipliquen 6:

$$3 + 2 = 5 \quad \text{y} \quad 3 \times 2 = 6$$

Por tanto, las soluciones son $x_1 = 3$ y $x_2 = 2$. El problema con esta estraegia es que encontrar tales números puede ser más complicado que resolver la ecuación original en algunos casos

3. Método de completar cuadrados

En este caso, el coeficiente principal es 1, es decir $a = 1$. Si no fuera así, el **primer paso obligatorio** es dividir a todos los términos por el coeficiente a

$x^2 - 5x + 6 = 0$	Ecuación original
$x^2 - 5x = -6$	Asociamos términos con x
$x^2 - 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = -6 + \left(\frac{5}{2}\right)^2$	Completamos el cuadrado
$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = -6 + \frac{25}{4}$	Factorizamos el trinomio cuadrado perfecto
$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$	Simplificamos términos
$\lvert x - \frac{5}{2}\rvert = \pm\frac{1}{2}$	Aplicamos raíz cuadrada a ambos lados
$x = \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}$	Despejamos x
$x_1 = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 3$	Primera solución
$x_2 = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = 2$	Segunda solución

Con cualquiera de las estrategias, tenemos las mismas soluciones $x_1 = 3, \quad x_2 = 2$, por lo que debería quedar presente que se puede elegir la de preferencia, atendiendo a las particularidades de cada una. A modo de práctica se propone cada estrategia, pero recordamos que al evaluar, se podrá utilizar cualquiera

Trabajo Práctico

Ejercicio 12.Resuelva las ecuaciones cuadráticas mediante la fórmula resolvente:

a. $x^2 - 5x - 6 = 0$
b. $2x^2 - 8x + 6 = 0$
c. $3x^2 - 12x + 9 = 0$
d. $x^2 + 4x + 4 = 0$
e. $4x^2 - 12x + 9 = 0$
f. $x^2 - x - 6 = 0$
g. $2x^2 + 5x - 3 = 0$
h. $x^2 - 9 = 0$
i. $x^2 + 6x = 0$

Ejercicio 13.Resuelva las ecuaciones cuadráticas completando el cuadrado:

a. $x^2 - 4x - 12 = 0$
b. $p^2 - 15 = -2p$
c. $2m^2 - 8 = -6m$
e. $3s^2 - s = 0$

Ecuaciones con valor absoluto

El último caso de ecuaciones que veremos en esta unidad es el de **ecuaciones con módulo** o **valor absoluto** Recordamos la definición de valor absoluto de la Unidad 1. Para cualquier número real x, su **valor absoluto** se define como:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

En el caso de las ecuaciones tendremos: Para resolver $|A| = B$ ($B \geq 0$):

$$|A| = B \Leftrightarrow \begin{cases} A = B \\ \text{o} \\ A = -B \end{cases}$$

Vemos un ejemplo resuelto para una ecuación:

$$|3x + 5| = 1 \quad \text{(Ecuación original)}$$

Por definición de valor absoluto, se plantean dos casos:

$$\begin{aligned} 3x + 5 = 1 \quad &\text{(Caso 1)} \\ \text{o}& \\ 3x + 5 = -1 \quad &\text{(Caso 2)} \end{aligned}$$

Resolución del Caso 1: $3x + 5 = 1$

$$\begin{aligned} 3x + 5 &= 1 \\ 3x &= 1 - 5 \\ 3x &= -4 \\ x &= -\frac{4}{3} \quad \text{(Solución 1: } x_1\text{)} \end{aligned}$$

Resolución del Caso 2: $3x + 5 = -1$

$$\begin{aligned} 3x + 5 &= -1 \\ 3x &= -1 - 5 \\ 3x &= -6 \\ x &= -\frac{6}{3} \\ x &= -2 \quad \text{(Solución 2: } x_2\text{)} \end{aligned}$$

Verificación de las soluciones

- **Para $x_1 = -\frac{4}{3}$:**

$$\begin{aligned} |3x + 5| &= \left|3\left(-\frac{4}{3}\right) + 5\right| \\ &= |-4 + 5| \\ &= |1| \\ &= 1 \quad \checkmark \text{ (Verifica)} \end{aligned}$$

- **Para $x_2 = -2$:**

$$\begin{aligned} |3x+5| &= |3(-2)+5| \\ &= |-6+5| \\ &= |-1| \\ &= 1 \quad \checkmark \text{ (Verifica)} \end{aligned}$$

Conjunto solución

$$\mathbb{S} = \left\{-\frac{4}{3},\ -2\right\}$$

Trabajo Práctico
Ejercicio 14.Resuelve:

a. $|5s-2| = 7$

b. $|3x+1| = -4$

c. $|2t-5| = 0$

d. $\left|\frac{y}{2}+3\right| = 4$

---

4. Inecuaciones

Desigualdades de primer grado o lineales

A diferencia de las ecuaciones que tienen soluciones que por lo general son números, las desigualdades presentan *intervalos solución*:

