Expresiones algebraicas

Un poco de historia...

El Álgebra es una invención de los árabes que introdujeron en la península Ibérica en el siglo XII. En el Siglo XIII en Toledo el príncipe Alfonso X "El Sabio" creó la Escuela de Traductores donde las ciencias griega y árabe se esparcieron por toda Europa. El principal tratado de Álgebra del siglo XIII se debe a un italiano, Fibonacci (a quien mencionamos en el módulo de numeración ya que, entre otras cosas, introdujo la barra horizontal para anotar los números racionales), influido por la cultura árabe.

En el Renacimiento, siglo XVI, se destacaron como algebristas, Cardano (italiano) y Vietta (francés). Este último fue el que representó números arbitrarios por letras en las ecuaciones y fórmulas algebraicas.

En el siglo XVII, el progreso del álgebra sirvió a Descartes para combinarla con la geometría creando una herramienta matemática poderosa: la Geometría Analítica con la que se pudo resolver algunos problemas geométricos planteados por los griegos en el siglo III a.C[1].

Le presentamos la siguiente situación:

Un famoso Mentalista me dijo:
- Piensa un número.
- Añádele 15.
- Multiplica por 3 el resultado.
- A lo que salga réstale 9.
- Divide entre 3 lo que te haya quedado y luego réstale 8.
- ¿Qué resultado obtienes?
Yo le dije:
- 51
Y el Mentalista me dijo instantáneamente
- El número que pensaste es el 47.
No sé bien por qué, pero sospecho que es un trucho.

Transcribiendo uno a uno los pasos pedidos por el Mentalista, tenemos:

piensa en un número: x
Añádele 15 : $x + 15$
Multiplica por 3 el resutado: $(x + 15) . 3 = 3x + 45$
A lo que salga réstale 9: $3x + 45 - 9 = 3x + 36$
Divide entre 3 lo que te haya quedado: $(3x + 36) : 3 = x + 12$
Luego réstale 8: $x + 12 - 8 = x + 4$

Evidentemente no adivinó gran cosa!!!

[1] Historia de la Matemática de J. Rey Pastor y J. Babini

El lenguaje algebraico

Sabemos que la Aritmética se ocupa de los conjuntos numéricos, las operaciones y sus propiedades. Pero por ejemplo, al enunciar las propiedades de las operaciones, interpretar y resolver problemas, escribir y/o obtener relaciones es conveniente utilizar símbolos específicos de la Matemática y letras que representan cualquier número. Para estas ocasiones se utiliza un leguaje simbólico, llamado lenguaje algebraico.

Expresiones algebraicas

Con frecuencia habrá observado en los libros de estudio expresiones como:

a) $2xy$	b) $5a^3bx$	c) $3ab^2x - 10ab + 5$	
d) $x - \sqrt{3}$	e) $\frac{3x+2}{x+y}$	f) $5 - \sqrt[3]{x}$	g) $4x^2 + 3x$

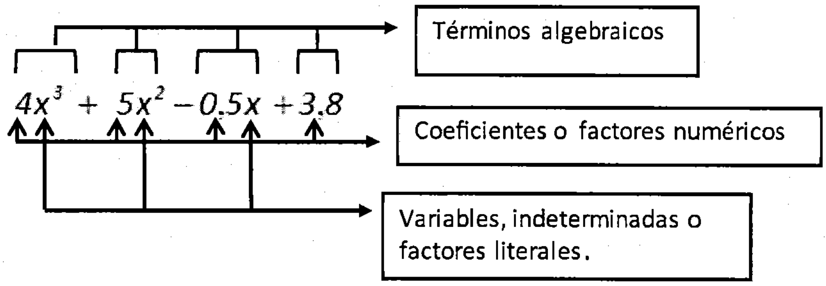
O transcripto del lenguaje coloquial al simbólico una situación como la siguiente:
si compramos dos cajas de CD y un mouse, siendo **x** el precio de cada caja e **y** el precio del mouse, el costo total de la compra se puede expresar como: .... Seguramente coincidimos en que la expresión que nos da el costo es: $2x + y$.

¿Cómo se llaman este tipo de expresiones?

Se denomina **expresión algebraica** a una combinación cualquiera de números representados por letras, o por letras y cifras, relacionadas entre sí por las operaciones de suma, resta, multiplicación, división, radicación y la potenciación.

Antes de seguir avanzando, te proponemos que observes el siguiente esquema en el que se han señalado algunos conceptos que serán útiles para clasificar las expresiones algebraicas.

$4x^3 + 5x^2 - 0,5x + 3,8$



Clasificación de las expresiones algebraicas

Si presta atención a las expresiones que vimos antes:

$a)\, 2xy$

$b)\, 5\,a^3\,b\,x$

$c)\, 3\,a\,b^2\,x - 10\,a\,b + 5$

$d)\, x - \sqrt{3}$

$e)\, \dfrac{3x+2}{x+y}$

$f)\, 5 + \sqrt[3]{x}$

$g)\, 4\,x^2 + 3x$

Liste cuáles son las operaciones que relacionan a las indeterminadas o variables en cada uno de los ítems.

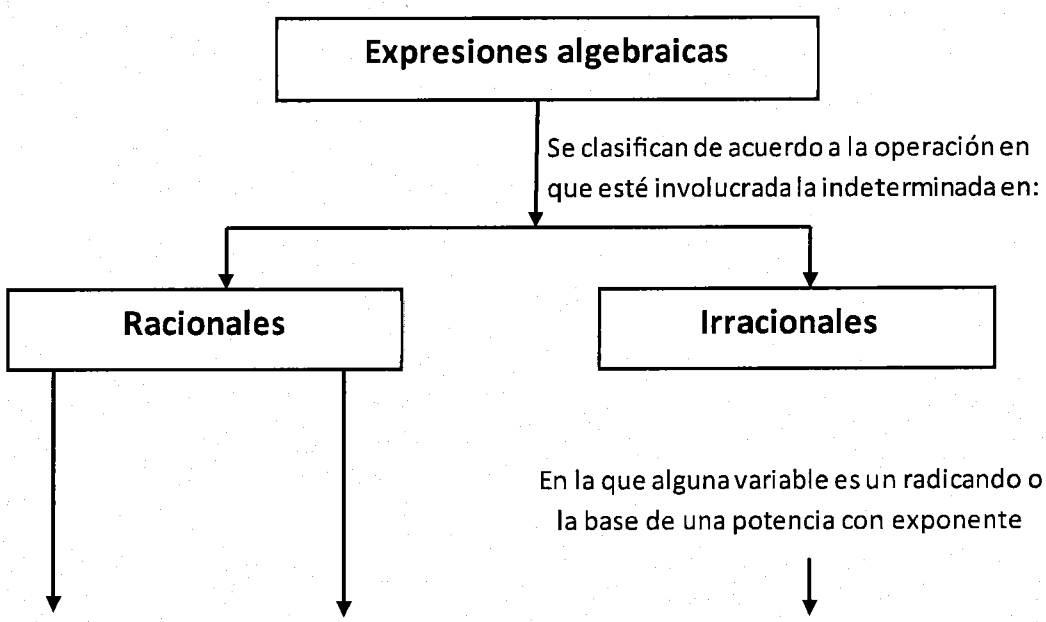
....

....

....