- **Ecuaciones:** Determinan valores exactos que satisfacen la igualdad.

$$2x+3=7 \quad \Rightarrow \quad x=2 \text{ (solución única)}$$

- **Desigualdades:** Definen rangos de valores que cumplen la relación.

$$2x+3<7 \quad \Rightarrow \quad x \in (-\infty, 2) \text{ (intervalo solución)}$$

Propiedades de las desigualdades

La estrategia para resolver desigualdades es similar a la que vimos para ecuaciones, pero debemos tener en cuenta estas propiedades:

Propiedad	Enunciado Matemático	Ejemplo
Transitiva	$a < b \ \wedge \ b < c \ \Rightarrow \ a < c$	Si $2 < 5$ y $5 < 9$ entonces $2 < 9$
Suma de desigualdades	$a < b \ \wedge \ c < d \ \Rightarrow \ a + c < b + d$	Si $3 < 7$ y $1 < 4$ entonces $3 + 1 < 7 + 4$
Suma de constante	$a < b \ \Rightarrow \ a + c < b + c$	Si $5 < 8$ entonces $5 + 2 < 8 + 2$
Multiplicación por $c > 0$	$a < b \ \Rightarrow \ ac < bc$	Si $4 < 6$ y $c = 2$ entonces $8 < 12$
Multiplicación por $c < 0$	$a < b \ \Rightarrow \ ac > bc$	Si $3 < 5$ y $c = -1$ entonces $-3 > -5$

Observación clave: La propiedad de multiplicación por negativo es **crítica** en la resolución de desigualdades, ya que:

- Es la principal diferencia operacional con las ecuaciones
- Su olvido es fuente común de errores

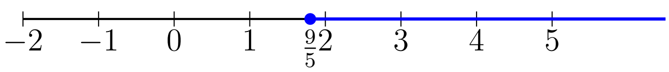
Veamos algunos ejemplos:
Ejemplo 1:

$$4x + 7 \leq 9x - 2$$

$$\begin{aligned}
4x + 7 &\leq 9x - 2 && \text{Inecuación dada} \\
4x + 7 - 7 &\leq 9x - 2 - 7 && \text{Sumando } (-7) \text{ en ambos miembros} \\
4x &\leq 9x - 9 && \text{Resolviendo} \\
4x - 9x &\leq -9 && \text{Sumando } (-9x) \text{ en ambos miembros} \\
-5x &\leq -9 && \text{Resolviendo} \\
x &\geq \frac{9}{5} && \text{Dividiendo por } -5 \text{ (invertir desigualdad)}
\end{aligned}$$

$$\mathbb{S} = \left[\frac{9}{5}, +\infty\right)$$

Y representamos gráficamente:

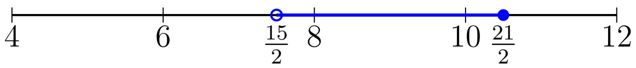


Ejemplo 2:

$$\frac{1}{6} < \frac{2t - 13}{12} \leq \frac{2}{3}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{6} < \frac{2t-13}{12} \leq \frac{2}{3} &\quad \text{Inecuación dada}\\
12\cdot\frac{1}{6} < 12\cdot\frac{2t-13}{12} \leq 12\cdot\frac{2}{3} &\quad \text{Multiplicando por 12 en ambos miembros}\\
2 < 2t-13 \leq 8 &\quad \text{Resolviendo}\\
2+13 < 2t-13+13 \leq 8+13 &\quad \text{Sumando 13 en ambos miembros}\\
15 < 2t \leq 21 &\quad \text{Resolviendo}\\
\frac{1}{2}\cdot 15 < \frac{1}{2}\cdot 2t \leq \frac{1}{2}\cdot 21 &\quad \text{Multiplicando por } \left(\frac{1}{2}\right) \text{ ambos miembros}\\
\frac{15}{2} < t \leq \frac{21}{2} &\quad \text{Resolviendo}
\end{aligned}
$$

$$\mathbb{S} = \left(\frac{15}{2}, \frac{21}{2}\right]$$



Trabajo Práctico
Ejercicio 15.Resuelva cada desigualdad.
Escriba el conjunto solución como intervalo y represente gráficamente:

(a) $7m - 3 > 2m + 3$

(b) $5 - 2z \geq 3z + 10$

(c) $\frac{1}{3}y + 2 < \frac{1}{6}y - 1$

(d) $-\frac{5}{2}(x-2) < -3\left(\frac{1}{6}x + 2\right)$

(e) $-\frac{2}{3}(2r+5) \geq \frac{3}{4}r - 2$

(f) $\frac{3}{5} \leq \frac{4v-1}{10} < \frac{7}{5}$

(g) $-\frac{1}{2} \leq \frac{4-3s}{5} \leq \frac{1}{4}$

(h) $\frac{2}{3}p - \frac{1}{4} > \frac{5}{6}p + \frac{1}{2}$

Desigualdades no lineales

Hay expresiones que involucran desigualdades, pero las expresiones involucradas comprenden potencias mayores que 1, o expresiones fraccionarias. Cada uno de ellos, responde a un tipo particular de resolución. Pero todos comparten el hecho de que se debe dejar de un lado de la inecuación los factores (polinomios factorizados y factores numéricos) y del otro lado, **debe** quedar un 0 (cero).

Ejemplo 1

$$2(x-4)(x+3) > 0$$

Dominio de la inecuación: $\mathbb{R}$
Decimos domino en el sentido de los posibles valores de x en la inecuación. Esta epxresión cobrará sentido en los ejemplos siguientes

$$2(x-4)(x+3) > 0$$

La expresión ya está factorizada en este caso. Las raíces de las ecuaciones son $x_1 = 4$ y $x_2 = -3$.

El producto de los 3 factores debe ser positivo. Deberíamos considerar todas las posibilidades de signo de los factores (excepto 2 que es positivo) y resolver cada una de éstas, para luego hacer la unión de todos los intervalos.

En lugar de esto, usaremos un excelente recurso: construiremos una tabla de doble entrada.

Las raíces dividen a la recta real en tres intervalos: $(-\infty, -3)$; $(-3, 4)$ y $(4, \infty)$; y esas serán las columnas de nuestra tabla.

Número testigo		-4	0	5
Factores	**Intervalo**	$(-\infty, -3)$	$(-3, 4)$	$(4, \infty)$
$(x-4)$		$-$	$-$	$+$
$(x+3)$		$-$	$+$	$+$
2		$+$	$+$	$+$
$2(x-4)(x+3)$		$+$	$-$	$+$

Parece innecesario colocar el 2 como un factor más en la tabla. Sin embargo, si fuese un número negativo, influiría en el signo del resultado.

En cada intervalo, elegimos un ”número testigoçon el cual evaluamos cada factor. Así obtenemos el signo del factor en cada intervalo.

Ejemplo:

- Número testigo: $x = -4$

  Factor:

  $$(x-4) = -4-4 = -8 < 0 \quad \text{se coloca un signo } (-) \text{ en la tabla}$$
  $$(x+3) = -4+3 = -1 < 0 \quad \text{se coloca un signo } (-) \text{ en la tabla}$$

- Número testigo: $x = 0$

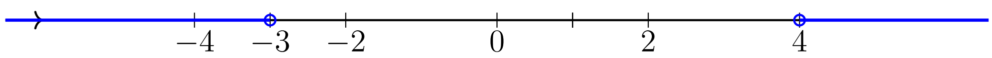
  Factor:

  $$(x-4) = 0-4 = -4 < 0 \quad \text{se coloca un signo } (-) \text{ en la tabla}$$
  $$(x+3) = 0+3 = 3 > 0 \quad \text{se coloca un signo } (+) \text{ en la tabla}$$

Luego, la inecuación $2(x-4)(x+3) > 0$, será positiva en $(-\infty, -3) \cup (4, \infty)$.

$$\mathbb{S} = (-\infty, -3) \cup (4, \infty)$$

Y representamos gráficamente:



Ejemplo 2

$$2x^2 - 5x \leq 3(x-8)$$

Dominio de la inecuación: $\mathbb{R}$

$$\begin{array}{rl} 2x^2 - 5x \leq 3(x-8) & \text{Inecuación dada} \\ 2x^2 - 5x - 3(x-8) \leq 0 & \text{Sumando } -3(x-8) \text{ en ambos miembros} \\ 2x^2 - 5x - 3x + 24 \leq 0 & \text{Propiedad distributiva} \\ 2x^2 - 8x + 24 \leq 0 & \text{Sumar términos semejantes} \\ x^2 - 4x + 12 \leq 0 & \text{Factor común} \end{array}$$

En este caso, el polinomio $x^2 - 4x + 12$ no tiene raíces reales, por lo tanto, no lo podemos factorizar en $\mathbb{R}$. Como el coeficiente del término cuadrático es positivo, este polinomio es positivo para todos los $x \in \mathbb{R}$. Tenemos entonces:

$$2 > 0 \quad \text{y} \quad x^2 - 4x + 12 > 0$$

Como el producto de dos números positivos es siempre positivo, concluimos que no existe ningún número real que satisface la desigualdad. Por lo tanto:

$$\mathbb{S} = \emptyset$$

Ejemplo 3

$$\frac{3}{x-1} - \frac{4}{x} \geq 1$$

Condiciones de existencia: Como la incógnita está en el denominador, $x \neq 1$ y $x \neq 0$.

Dominio de la inecuación es $\mathbb{R} - \{0, 1\}$.

Recordamos lo dicho anteriormente, en esta desigualdad x podrá ser cualquier número que la verifique, excepto 0 y 1, ya que anulan los denominadores.