Clasificación de expresiones algebraicas

A partir de estas diferencias, las expresiones algebraicas se clasifican como se visualiza en el siguiente cuadro:



Enteras

Las variables son términos o factores con exponente

Por ejemplo:

- $\sqrt{5} + x^2a - x^5$
- $4x^5 + 3$
- $5\,a^3\,b\,x$
- $3\,a\,b^2\,x - 0.5\,a\,b$

Fraccionarias

En la que alguna variable es divisor o un término con exponente entero

Por ejemplo:

- $\frac{3x+2}{x+y}$
- $\frac{4}{x+2}$

Por ejemplo:

- $5 - \sqrt{x}$
- $\sqrt{2x+1}$
- $2x^{\frac{1}{2}} - 4$

Expresiones algebraicas enteras

Monomios

Recordaremos en este apartado algunos conceptos importantes como apoyo para encarar polinomios. Para ello nos centraremos en reconocer los monomios, determinar su grado, identificar monomios semejantes y las operaciones con los mismos.

Comenzamos definiendo:

> Una expresión algebraica de sólo un término, cuyas indeterminadas son potencias de exponente natural o cero, recibe el nombre de monomio.

Ejemplos:

a) $-2ab^2c^2$ b) $-5xz^3$ c) $7x^2z$ d) -8

Cada una de ellas está compuesta por un coeficiente, o factor numérico, e indeterminadas, o factores literales, de exponente en $\mathbb{N}_0$.

Grado de un monomio

Una característica a tener en cuenta, es la que se refiere al grado de este tipo de expresiones.

> El grado de un monomio, es la suma de los exponentes de las indeterminadas del mismo

Para interpretar este concepto analicemos algunos de los ejemplos dados:

• Sea el monomio $-2a\,b^2\,c^3$, los exponentes de las indeterminadas, o variables, son:
- 1 que corresponde a la indeterminada (o variable) a
- 2 es el correspondiente a la indeterminada (o variable) b
- 3 es el exponente asignado a c.

La suma de los exponentes individualizados es 6. Podemos concluir entonces que el grado de este monomio es 6.

• ¿Cuál es el grado del monomio -8? ¿En realidad es un monomio?

Las constantes, como en el caso de - 8, son monomios de grado cero, ya que cualquier constante k puede ser expresada como:

$k = k \,.\, 1 = k \,.\, k^0$

y particularmente podemos ver que:

$-8 = -8 \,.\, 1 = -8 \,.\, x^0$

Monomios semejantes

Por último, nos referiremos a los monomios semejantes. Para ello le proponemos que observe los siguientes términos y particularmente preste atención a los factores literales de cada uno de ellos y a su grado:

$\sqrt{5}x^2y \qquad 3x^2y \qquad \frac{1}{2}x^2y$

Estamos de acuerdo que presentan exactamente los mismos factores literales, tienen el mismo grado pero difieren en los coeficientes. Por la particularidad de tener los mismos factores literales e igual grado decimos que los tres monomios son semejantes.

Definimos entonces que:

> Dos o más monomios son semejantes si tienen el mismo grado y los factores literales o variables están elevados a los mismos exponentes.

Operaciones con monomios

Suma y resta

Para realizar estas operaciones, necesariamente los monomios deben ser semejantes de modo tal que el resultado sea también un monomio.

Observe y analice los pasos que se realizan a continuación para sumar los monomios:

$3x^3y^4$ y $10x^3y^4$

se tiene:

$$3x^3y^4 + 10x^3y^4 = (3+10)\ x^3y^4 = 13x^3y^4$$

Luego de haber analizado los pasos anteriores podemos concluir entonces que:

> La suma de monomios semejantes, es igual a un monomio cuyo coeficiente es igual a la suma de los coeficientes de los monomios dados y cuyo factor literal es el factor literal de los monomios dados.

Seguimos con el cálculo de resta de monomios. Para ello nuevamente le proponemos que observe y analice los pasos para realizar este cálculo:

$5x^3y^4$ y $10x^3y^4$

y restamos:

$$5x^3y^4 - 10x^3y^4 = (5-10)\ x^3y^4 = -5x^3y^4$$

Terminado el análisis de cada uno de los pasos, concluimos que:

> La resta de monomios semejantes es igual a un monomio cuyo coeficiente es igual a la resta de los coeficientes de los monomios dados y cuyo factor literal es el factor literal de los monomios dados.

Producto de monomios

Al multiplicar dos o más monomios, el resultado es otro monomio, no importa si son semejantes o no.

> El producto de dos o más monomios es un monomio cuyo coeficiente es el producto de los coeficientes de los monomios dados y cuyo factor literal es el producto de los factores literales de los estos mismos monomios.

El grado del monomio producto es la suma de los grados de los factores literales, si estos no son nulos. Si alguno de los monomios es el monomio nulo, el producto es el monomio nulo.

Luego, para multiplicar monomios debe tener presente la propiedad asociada al producto de potencias de igual base. Por ejemplo, si queremos multiplicar los siguientes monomios:

$$6\,a^2 x^2 y^4 (-2x^3 y^5) a x^2 y$$

Para obtener el producto:

• Primero se multiplican los coeficientes:

$6 \,.\, (-2) = -12$

• Luego se multiplican los factores literales, aplicando la propiedad del producto de potencias de igual base cuando sea necesario:

$$\underbrace{(a^2 \,.\, a)}_{} \,.\, \underbrace{(x^2 \,.\, x^3 \,.\, x^2)}_{} \,.\, \underbrace{(y^4 \,.\, y^5 \,.\, y)}_{} =$$

$a^3 \,.\, x^7 \,.\, y^{10}$

Con lo cual, el monomio resultante es: $-12\, a^3 x^7 y^{10}$

División de monomios

Para calcular el cociente entre dos monomios, será necesario que tenga presente la propiedad asociada al cociente de potencias de igual base. Veremos que el resultado no siempre es un monomio.

Preste atención a cada uno de los ejemplos analizados, paso a paso, a continuación, para entender las conclusiones posteriores:

a) $(4\,a^6 x^4 y^2) : (2\,a^2 x^3 y)$ que tiene como expresión equivalente a:

$$\frac{4a^6 x^4 y^2}{2a^2 x^3 y}$$

Al dividir los coeficientes y operar con los factores literales resulta:

$$\frac{4a^6 x^4 y^2}{2a^2 x^3 y} = 2\,a^{(6-2)}\, x^{(4-3)}\, y^{(2-1)} = 2a^4\, x\, y$$

Observe este otro ejemplo y preste especial atención a los exponentes remarcados del resultado:

b) $5a^2b^3c^2 : 3a^4bc^3 = \dfrac{5a^2\, b^3\, c^2}{3a^4\, b\, c^3} =$

$$= \frac{5}{3} a^{-2} b^2 c^{-1}$$

¿La expresión obtenida es un monomio?

Obviamente que no lo es. De acuerdo a la caracterización de los monomios, los factores literales son potencias con exponentes naturales o

Concluimos entonces que:
El cociente de dos monomios **no** siempre es otro monomio.

El cociente de dos monomios es otro monomio, sólo si las indeterminadas del monomio del numerador tienen exponente mayor o igual que las respectivas indeterminadas del monomio del denominador.

Ejercitación:

Ejercicio 121:
Completar de modo que las siguientes expresiones sean verdaderas:

a) En el monomio $-5{,}6\, a^3 b^4$ se pueden diferenciar dos partes: el coeficiente que es......... y el factor literal que es ....

b) Se llaman monomios semejantes a aquellos monomios que tienen ....

c) Los monomios semejantes pueden sumarse, restarse o multiplicarse dando por resultado otro...

Ejercicio 122:
Observe la siguiente expresión y complete:

$$4ab^2c^3 - 5ab^2c^3 = -ab^2c^3$$

¿Qué operación hemos realizado?......................, obteniendo el monomio................ cuyo grado es................

Ejercicio 123:
Resuelva los siguientes cálculos e indique, cuando sea posible, el grado del monomio resultante:

a) $0{,}5x^2 + 1{,}25x^2 - 3x^2$

b) $\frac{4}{3}a^3 - \left(-1{,}5a^3 + 2a^3\right)$

c) $-\frac{5}{7}x^2 a^5 \left(\frac{49}{40}x^2 a^5\right)$

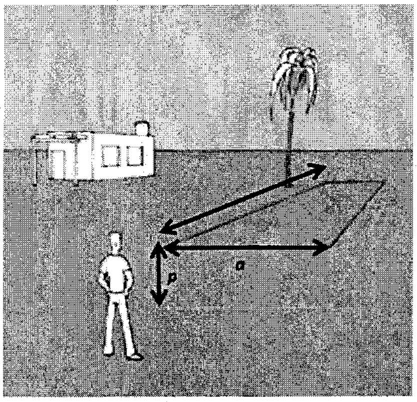
d) $\frac{6a^4 x^5 y^3}{2a^4 x^5 y^3}$

e) $\frac{26\, b^4 x^5 y^3}{3\, a^4 x^5 y^3}$

f) $\frac{\sqrt{12}\, x^m}{5\, x^n}$

Polinomios

Seguramente ha estudiado "polinomios". Pero.....¿qué son y para qué sirven los polinomios?. Le proponemos el siguiente problema para introducirnos en el tema:



Matías compró un terreno y quiere instalar una pileta de natación de forma rectangular. El arquitecto le dijo que para que el diseño sea armonioso, su pileta debe tener el doble de largo que de ancho, y los entendidos opinan que la profundidad debe ser la mitad del ancho.

Para hacer un presupuesto, averigua que el material para las paredes y el piso cuesta \$65 el m^2; la soldadura para las juntas, \$ 20 el m; la excavación, \$ 30 el m^3 y el traslado de materiales, \$100.

Se pretende:
a) Encontrar una fórmula que permita calcular el costo de la pileta en relación de su ancho a.

b) Saber cuál será el costo de construir una pileta de 5 m de ancho.

c) Si Matías dispone de \$15.000, saber si puede construir una pileta de 6 m de ancho.

Para resolver esta situación, indique con sus palabras lo que debe tener en cuenta para calcular el costo total de la piscina.

....

Si ahora traduce lo que escribió anteriormente a través de una expresión algebraica, en relación al ancho de la pileta, obtendrá una expresión similar a:

$$C(a) = 65(5a^2) + 20(8a) + 30a^3 + 100$$

Señale a continuación el significado de cada uno de los términos de esta expresión. Esta actividad le será útil para corregir la suya, si ha cometido errores, o para verificar, si es correcta:

65 ($5a^2$)	
20 (8 a)	
30 a^3	
100	

Operando sobre cada uno de los términos, la respuesta de la primera pregunta es:

$$C(a) = 30a^3 + 325a^2 + 160a + 100$$

Continuamos ahora con la segunda pregunta que dice:
Matemáticamente sería calcular el valor numérico de .
O sea:

....

Entonces la respuesta a esta pregunta es: ....

A continuación analizamos el tercer ítem:

Una pileta con un ancho de 6 metros le costará $ por lo que podemos concluir que una pileta de esas dimensiones excede su presupuesto.
Escriba la expresión y los cálculos que permiten verificar esta respuesta:

....

Creemos que con esta situación tan sencilla, pero muy útil, hemos respondido la pregunta del comienzo.

Definimos y estudiamos el comportamiento de las expresiones como las que obtuvimos en el problema, o sea en donde aparece sólo una variable o indeterminada.

Para formalizar podemos decir que:

> La expresión general de un polinomio, P(x), de grado n en la variable real x es: $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

Siendo:

• $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ números reales, llamados coeficientes del polinomio, que pueden ser nulos, a excepción de a_n.

• $n \geq 0$ es un número natural ó cero.

• x es la variable real o indeterminada.

• a_0 el término independiente y coeficiente de x^0.

Como $a_n \neq 0$, es éste el coeficiente principal y el exponente n de la variable o indeterminada es el grado del polinomio, ya que es el mayor exponente que alcanza la variable del polinomio.

Particularmente si $a_n = 1$, el polinomio se llama mónico.

En el siguiente esquema visualizaremos mejor los conceptos antes mencionados:

Potencias de la indeterminada

Coeficientes

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \wedge + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0 x^0$$

Términos o monomios

Damos a continuación varias definiciones:

> Un polinomio está ordenado si sus términos están ordenados en forma creciente, o decreciente, respecto de sus potencias.

> Un polinomio de grado n es completo cuando contiene todos los exponentes sucesivos respecto a la variable o indeterminada desde cero hasta el n-ésimo

En caso que el polinomio esté incompleto, se agregan los términos que faltan con coeficiente cero, para obtener una expresión equivalente a la dada.

Ejemplo:

$$P(x) = 4x^4 - 3x^2 - 0{,}5$$

es un polinomio incompleto.

Su equivalente completo, y ordenado en forma decreciente es:

$$P(x) = 4x^4 + 0x^3 - 3x^2 + 0x - 0{,}5$$

> Un polinomio es nulo cuando todos los coeficientes del mismo son nulos, y en este caso el polinomio no tiene grado.
> En símbolos es:
> $P(x) = 0x^n + 0x^{n-1} + \wedge + 0x + 0$ **o, simplemente** $P(x) = 0$

Dado un polinomio P (x) cualquiera, su opuesto - P (x) es aquel que tiene el mismo grado y cuyos coeficientes son números opuestos a los coeficientes de P (x).

Ejemplo:
Si se tiene el polinomio:

$$P(x) = 4x^4 - 3x^2 - 0{,}5$$

su polinomio opuesto será:

$$-P(x) = -4x^4 + 3x^2 + 0{,}5.$$

Ejercitación:

Ejercicio 124:
Complete de modo que los enunciados sean verdaderos:

a) Si p (x) = $3x^4 + 2x^3 - 3x - 5$, su polinomio opuesto es - p (x) = ...

b) p (x) + (- p (x)) = ...

Dado un polinomio P(x) cualquiera, un polinomio Q(x) es igual a P(x), si tiene el mismo grado y los mismos coeficientes correspondientes.

Ejercicio 125:
Calcule a, b , c y d de modo que P(x) = R(x):

$$P(x) = 5x^5 - 2x^3 + cx - d \quad \text{y} \quad Q(x) = ax^5 + bx^3 + 4x - d$$

Valor numérico de un polinomio

Para analizar el comportamiento de un polinomio, a veces nos interesará ver cuál es el valor que toma al sustituir la variable por un valor específico, o sea por algún número real, entonces:

El valor numérico de un polinomio es el que se obtiene al sustituir la variable x por un número real a y efectuar las operaciones indicadas en el polinomio.