Aquí debemos recordar la recomendación de dejar de un lado de la inecuación los términos (o los factores, según el caso) y del otro lado, debe quedar un 0 (cero).

$$\frac{3}{x-1} - \frac{4}{x} \geq 1 \quad \text{Inecuación dada}$$

$$\frac{3}{x-1} - \frac{4}{x} + (-1) \geq 1 + (-1) \quad \text{Sumando } -1 \text{ en ambos miembros}$$

$$\frac{3}{x-1} - \frac{4}{x} - 1 \geq 0 \quad \text{Resolviendo}$$

$$\frac{3x - 4(x-1) - x(x-1)}{x(x-1)} \geq 0 \quad \text{Sumando fracciones algebraicas}$$

$$\frac{3x - 4x + 4 - (x^2 - x)}{x(x-1)} \geq 0 \quad \text{Propiedad distributiva}$$

$$\frac{-x + 4 - x^2 + x}{x(x-1)} \geq 0 \quad \text{Sacando el paréntesis}$$

$$\frac{4 - x^2}{x(x-1)} \geq 0 \quad \text{Simplificando}$$

$$\frac{(2+x)(2-x)}{x(x-1)} \geq 0 \quad \text{Inecuación totalmente factorizada}$$

Factores de la inecuación: $(2+x)$; $(2-x)$; x; $(x-1)$

Raíces de los factores: $x = 0$; $x = 2$; $x = -2$; $x = 1$

Intervalos: $(-\infty, -2)$; $(-2, 0)$; $(0, 1)$; $(1, 2)$; $(2, \infty)$

Números testigo	-3	-1	0,5	1,5	3
Intervalo factores	$(-\infty, -2)$	$(-2, 0)$	$(0, 1)$	$(1, 2)$	$(2, \infty)$
$(2+x)$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
$(2-x)$	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$
x	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
$(x-1)$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$
$\frac{(2+x)(2-x)}{x(x-1)}$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$

Luego, la inecuación $\frac{(2+x)(2-x)}{x(x-1)} \geq 0$, será positiva en, en primera instancia en:

$$(-2, 0) \cup (1, 2)$$

Como la inecuación admite la igualdad, debemos analizar en los extremos, excluyendo los valores que no pertenecen al dominio de la inecuación. Luego:

$$\mathbb{S} = [-2, 0) \cup (1, 2]$$

Se deja como tarea representar gráficamente.

Trabajo Práctico

Ejercicio 16.Resuelve cada desigualdad.Exprese la solución como intervalo y gráficamente.

a. $3m^2 > 9(m-6)$

b. $r^2 \leq 16$

c. $(s-4)(s+3)(s-1) \leq 0$

d. $25x \leq x^3$

e. $\dfrac{x-1}{x+2} < 0$

f. $-2 < \dfrac{5x-2}{x+3}$

g. $4 < \dfrac{8s}{2s+3}$

h. $1 + \dfrac{2}{m+1} \leq \dfrac{2}{m}$

i. $\dfrac{1}{p+1} + \dfrac{1}{p+2} \leq 0$

Ejercicio 17.Escribe como intervalos el mayor conjunto que cumple con cada enunciado:

a. El siguiente de un número es mayor que 3.

b. La suma entre el cuadrado de un número y el propio número es menor o igual que 2.

c. El producto entre un número y su siguiente es negativo.

d. El cociente entre un número y su siguiente es positivo.

e. El cociente entre un número y su anterior es menor que 1.

Desigualdades con valor absoluto

Recordamos nuevamnete que el **valor absoluto** (o módulo) de un número real x, denotado por $|x|$, representa la distancia entre x y el cero en la recta numérica. Por definición, esta distancia siempre es no negativa:

$$|x| \geq 0 \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}$$

Propiedades de desigualdades con valor absoluto

Las siguientes propiedades son fundamentales para resolver inecuaciones con valores absolutos:

Desigualdad	Forma equivalente	Interpretación geométrica
$\|x\| < c$	$-c < x < c$	Todos los números entre $-c$ y c
$\|x\| \leq c$	$-c \leq x \leq c$	Incluye los extremos $-c$ y c
$\|x\| > c$	$x < -c$ ó $x > c$	Números fuera del intervalo $[-c, c]$
$\|x\| \geq c$	$x \leq -c$ ó $x \geq c$	Incluye los extremos $-c$ y c

- Las propiedades 1 y 2 describen intervalos **acotados** alrededor del origen (distancia menor o igual a c).
- Las propiedades 3 y 4 corresponden a valores **no acotados** a un intervalo centrado en el origen (distancia mayor que c).
- En todos los casos, c debe ser un número positivo ($c > 0$).

Ejemplo 1: Resuelve la siguiente inecuación:

$$8 - |2x - 1| \geq 6$$

$8 - \lvert 2x - 1\rvert \geq 6$	Inecuación dada
$8 + (-8) - \lvert 2x - 1\rvert \geq 6 + (-8)$	Sumamos -8 a cada miembro
$-\lvert 2x - 1\rvert \geq -2$	Simplificamos
$\dfrac{-\lvert 2x-1\rvert}{(-1)} \leq \dfrac{-2}{(-1)}$	Dividimos por -1 (cambia el sentido)
$\lvert 2x - 1\rvert \leq 2$	Simplificamos
$-2 \leq 2x - 1 \leq 2$	Aplicamos la propiedad de valor absoluto
$-2 + 1 \leq 2x - 1 + 1 \leq 2 + 1$	Sumamos 1 a cada parte
$-1 \leq 2x \leq 3$	Simplificamos
$-1 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right) \leq 2x \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right) \leq 3 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)$	Multiplicamos por $\dfrac{1}{2}$
$-\dfrac{1}{2} \leq x \leq \dfrac{3}{2}$	Solución final

El conjunto solución de la inecuación es todos los números reales x que satisfacen:

$$x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$$

Dejamos la representación gráfica como tarea.

En general, resolver una desigualdad que contenga una variable significa encontrar todos los valores de esa variable que hagan verdadera la desigualdad. Por lo general, a diferencia de una ecuación, la desigualdad tiene infinidad de soluciones que forman un intervalo o una unión de intervalos en la recta real.

Ejemplo 2: Resuelve la siguiente inecuación:

$$5|m + 3| - 5 > 3$$

$5\|m+3\|-5>3$	Inecuación dada
$5\|m+3\|-5+5>3+5$	Sumamos 5 a ambos miembros
$5\|m+3\|>8$	Simplificamos
$\frac{1}{5}\cdot 5\|m+3\|>\frac{1}{5}\cdot 8$	Multiplicamos por $\frac{1}{5}$ ambos miembros
$\|m+3\|>\frac{8}{5}$	Simplificamos

Aplicamos la propiedad de valor absoluto para desigualdades mayores:

$$\begin{aligned} \text{(I)}\quad m+3 &> \frac{8}{5} \\ m+3-3 &> \frac{8}{5}-3 \\ m &> \frac{8}{5}-\frac{15}{5} \\ m &> -\frac{7}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(II)}\quad m+3 &< -\frac{8}{5} \\ m+3-3 &< -\frac{8}{5}-3 \\ m &< -\frac{8}{5}-\frac{15}{5} \\ m &< -\frac{23}{5} \end{aligned}$$

El conjunto solución de la inecuación es la unión de dos intervalos:

$$m \in \left(-\infty, -\frac{23}{5}\right) \cup \left(-\frac{7}{5}, \infty\right)$$

Trabajo Práctico
Ejercicio 18.Resuelve:

a. $|2x-6| \leq 4$

b. $|5x-2| > 9$

c. $\left|\frac{s-2}{3}\right| < 2$

d. $4|3p-5|+7 \leq 10$

5. Sistemas de ecuaciones lineales

Un sistema de ecuaciones es un conjunto de ecuaciones con las mismas incógnitas. Una solución de un sistema es una asignación de valores para las incógnitas que cumplen cada una de las ecuaciones. Resolver un sistema significa encontrar todas las soluciones del sistema.

Ejemplo:

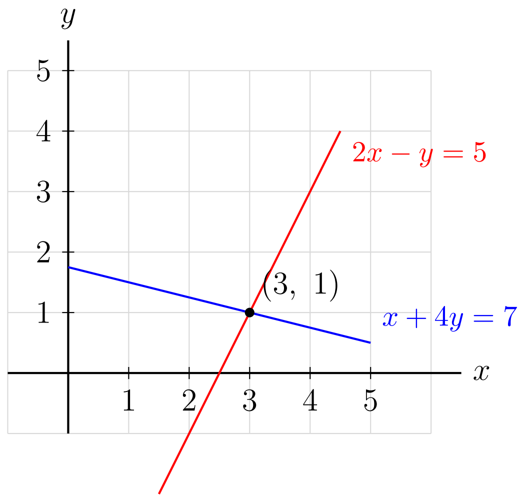
$$\begin{cases} 2x-y=5 & \text{Ec. (I)} \\ x+4y=7 & \text{Ec. (II)} \end{cases}$$

Se puede comprobar que $x=3$ e $y=1$ es una solución de este sistema.

Ecuación (I)	*Ecuación (II)*
$2x - y = 5$	$x + 4y = 7$
$2 \cdot (3) - (1) = 5$	$(3) + 4 \cdot (1) = 7$
$6 - 1 = 5$	$3 + 4 = 7$

La solución se puede escribir como par ordenado $(3,\ 1)$.

Además de la solución analítica, siempre existe la interpretación geométrica o gráfica.



Existen varios métodos analíticos de resolución, que a continuación detallaremos aplicándolos a la resolución del mismo sistema. Es posible que a lo largo de la escolaridad haya visto otros, al momento de resolver se puede elegir cualquiera de ellos.

Método de sustitución

En este método comenzamos con una ecuación del sistema y despejamos una incógnita en términos de la otra.

Procedimiento

1. **Despejar una incógnita:**
   Seleccione una ecuación y despeje una incógnita en términos de la otra.