Raíces de un polinomio

También es importante conocer los ceros o raíces de un polinomio:

Un número a real (o complejo) es raíz de un polinomio P(x) si P(a) = 0, o sea, que al evaluar el polinomio P en x obtenemos por resultado 0.
En forma simbólica:

$$x = a \;\; es \;\; raíz \;\; de\, P(x) \Leftrightarrow P(a) = 0$$

Ejemplo:

• Si $P(x) = 4x^4 - 3x^2 + x$, el valor numérico del polinomio si:

$x=1$, es: $P(1)=2$

$x=-1$, es: $P(-1)=0$ es decir que $x=-1$ es una raíz de P

Ejercitación:

Ejercicio 126:

En el siguiente grupo de expresiones algebraicas algunas son polinomios, indique cuál de ellas lo son y justifique su elección. En aquellas elegidas indique: grado, coeficiente principal, término independiente y además complételas y ordénelas en forma decreciente.

$x=0$, es: $P(0)=0$ es decir que $x=0$ es otraraíz de P

a) $P(x)=-3x^3-\sqrt{3}x+x^2-1$

b) $R(t)=5{,}2^t+1-3^{2t}$

c) $S(m)=0m^4+0m^3-3$

d) $Q(p)=\sqrt[3]{2px}-p^2x^2$

e) $A(s)=3(s-2a)^{-1}-2as^2$

f) $T(r)=\dfrac{p}{2}r^4-pr^2-2r$

Ejercicio 127:

Señale con una x la respuesta correcta.

a) El sucesor del número natural 4 (x - 1) está representado por:

☐ 4x ☐ 4x - 1 ☐ 4x - 4 ☐ 4x - 3 ☐ 4x - 8

b) El hermano de Andrea tenía x años cuando ella nació. Si ahora Andrea tiene y años. ¿Qué edad tendrá su hermano en y años más?

☐ 2y ☐ x + 2y ☐ 2x + y ☐ x - 2y ☐ 2x - y

c) Si m es el antecesor de n + 2, entonces el doble del sucesor de m, expresado en relación de n es:

☐ 2n + 2 ☐ 2n + 3 ☐ 2n + 4 ☐ 2n + 6 ☐ 2n + 8

d) La expresión que representa al enunciado "el cuadrado de la diferencia entre dos números" es:

☐ 2x - 2 ☐ 2x - y ☐ x^2 - y ☐ $(x - y)^2$ ☐ $x^2 - y^2$

e) La expresión "Al número x se le suma (- 4), dicha suma se divide por a y el resultado se multiplica por y", se representa con una expresión algebraica que es:

f) Si el inverso multiplicativo de $\frac{1}{x-4}$ es – 6, entonces x es igual a:

☐ - 2 ☐ - 10 ☐ $\frac{23}{6}$ ☐ $\frac{25}{6}$ ☐ $-\frac{25}{6}$

g) Sean a, b, y c números enteros tales que a – b = c. Si a = 3 y c = 10 a, entonces el cuádruplo de b es:

☐ 120 ☐ 30 ☐ $-\frac{27}{4}$ ☐ - 108 ☐ - 27

h) Si $a = \frac{2}{3}$ y $b = \frac{1}{2}$, entonces el aditivo inverso de a.b es:

☐ -1/3 ☐ 1/3 ☐ 1/6 ☐ - 1/6 ☐ 3

i) La expresión $(2x)^3$ se lee:

El doble del cubo de un número. ☐

El doble del triple de un número. ☐

El cubo del doble de un número. ☐

El cubo del cuadrado de un número. ☐

El triple del doble de un número. ☐

j) Si el largo de un rectángulo se triplica y su ancho disminuye al 50%, entonces se afirma que su área:

I) se hace 1,5 veces mayor
II) se incrementa en el 50%
III) aumenta en el 150%

de estas afirmaciones son verdaderas:

☐ Sólo I ☐ Sólo II ☐ Sólo III ☐ Sólo I y II ☐ I, II y III

Ejercicio 128:
Dados los monomios: $-3a^2 b$ y $\frac{2}{5}a^2 b$ realice:

a) Su suma es ....
b) Su diferencia es ....

Ejercicio 129:
Multiplique los monomios: $\frac{2}{3}x^3y^2z$ y $-6xy^3$

Ejercicio 130:
Efectúe el cociente indicado: $(5a^2bc^4) \ : \ (-2a^2c)$

Ejercicio 131:
Teniendo en cuenta el problema " La pileta de Matías":

a) La transcripción de la expresión $C(a)=30a^3+325a^2+160a+100$ en forma de una expresión algebraica utilizando la indeterminada x es:
....

b) Clasifique la expresión algebraica obtenida..

c) Particularmente, a este tipo de expresiones se las conoce con el nombre de:
....

d) Indique el valor de an , el que corresponde a a0 y el grado de este polinomio ....

e) Justifique brevemente la siguiente pregunta: ¿por qué el polinomio obtenido es ordenado y completo?
....

f) Escriba el valor numérico de los coeficientes del polinomio opuesto
....

Ejercicio 132:
Complete las siguientes oraciones de modo que queden expresiones verdaderas:

a) El grado del polinomio $P(x)=(x+4)(x^2-4x+4^2)-x^3-64+4x$ es:
....

b) El grado del polinomio $T(x)=(x-3)(x^2+3x+9)-x^3$ es: ....

Ejercicio 133:
Ordene el siguiente polinomio en forma decreciente y complételo:

$P(x) = 3 + x^4 - 4x - 3x^3 + 4x^2$

Ejercicio 134:
Complete los polinomios:

$P(a) = ax^3 - 4a$

$Q(z) = z^4 - 1$

Ejercicio 135:
Complete el polinomio $x^3 - y^3$ en forma decreciente con respecto a x y creciente con respecto a y.

Ejercicio 136:
El valor numérico del polinomio $P(x) = x^4 - 4x - 2x^3 + x^2 + 7$

$x = -1$, es: $P(-1) = ...$

$x = 2$, es: $P(2) = ...$

$x = 0$, es: $P(0) = ...$

Ejercicio 137:
Determine los valores de las constantes a, b, c y d para que los polinomios P(x) y Q(x) sean iguales.

$$P(x) = 3x^3 + (c - d)x^2 - 4x + a$$
$$Q(x) = (a + 2b)x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2cx + 1$$

Ejercicio 138:
Indique si son verdaderas o falsas las siguientes proposiciones:

a) Si $P(x) = x^4 + 5x + 6$ *entonces* $P(-1) = 2$

b) Si $P(x) = x^2 - 4x$ una raíz de $P(x)$ es -4

c) Si $a = 3$ el grado del polinomio $P(x) = (a^2 - 9)x^3 - (3 - a)x + a$ es 1.

d) El polinomio T(x) = 0 tiene grado 0.

Ejercicio 139:
Encuentre el valor de los polinomios para cada valor de x indicado:

a) $Q(x) = x^3 + 4x^2 + 5x + 4$ *si* $x = -2$

b) $S(t) = t^3 - 5t^2 + 8t - 4$ *si* $x = 1$

Ejercicio 140:
Marque con una cruz la única respuesta correcta:
El polinomio $P(x) = (m - 4)x^3 + (m^2 - 16)x^2 + (m + 4)x + 4$ es de grado 2:
a) si m = 4 ó si m = -4

b) si $m \neq 4$ y $m \neq -4$

c) si $m \neq 4$

d) si $m \neq -4$

e) para ningún valor de m

Expresiones algebraicas enteras

Operaciones con polinomios

Antes de comenzar con este contenido, a modo de repaso, responda las siguientes preguntas:

a) ¿Cómo se los llama a los términos de un polinomio?