2. **Sustituir:**
   Sustituya en la otra ecuación la expresión obtenida en el paso 1, luego resuelva para la incógnita restante.

3. **Sustituir hacia atrás:**
   Sustituya el valor encontrado en el paso 2 en la expresión del paso 1 para hallar la segunda incógnita.

Ejemplo resuelto Resolver el sistema:

$$\begin{cases} x + y = 4 & \text{(Ecuación I)} \\ 2x - y = 2 & \text{(Ecuación II)} \end{cases}$$

1. **Despejar una incógnita (de Ecuación I)**:

$$y = -x + 4$$

2. **Sustituir en Ecuación II)**:

$$2x - (-x + 4) = 2$$
$$2x + x - 4 = 2$$
$$3x = 6 \quad \Rightarrow \quad x = 2$$

3. **Sustituir hacia atrás**:

$$y = -(2) + 4 = 2$$

El conjunto solución del sistema es:

$$\mathbb{S} = \{(2,\ 2)\}$$

Método de igualación

En este método despejamos en ambas ecuaciones del sistema la misma incógnita (cualquiera de las dos) y posteriormente igualamos ambas expresiones.

Procedimiento

1. **Despejar la misma incógnita:**
   Escoja una incógnita (x o y) y despeje en ambas ecuaciones esa incógnita en términos de la otra.

2. **Igualar:**
   Iguale ambas expresiones obtenidas y resuelva algebraicamente para encontrar el valor de una incógnita.

3. **Sustituir hacia atrás:**
   Sustituya el valor encontrado en cualquiera de las expresiones del paso 1 para hallar la segunda incógnita.

Ejemplo Resuelto Resolver el sistema:

$$\begin{cases} x + y = 4 & \text{(Ecuación I)} \\ 2x - y = 2 & \text{(Ecuación II)} \end{cases}$$

1. **Despejar y en ambas ecuaciones**:

$$\text{De (I): } y = -x + 4$$
$$\text{De (II): } y = 2x - 2$$

2. **Igualar y resolver**:

$$-x + 4 = 2x - 2$$
$$-x - 2x = -2 - 4$$
$$-3x = -6$$
$$x = \frac{-6}{-3} = 2$$

3. **Sustituir hacia atrás** (usando Ecuación I):

$$y = -(2) + 4 = 2$$

Verificación con Ecuación II:

$$y = 2(2) - 2 = 2$$

El conjunto solución del sistema es:

$$\mathbb{S} = \{(2,\ 2)\}$$

Observación Este método también puede aplicarse despejando la incógnita x en ambas ecuaciones. ¡Inténtelo como ejercicio adicional!

Método de eliminación

Para resolver un sistema con este método combinamos las ecuaciones mediante sumas y restas para eliminar una de las incógnitas.

Procedimiento

- **Ajustar los coeficientes:** Multiplique una o ambas ecuaciones por números adecuados, de modo que los coeficientes de una incógnita sean opuestos.
- **Sumar las ecuaciones:** Sume las ecuaciones para eliminar una incógnita y despeje la restante.
- **Sustituir hacia atrás:** Sustituya el valor encontrado en una ecuación original para hallar la otra incógnita.

Ejemplo Resuelto:
Sistema dado:

$$\begin{cases} x + y = 4 & \text{(Ec. I)} \\ 2x - y = 2 & \text{(Ec. II)} \end{cases}$$

Paso 1: Ajustar coeficientes
Los coeficientes de y ya son opuestos (1 y -1), por lo que podemos sumar directamente.

Paso 2: Sumar ecuaciones

$$\begin{array}{r} x + y = 4 \\ 2x - y = 2 \\ \hline 3x = 6 \\ x = \dfrac{6}{3} = 2 \end{array}$$

Paso 3: Sustituir hacia atrás
Sustituimos $x = 2$ en la Ec. I:

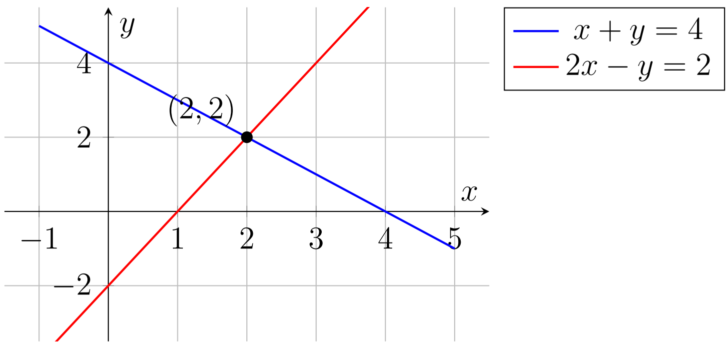
$$\begin{aligned} 2 + y &= 4 \\ y &= 4 - 2 \\ y &= 2 \end{aligned}$$

Vemos que el conjunto solución no depende del método elegido y es:

$$\mathbb{S} = \{(2, 2)\}$$

Interpretación gráfica

Consiste en representar gráficamente las rectas del sistema.