....

b)Escribe tres monomios, de los cuales dos deben ser semejantes

....

c) Describe, sin calcular e indicando las propiedades adecuadas, ¿cómo se obtiene el resultado de: $\left(2^{0,5}x^2y^3\right)\cdot\left(-2^{0,5}xy^{-1}\right)$ es:

....

Indique si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. Luego escriba las falsas en forma correcta:

V / F	Proposición	
	$(2x)^3 = 2x^3$	
	$5x(xy) = 5x^2 5xy$	
	$3x + 2xa + 6xa = 11x^3 a^2$	
	$(x + 2b)(x - 2b) = x^2 - 4b^2$	
	$(-2x)^3 = -8x^3$	

Suma de polinomios

Dados dos polinomios P(x) y Q(x), su suma es otro polinomio S(x) cuyos términos son la suma de los términos semejantes de los polinomios sumandos.

El grado del polinomio suma es menor o igual que el grado de los polinomios sumandos.

Para sumar dos o más polinomios se agrupan los monomios semejantes y se suman sus coeficientes.

Observe además que dos polinomios siempre se pueden escribir en forma equivalente de modo que todos los términos de uno tengan un semejante en el otro. Por ejemplo:

Dados $P(x) = 2x^2 - 3$ y $Q(x) = x$, pueden reescribirse como:

$$P(x) = 2x^2 + 0x - 3 \quad \text{y} \quad Q(x) = 0x^2 + x + 0$$

Así, son equivalentes a los dados y cada uno tiene términos semejantes en el otro.

Propiedades de la suma

Sean $P(x)$, $Q(x)$ y $R(x)$ polinomios cualesquiera en una variable, se verifican las siguientes propiedades:

Nombre propiedad	Propiedad	
Asociativa	[P(x) + Q(x)] + R(x) = P(x) + [Q(x) + R(x)]	Esta propiedad nos permite sumar tres o más polinomios entre sí.
Conmutativa	P(x) + Q(x) = Q(x) + P(x)	Esta propiedad nos permite sumar polinomios sin tener que preocuparnos por el orden de los mismos.
Elemento Neutro	P(x) + 0(x) = 0(x) + P(x) = P(x)	Si a cualquier polinomio se le suma 0(x), el resultado es ese mismo polinomio.
Elemento Inverso	P(x) + [- P(x)] = - P(x) + P(x) = 0(x)	Para cada polinomio siempre se puede encontrar otro polinomio (su opuesto), de modo que sumados dan 0(x).

Si observas atentamente, la suma de polinomios cumple las mismas propiedades que la suma de números enteros (o también, que los reales).

Recuerda que para obtener el polinomio opuesto o el polinomio inverso aditivo de un polinomio dado, basta con cambiar el signo de cada uno de sus términos.

Ejercicio 141:
Si $R(x) = 3x^3 - 2x - 1$ y $S(x) = x - 1$, entonces $R(x) + 2\ S(x)$ es igual a:

a) $R(x) + 2\ S(x) = 3\ x^3 - 3$
b) $R(x) + 2\ S(x) = 3\ x^3 - 2$
c) $R(x) + 2\ S(x) = 3\ x^3 + 3$
d) $R(x) + 2\ S(x) = x^3 - 3$
e) ninguna respuesta es correcta.

Resta

La resta de dos polinomios es otro polinomio obtenido sumándole al polinomio minuendo el polinomio opuesto al sustraendo:

$$P(x) - Q(x) = P(x) + [-Q(x)]$$

Multiplicación

La multiplicación de un número por un polinomio es otro polinomio obtenido multiplicando cada coeficientes del polinomio por el número dado.

Ejemplo:

Si $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 2$ y se multiplica por 5, se obtiene:

$$\begin{aligned} R(x) &= 5 \cdot P(x) = \\ &= 5 \cdot (2x^3 - 3x^2 + 4x - 2) = \\ &= 10x^3 - 15x^2 + 20x - 10 \end{aligned}$$

La multiplicación de un monomio por un polinomio da un polinomio obtenido multiplicando el monomio por cada uno de los monomios que forman el polinomio.

Ejemplo:

Si $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 2$ y se multiplica por $Q(x) = \frac{3}{2}x^2$, se obtiene:

$$\begin{aligned} R(x) &= Q(x) \cdot P(x) = \\ &= \frac{3}{2}x^2 \cdot (2x^3 - 3x^2 + 4x - 2) = \\ &= \frac{3}{2}2\, x^2x^3 + \frac{3}{2}(-3)\, x^2x^2 + \frac{3}{2}4x\,x^2 + \frac{3}{2}(-2)x^2 \\ &= 3x^5 - \frac{9}{2}x^4 + 6x^3 - 3x^2 \end{aligned}$$

La multiplicación de polinomios da otro polinomio obtenido multiplicando cada monomio que forma el primer polinomio por el segundo polinomio.

El grado del polinomio producto es igual a la suma de los grados de los polinomios factores.

Ejemplo:

Realicemos el producto entre $P(x)=3x^4-5x^2+11$ y $Q(x)=x^3+2x^2+4$

$$P(x)\,.\,Q(x)=(3x^4-5x^2+11)\,(x^3+2x^2+4)$$
$$=3x^4x^3+3\cdot 2x^4x^2+3x^4 4-5x^2x^3+(-5)2x^2x^2-5\cdot 4x^2+11x^3+11\cdot 2x^2+11\cdot 4$$
$$=3x^7+6x^6-5x^5+2x^4+11x^3+2x^2+44$$

La multiplicación de los polinomios dados lo hemos realizado en forma horizontal. También la podemos efectuar colocando los polinomios en columna, alineando los términos semejantes del siguiente modo:

$$\begin{array}{rrrrrrrr}
 & & & & 3x^4 & & -5x^2 & +11 \\
\times & & & & & x^3 & +2x^2 & +4 \\
\hline
 & & & & 12x^4 & & -20x^2 & +44 \\
 & & 6x^6 & & -10x^4 & & +22x^2 & \\
 & 3x^7 & & -5x^5 & & +11x^3 & & \\
\hline
 & 3x^7 & +6x^6 & -5x^5 & +2x^4 & +11x^3 & +2x^2 & +44
\end{array}$$

Propiedades de la multiplicación

Dados tres polinomios cualesquiera, P(x), Q(x) y R(x) se cumplen las propiedades:

Nombre propiedad	Propiedad	
Asociativa	[P(x) . Q(x)] . R(x) = P(x) . [Q(x) . R(x)]	Cuando se multiplican tres polinomios, no importa cuál de los productos se realice primero, el polinomio resultante es el mismo
Conmutativa	P(x) . Q(x) = Q(x) . P(x)	También en el producto de polinomios, el orden de los factores no altera el polinomio resultante obtenido.
Elemento Neutro	P(x) . 1(x) = 1(x) . P(x) = P(x)	Si se multiplica cualquier polinomio por 1(x) = 1 , se obtiene ese mismo polinomio
Elemento Absorvente	P(x) . 0 (x) = - 0(x) . P(x) = 0(x)	Multiplicando cualquier polinomio por el nulo, se obtiene nuevamente el nulo.