La gráfica muestra que las rectas se intersectan en el punto (2,2), que es la solución que habíamos obtenido. La representación gráfica es una herramienta útil para visualizar el sistema, pero debe recordarse que es una aproximación y que las soluciones exactas deben verificarse algebraicamente preferentemente.

Trabajo Práctico
Ejercicio 19.Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones por un método analítico:

1. $\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x - y = 2 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x + y = 11 \\ x - 2y = 4 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x - 3y = 12 \\ -x + \frac{3}{2}y = 4 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x + 6y = 0 \\ -3x - 9y = 18 \end{cases}$

5. $\begin{cases} -x + \frac{1}{2}y = -5 \\ 2x - y = 10 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 12x + 15y = -18 \\ 2x + \frac{5}{2}y = -3 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 3x + 4y = 10 \\ 5x - 2y = 8 \end{cases}$

8. $\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 4 \\ 4x - y = 10 \end{cases}$

Modelado de problemas

En diversas áreas de estudio, al utilizar ecuaciones para resolver problemas, frecuentemente obtenemos sistemas como los ya estudiados. A continuación se presenta una metodología sistemática para trabajar con sistemas de ecuaciones lineales:

Procedimiento

1. Identificar las incógnitas
Determine las cantidades desconocidas que el problema requiere encontrar. Esto se logra mediante una lectura cuidadosa del enunciado. Asigne notación adecuada (por ejemplo, x, y, etc.) a cada incógnita.

2. **Expresar cantidades en términos de las incógnitas**
   Relea el problema y exprese todas las cantidades mencionadas utilizando las incógnitas definidas en el paso anterior.

3. **Establecer el sistema de ecuaciones**
   Identifique las relaciones clave entre las expresiones obtenidas en el paso 2. Plantee un sistema de ecuaciones que modele matemáticamente estas relaciones.

4. **Resolver e interpretar**
   Resuelva el sistema planteado, verifique las soluciones obtenidas y presente la respuesta final como una solución completa al problema original.

Nota: Este procedimiento sistemático garantiza que no se pasen por alto aspectos importantes del problema y facilita la obtención de soluciones consistentes.

Ejemplo

A un empleado de una carpintería se le olvidó anotar cuántas mesas de 3 patas y cuántas de 4 patas tenía que preparar para un pedido. Si le trajeron 27 tableros y 93 patas, ¿cuántas mesas de cada tipo puede armar para que no le falten ni le sobren patas?

Resolución:

1. Identificar las incógnitas:

- x: cantidad de mesas de 3 patas
- y: cantidad de mesas de 4 patas

2. Expresar cantidades:

- Mesas de 3 patas: $3x$ patas
- Mesas de 4 patas: $4y$ patas

3. Plantear sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y = 27 & \text{(Total de mesas)} \\ 3x + 4y = 93 & \text{(Total de patas)} \end{cases}$$

4. Resolver el sistema:

1. Despejamos x en la primera ecuación: $x = 27 - y$
2. Sustituimos en la segunda ecuación:

$$\begin{aligned} 3(27 - y) + 4y &= 93 \\ 81 - 3y + 4y &= 93 \\ y &= 12 \end{aligned}$$

3. Hallamos x: $x = 27 - 12 = 15$

Verificación:

- Total de mesas: $15 + 12 = 27$ ✓
- Total de patas: $3(15) + 4(12) = 45 + 48 = 93$ ✓

Respuesta final: Puede armar 15 mesas de 3 patas y 12 mesas de 4 patas, utilizando exactamente los 27 tableros y 93 patas disponibles.

Trabajo Práctico
Ejercicio 20.Resuelve los siguientes problemas planteando sistemas de ecuaciones:

A. Determine dos números cuya suma sea 34 y cuya diferencia sea 10.

B. Con dos camiones cuyas capacidades de carga son respectivamente de 3 y 4 toneladas, se hicieron en total 23 viajes, para transportar 80 toneladas de madera. ¿Cuántos viajes realizó cada camión?

C. Un rectángulo tiene un perímetro de 28 cm, y la diferencia entre su base y su altura es de 2 cm. Calcua el **área** del rectángulo.

D. Un rectángulo tiene un perímetro de 60 cm. Si el largo es el doble del ancho, ¿cuáles son sus dimensiones?

E. Si la cantidad de alambre necesaria para cercar un campo rectangular es de 3000 m. ¿Cuáles son las dimensiones del campo si se sabe que la diferencia entre el ancho y el largo es de 50 metros?

F. En una biciclitería hay entre bicicletas y triciclos 23 vehículos. La cantidad de ruedas es 49. ¿Cuántas bicicletas y cuántos triciclos hay?

G. Un lado de un triángulo isósceles mide 3 cm menos que la suma de los dos lados iguales. El perímetro es de 33 cm. ¿Cuáles son las medidas de los lados del triángulo?

H. Si aumenta en dos centímetros el largo y el ancho de un rectángulo, el perímetro resulta ser de 24 cm. Si el largo se disminuye en dos centímetros el rectángulo se transforma en un cuadrado. ¿Cuál es el área de dicho rectángulo?

I. La suma de las edades de un padre y su hijo es 45 años. Dentro de 5 años, la edad del padre será el doble que la del hijo. ¿Qué edad tienen actualmente?

H. En una granja hay conejos y gallinas. Si contamos las cabezas hay 35 y si contamos las patas hay 94. ¿Cuántos conejos y gallinas hay?

TRABAJO PRÁCTICO - EJERCICIOS ADICIONALES
Ejercicio 1: Resuelva las ecuaciones.

a. $x - \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}x - 5 = 0$

b. $2m - \frac{m}{2} + \frac{m+1}{4} = 6m$

c. $(t-4)^2 = (t+4)^2 + 32$

d. $\frac{4}{x-1} + \frac{2}{x+1} = \frac{35}{x^2-1}$

e. $6x(x-1) = 21 - x$

f. $3y^2 + 5y = 2$

g. $-p(p+3) = \frac{7}{4}$

h. $m^2 = \frac{3}{4}m - \frac{1}{8}$

i. $\frac{x+5}{x-2} = \frac{5}{x+2} = \frac{28}{x^2-4}$

j. $2x + \sqrt{x+1} = 8$

k. $x^4 - 13x^2 + 40 = 0$

Ejercicio 2: Despeje la incógnita encerrada entre llaves en cada una de las siguientes igualdades.

a. $\{x\}$ $\dfrac{ax+b}{cx+d} = 2$

b. $\{a\}$ $\dfrac{a+1}{b} = \dfrac{a-1}{b} + \dfrac{b+1}{a}$

c. $\{r\}$ $F = G\dfrac{mM}{r^2}$

d. $\{i\}$ $A = P\left(1 + \dfrac{i}{100}\right)^2$

e. $\{t\}$ $h = \dfrac{1}{2}gt^2 + v_0 t$

f. {n} $\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$

Ejercicio 3: Resuelva cada una de las siguientes desigualdades. Exprese la solución usando notación de intervalos y grafique el conjunto solución.

a. $-1 < r + 5 < 4$

b. $2(7x-3) \leq 12x + 16$

c. $-3(y-5) > 2(3y+2)$

d. $-\dfrac{4}{3}(m+3) < -2\left(\dfrac{3}{4}m - 2\right)$

e. $3x^2 - 3x < 2x^2 + 4$

f. $x^3 - 4x > 0$

g. $\dfrac{2m+1}{m-5} \leq 3$

h. $\dfrac{6}{x-1} - \dfrac{6}{x} \geq 1$

i. $\dfrac{x+2}{x+3} < \dfrac{x-1}{x-2}$

j. $\left|\dfrac{r+1}{2}\right| \geq 4$

k. $3 - |2x+4| \leq 1$

l. $|2x-3| \leq 0,4$

Ejercicio 4. En cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones, calcula los parámetros que cumplan lo indicado.

a. Halla los valores a y b para que el sistema

$$\begin{cases} ax - y = 2b + 3 \\ 2x + by = a - 3 \end{cases}$$

tenga por solución a $S = \{(1, -2)\}$.

b. Determina los valores m y n para que el sistema

$$\begin{cases} mx + 3y = n - 1 \\ 4x - ny = 2m + 5 \end{cases}$$

tenga como solución única $S = \{(-1, 2)\}$.

c. Encuentra, si es posible, los parámetros p y q que hacen que el sistema

$$\begin{cases} (p+1)x - 2y = q^2 \\ 3x + (q-1)y = 2p \end{cases}$$

no tenga solución

Ejercicio 5. ¿Cuáles pueden ser los valores de h, si existen, para que las siguientes ecuaciones tengan la cantidad de soluciones indicadas?

a. La ecuación $3hx^2 + 2x + 9 = 0$ tenga dos soluciones reales.

b. La ecuación $-3x^2 + 5x + h = 3$ tenga dos soluciones reales.

c. La ecuación $3x^2 + 6x - (h - 1) = 0$ tenga solución única.

d. La ecuación $2x^2 - 6x - (3 - k) = 0$ no tenga soluciones reales.

e. $4x^2 - 3x + 2h = -hx^2 + 3$ tenga dos soluciones reales.

Bibliografía

- Altman, S.; y Otros (2001): Matemática, Buenos Aires, Longseller.
- Larson, R y Otros. (2012). Precálculo (8va. ed.) México D. F., Cengage Learning Editores S.A. de C.V.
- Stewart, J y Otros. (2001). Precálculo (6ta ed.) México D. F., International Thomson Editores, S.A.
- Sullivan, M. (1997): Precálculo, (4ta ed.) , México, Pearson Educación, Prentice Hall, Addison Wesley. Faires, D