La siguiente propiedad, que se cumple para cualquier terna de polinomios P(x), Q(x) y R(x) involucra a la suma y al producto de ellos:

Distributiva	$P(x) \,.\, [Q(x) + R(x)] = P(x) \,.\, Q(x) + P(x) \,.\, R(x)$

Observe que las operaciones suma y producto de polinomios cumplen las mismas propiedades que la suma y producto de números enteros

Productos de interés práctico o también llamados productos notables

Existen algunos productos que tienen una estructura determinada, y algunos autores lo llaman "productos notables". Además, se usarán con mucha frecuencia y por eso es conveniente tenerlos presente.

Para comprobar los resultados realice las multiplicaciones correspondientes.

$(x+a)\ (x-a) = x^2 - a^2$ ——— diferencia de cuadrados

$(x+a)\ (x+a) = (x+a)^2 = x^2 + 2xa + a^2$
$(x-a)\ (x-a) = (x-a)^2 = x^2 - 2xa + a^2$
trinomio de cuadrado perfecto

$(x+a)(x+a)(x+a) = (x+a)^3 = x^3 + 3x^2a + 3xa^2 + a^3$
$(x-a)(x-a)(x-a) = (x-a)^3 = x^3 - 3x^2a + 3xa^2 - a^3$
cuatrinomio de cubo perfecto

División

No siempre es posible dividir polinomios y encontrar otro polinomio. Esto sólo se logra bajo ciertas condiciones.

> Se llama división entera de un polinomio P(x) de grado m entre otro Q(x) de grado n, con $m \geq n$, al algoritmo por el cual se obtienen otros dos polinomios C(x) y R(x) que cumplen:
>
> $P(x) = Q(x) \,.\, C(x) + R(x)$ (1)
>
> Grado de $C(x) = m - n$ y grado de $R(x) \leq n-1$
>
> o $R(x)$ no tiene grado

$$\boxed{P(x) = Q(x) \,.\, C(x) + R(x)}$$

Dividendo **Divisor** **Cociente** **Resto**

A la expresión (1) se la llama "ALGORITMO DE LA DIVISIÓN"

Lo expresado anteriormente lo podemos visualizar del siguiente modo: si queremos efectuar el cociente entre dos polinomios, por ejemplo:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

lo indicamos de manera similar al cociente o división de números reales:

$$\begin{array}{l|l} P(x) & Q(x) \\ \hline R(x) & C(x) \end{array}$$

> Algoritmo
> Es un conjunto de instrucciones, que cumplidas en el orden en que se dan, conducen a la solución de un problema después de una cantidad.

Para obtener los polinomios cociente y resto a partir de los polinomios dividendo y divisor, se deben tener presente este conjunto de instrucciones:

- El grado del polinomio dividendo debe ser mayor o igual que el del polinomio divisor.
- Ambos polinomios se ordenan en forma decreciente y se completan antes de comenzar a dividir.
- El grado del resto debe ser menor que el del divisor o ser el polinomio nulo.

A continuación describimos el proceso de la división con el siguiente ejemplo:

$$(3x^4+5x^3-2x+3):(x^2-3x\ \ +2)$$

I) Se divide el primer término del dividendo por el primer término del divisor, con lo que se obtiene el primer término del cociente:

$$\frac{3x^4}{x^2}=3x^2$$

II) Se multiplica el primer término del cociente por el divisor:

$$3x^2\left(x^2-3x+2\right)=3x^4-9x^3+6x^2$$

III) El polinomio obtenido se resta del dividendo, obteniéndose un nuevo dividendo:

$$\left(3x^4+5x^3-2x+3\right)-\left(3x^4-9x^3+6x^2\right)=14x^3-6x^2-2x+3$$

Observe que el polinomio obtenido luego a aplicar una iteración del algoritmo tiene al menos un grado menos que el divisor.

IV) Con el dividendo obtenido, se repiten las operaciones de los pasos I, II y III hasta obtener un resto igual a cero o de menor grado que el del divisor.

A continuación presentamos el desarrollo completo del algoritmo:

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
3x^4 & +5x^3 & +0x^2 & -2x & +3 & x^2-3x+2 \\
\cline{6-6}
-3x^4 & +9x^3 & -6x^2 & & & 3x^2+14x+36 \\
\cline{1-3}
 & 14x^3 & -6x^2 & -2x & & \\
 & -14x^3 & +42x^2 & -28x & & \\
\cline{2-4}
 & & 36x^2 & -30x & +3 & \\
 & & -36x^2 & +108x & -72 & \\
\cline{3-5}
 & & & 78x & -69 &
\end{array}
$$

Cociente: $C(x)$

Ya no se puede seguir dividiendo por que el grado del resto, $R(x)$, es menor que el grado del divisor.

Luego, el cociente de los polinomios dados es posible expresarlo:

a) Teniendo en cuenta el algoritmo de la división: $P(x) = Q(x) \,.\, C(x) + R(x)$

$$P(x) = (x^2 - 3x + 2)\,(3x^2 + 14x + 36) + (78x - 69)$$

b) O también: $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \dfrac{R(x)}{Q(x)}$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{3x^4 + 5x^3 - 2x + 3}{x^2 - 3x + 2} = 3x^2 + 14x + 36 + \frac{78x - 69}{x^2 - 3x + 2}$$

• Si el resto es distinto de cero, la división se llama entera y se cumple la relación:

$$P(x) = Q(x) \,.\, C(x) + R(x)$$

• Si el resto es cero, la división se llama exacta, es decir, el dividendo es un múltiplo del divisor y se cumple la relación:

$$P(x) = Q(x) \,.\, C(x)$$

Si la división es exacta, las siguientes expresiones son equivalentes:

• El dividendo es múltiplo del divisor o el dividendo es divisible por el divisor.
• El dividendo es múltiplo del cociente o el dividendo es divisible por el cociente
• El dividendo es igual al producto entre el divisor y el cociente.

Regla de Ruffini

Si se quiere obtener $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ con $(5x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 6) : (x+2)$, se tienen grandes ventajas (aunque no se vea a simple vista). Dichas ventajas consisten en:

a) El hecho de que el polinomio divisor es mónico y al aplicar el algoritmo cada vez que se aplique el paso (I) el coeficiente de ese cociente es muy fácil de hallar.

b) El divisor es también un polinomio completo y por su grado siempre

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \mathrm{K} + a_1 x + a_0 \quad \text{y} \quad Q(x) = x - r$$

Y entonces $C(x) = b_{n-1} x^{n-1} + \mathrm{K} + b_1 x + b_0$ y $R(x) = d$ (en el caso que queremos resolver r=2)

Es decir que el cociente es otro polinomio de un grado menos (por lo menos) que el divisor y el resto un polinomio de grado 0, o el polinomio nulo.

Estas observaciones tuvo en cuenta Paolo Ruffini en 1809 y propuso un método más sencillo para realizar este tipo de divisiones, sin escribir en el procedimiento los factores literales de cada término. Este método se conoce como Regla de Ruffini.

Para dividir: $(5x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 6) : (x+2)$ aplicando la Regla de Ruffini, se deben realizar los siguientes pasos:

1. Completar el polinomio dividendo.

2. Colocar en un renglón solamente los coeficientes del polinomio dividendo ordenado en forma decreciente.

3. En el renglón que sigue, el – 2 (r en general, que es la raíz del polinomio divisor).

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 5 & -3 & 6 & \mathbf{0} & -6 \\
-2 & & & & & \\
\hline
 & & & & &
\end{array}$$

4. Repetir el primer coeficiente en la primera posición del tercer renglón.

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 5 & -3 & 6 & \mathbf{0} & -6 \\
-2 & & & & & \\
\hline
 & \downarrow 5 & & & &
\end{array}$$

5. Se lo multiplica por la raíz del divisor (2do renglón) y el resultado se coloca en el 2do renglón, bajo el segundo coeficiente.

	5	-3	6	0	-6
-2		-10			
	5				

6. Se realiza la suma indicada verticalmente, colocando el resultado en el tercer renglón.

sumar

	5	-3	6	0	-6
-2		-10			
	5	-13			

7. Se repiten los pasos (5) y (6) con los coeficientes que siguen hasta el coeficiente independiente del divisor.

	5	-3	6	0	-6	
-2		-10	26	-64	128	
	5	-13	32	-64	$\boxed{122}$	→ **Resto**

8. Los coeficientes hallados, en ese orden, son los coeficientes del polinomio cociente. El último de ellos es el resto de la división.

$$C(x) = 5x^3 - 13x^2 + 32x - 64 \quad \text{y} \quad R(x) = 122$$

Ejercicio 142:
Encuentra el cociente y resto aplicando regla de Ruffini:

a) $(4x^4 - 3x^2 - 1):(x-1)$

b) $(4x^4 + 2x^3 - 4x^2 + 3x + 1)(x+2)$

Teorema del Resto

Si se realiza la división de $P(x) = x^4 - 8x^2 - 7x + 2$ por $Q(x) = x - 3$, se puede hacer usando la Regla de Ruffini:

a)

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 0 & -8 & -7 & 2 \\ 3 & & 3 & 9 & 3 & -12 \\ \hline & 1 & 3 & 1 & -4 & \boxed{-10} \end{array} \longrightarrow \textbf{Resto}$$

Además si se evalúa el polinomio P(x) en x = 3, se tiene:

$$P(3) = 3^4 - 8 \cdot 3^2 - 7 \cdot 3 + 2 =$$
$$= 81 - 72 - 21 + 2 =$$
$$= -10$$

Esta coincidencia entre el valor del polinomio P(x) en x = 3 y el resto de la división P(x) : (x - 3) no es casual, de hecho se puede probar que para cualquier división de este tipo será así. Esta propiedad general se enuncia en el siguiente teorema:

Teorema del resto: el resto de la división de un polinomio P(x) por otro de la forma x - a coincide con el valor numérico de P(x) en x = a, es decir con P(a).

Este teorema es útil para conocer cuál es el resto de la división sin necesidad de realizarla.

Ejercitación:

Ejercicio 143:
Señale la respuesta correcta.

Dado el polinomio $P(x) = x^5 - kx^3 + x^2 - x$

$P(x)$ es divisible por $(x+1)$ si k es un número que pertenece al intervalo $(-3,1)$	
Para el valor calculado de k, el resto de dividir $P(x):(x-2)$ es 42	
Para el valor calculado de k, es $P(x) + 2Q(x) = x^5 - 3x^3 + 2$ siendo $Q(x) = -2x^3 + 0{,}5x + 1$	
Para el valor calculado de k, es $P(x):(x+1) = x^4 - x^3 + 2x^2 - x$	

Ejercicio 144:
Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

x^3-3x^2+x-1 es múltiplo de $(x+1)$	
x^4-81 es divisible por $(x+3)$	
Si $T(x)=-2x^5-3x^3+x^2+x+1$, entonces $P(-2)=-5$	
$S(x)=(x-2)^2+3x-4x^3$ y $P(x)=4x^3+2x^2+x-4$ son polinomios opuestos.	

Ejercicio 145:
Dados los siguientes polinomios, efectúe las operaciones que se indican a continuación:

$A(x)=x^2-5$ $\qquad$ $B(x)=\frac{1}{3}x^3-4x^2+x-1$ $\qquad$ $C(x)=\frac{1}{5}x+6$

a) $B(x)-[-C(x)]$

b) $2A(x)\cdot B(x)$

c) $B(x):\left(\frac{1}{6}x^2+x-2\right)$

d) $[-A(x)]^2:\left(\frac{1}{5}x-1\right)$

e) $-5C(x)+B(-1)$

Ejercicio 146:
Calcule el polinomio P(x) que dividido por (x + 1) tiene por cociente $C(x) = 3x^2 + 2x + 3$ y resto 2.

Ejercicio 147:
Calcule el valor de k, para que el resto de la división de los polinomios T(x) : P(x) sea 4, siendo $T(x)=4x^3-x^2+kx-2$ y $P(x)=(x-2)$

Ejercicio 148:
Sabiendo que 3/2 es una raíz del polinomio P(x), calcule el valor de la constante a si: $P(x)=2x^4-3x^3-ax-2{,}5x+6$

Ejercicio 149:
Efectúe el cociente $(2x^4-3x^3):(x+2)$

a) Utilice división de polinomios.
b) Mediante la Regla de Rufini.
c) Indique la expresión del polinomio cociente y el resto.
d) Aplique el Teorema del resto y verifique que P(-2) = R(x).

Ejercicio 150:
Resuelva las divisiones que siguen. Exprese el cociente y el resto. Cuando sea posible, aplique el teorema del resto para verificar:

a) $(x^4+7x^3-5x+1):(x^3+2x)$

b) $(8x^4-x^3-2+x^2):(x-2)$

Ejercicio 151:
Si P(1) = 3 y x = -2 es un cero de $P(x)=3x^4+ax^3-4x^2+bx+2$ entonces a y b valen...

Ejercicio 152:
Complete las siguientes expresiones:
a) .... + 10 x .... = (....... - 5)^2
b).......................... - 75 x .... = (...... - x)^3

Ejercicio 153:
Calcule el valor de a, sabiendo que $T(x)=\frac{1}{2}x^4+3ax^3-2x$ y $T(-2)=2$

Ejercicio 154:
En un rectángulo, las expresiones polinómicas que representan la longitud de los lados no congruentes son (x^2-2x) y $(-3x^2-4x)$

Encuentre el polinomio reducido que expresa el perímetro y el de la superficie del rectángulo.

Ejercicio 155:
Resuelva las divisiones que siguen. Exprese el cociente y el resto. Cuando sea posible, aplique el teorema del resto para verificar:

a) $(x^5+7x^3-5x+1):(x^3+2x)$

b) $(8x^4-x^3-2+x^2):(x-2)$

Ejercicio 156:
Si se conoce el cociente C(x), el divisor D(x) y el resto R(x) ¿Cuál es el dividendo?

a) $C(x)=3x^2+x+4$ $\quad D(x)=x+2$ $\quad R(x)=-9$

b) $C(x)=\frac{2}{3}x^3+4x^2-5x+4$ $\quad D(x)=x+2$ $\quad R(x)=0$

Ejercicio 157:
De la división exacta entre $2x^4 - 3x^3 + 10x^2 - 17x + 3$ y un cierto polinomio, el cociente es 2x - 3. ¿Cuál es ese polinomio?

Ejercicio 158:
Halle el valor de k en cada caso:

a) $P(x) = -2x^4 + 3kx - 1$ y P(x) es divisible por (x - 2)

b) $Q(x) = 5x^3 - 2x^2 + k$ y -1 es raíz de Q(x)

c) $S(x) = -2x^2 - 4x - k$ y el resto de dividir S(x) por (x +3) es -1.

d) $T(x) = 3(x+k)(x-5)$ y la suma de las raíces es 3.

Ejercicio 159:
El resto de dividir P(x) = $x^4 - 3x^3 - 4x^2 + 6x - 7$ por un cierto polinomio Q(x) es 4. ¿Puede ser Q(x) = (x - 3) el divisor? ¿Por qué?

Ejercicio 160:
Halle el resto de la división entre $P(x) = x^3 + 2x + 2$ y $Q(x) = x + 1$ e indique si los polinomios dados son divisibles.

Ejercicio 161:
Dado Q(x) = $x^6 - 64$, indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) El binomio P(x) = $x^3 + 8$ divide a Q(x). P(x) = $x^3 + 8$

b) - 2 es raíz de Q(x).

c) El polinomio $x^2 + 2x + 4$ es múltiplo de Q(x).

d) Q(x) = $(x^3 - 8)(x + 2)(x^2 - 2x + 4)$

Ejercicio 162:
Escriba un polinomio P(x) de grado tres para el cual 4 sea una raíz doble y -1 una raíz simple y que además verifique que P(2) = 24.

Ejercicio 163:
Escriba un polinomio Q(x) de grado tres sabiendo que
Q(-2) = Q(1) = Q(5) = 0 y que Q(0) = 50.

Ejercicio 164:
Indique si son (V) o (F) las siguientes proposiciones:

a) P(x) = $x^3 - kx^2 + 2x + 7k$ es divisible por Q(x) = x + 2, si k = 4.

b) Al dividir P(x) = $x^4 - 2x^3 + 4x^2 - x + 1$ por Q(x) = x - 2, el resto es 15.

c) $(a - \sqrt{3})(a + \sqrt{3})$ = a2 - 3.

Ejercicio 165:
¿Qué valores deben tener a y b para que $P(x) = 5x^3 - 2x^2 + ax - b$ sea divisible por $Q(x) = x^2 + 1$ (Recuerde: una sola respuesta es la correcta)

Para formalizar podemos decir que:

a) 5 y 2

b) 5 y -2

c) -5 y 2

d) -5 y -2

e) Ninguna respuesta es correcta.

Ejercicio 166:
Dados los siguientes polinomios, halle su valor para cada valor de x indicado:

a) $Q(x) = x^3 + 4x^2 + 5x + 4$ ....*para* $x = -2$

b) $S(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4$ .... *para* $x = 1$

c) Aplicando el teorema del resto, ¿cuál es el binomio que divide a $S(x)$? Verifique.

d) ¿Es $Q(x)$ divisible por $(x + 2)$? ¿Por qué?

e) ¿Cuál debería ser el valor del término independiente de $Q(x)$ para que sea divisible por $x - 2$?

Ejercicio 167:
¿Cuál es el polinomio que dividido por $x - 2$ tiene cociente $C(x) = 2x^3 + 7x^2 + 6x - 2$ y resto $R(x) = 3$?

Ejercicio 168:
Indique con una cruz si los siguientes polinomios son divisibles por $(x + 3)$

$P_i(x)$	**CÁLCULOS**	**SI**	**NO**
$P_1(x) = x^2 - 3^2$			
$P_2(x) = x^3 + 3^3$			
$P_3(x) = x^2 + 3x$			
$P_4(x) = x^4 + 3x^3 + 9x^2 + 27x + 81$			
$P_5(x) = x^3 - 27$			
$P_6(x) = x^4 + 81$			

Factorización de expresiones algebraicas enteras

También los polinomios pueden ser expresados como el producto de dos o más factores algebraicos. A este proceso se lo llama factorización.

> Recordemos que…
> es posible expresar los números enteros como producto de otros números enteros que son divisores del mismo, como por ejemplo:
> a) 6 = 2.3 o también 6= -2.(-3)
> b) -10= 2.(-5) o también -10 = -2. 5

Anteriormente vimos productos notables, en virtud de eso:

$$x^2 - 25 = (x-5)(x+5)$$

Aquí, el segundo miembro de la igualdad es un producto de dos factores, mientras que el primero es un binomio. Se dice que "factorizamos el binomio", porque ese binomio tiene como expresión equivalente un producto.

Para factorizar polinomios, en general, se aplican diversos recursos algebraicos como el de los productos notables y/o el de las raíces o ceros de un polinomio.

Factorización de polinomios a partir del cálculo de los ceros o raíces.

Anteriormente hemos visto que un número a (real o complejo) es una raíz o cero de un polinomio P(x), si el valor del polinomio se anula para ese valor de x.

En forma simbólica se escribe:

$$x=a \text{ es } \textit{raíz} \text{ de } P(x) \text{ si y sólo si } P(a)=0$$

Si combinamos el teorema del resto y el algoritmo de la división de un polinomio P(x) por un binomio de la forma (x - a)

$$P(x)=(x-a).C(x)+P(a)$$

Si P(a) = 0 entonces, una consecuencia importante estará dada por la expresión:

$$P(x)=(x-a).C(x)$$

> De la igualdad (2) extraemos dos conceptos importantes del álgebra operacional que son:
> • Expresión factorizada de un polinomio.
> • Divisibilidad de polinomios.

El polinomio dividendo queda expresado como el producto del divisor por el cociente, o también podemos decir que hemos factorizado P(x) a partir del producto del divisor (x - a) por el cociente C(x).

A la expresión: P(x) = (x - a) . C(x) también podemos escribirla así:

$$\frac{P(x)}{(x-a)} = C(x)$$

y se lee: P(x) es divisible por (x - a)

Cuando decimos "es divisible por", esta expresión nos asegura que **el resto de esa división es cero**.

Concluimos entonces que:

Si al realizar el cociente entre dos polinomios, obtenemos: $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = C(x)$ y el resto es cero, entonces P(x) es divisible por Q(x).

Este concepto matemático, que se vio en los números enteros, se llama: **divisibilidad**. La divisibilidad es una herramienta que nos será útil para factorizar polinomios, junto con el tema que sigue.

Hemos mencionado que las raíces (también llamados ceros de un polinomio), son los valores de x que, reemplazados en el polinomio, hacen que éste se anule o se iguale a cero. Cabe preguntarnos entonces: ¿Cuántas raíces tiene un polinomio dado?

Esta pregunta la contesta un teorema, cuya demostración necesita de conocimientos matemáticos más avanzados, que se llama:

Teorema fundamental del Álgebra.
Todo polinomio de grado n tiene n raíces (números reales o complejos, iguales o distintas).

¿Para qué nos interesa conocer los ceros o raíces de un polinomio?
- Para encontrar la expresión factorizada de un polinomio.
- Simplificar expresiones algebraicas.
- Para resolver ecuaciones cuyo grado es mayor o igual que 2.
- Para graficar una función, porque dichos valores son los valores de "x "para los cuales la gráfica de la función dada interseca el eje de las abscisas.

Si de un polinomio de grado n, conocemos sus n raíces:
x_1, x_2, K, x_n

siendo el coeficiente principal , podemos escribir su expresión factorizada como:

$$P(x) = a_n\ (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3).....(x - x_n)$$

Aplicamos este teorema en un ejemplo. Para ello, tendrá que completar lo que se pide:

Sea el polinomio $P(x) = ax^4 + bx + c$

a) El grado del polinomio es: ....

b) De acuerdo al teorema fundamental del álgebra tiene..... ceros o raíces que simbólicamente indicamos: .... , ..., ..., ...

c) El coeficiente del término principal es a_n = ...

Entonces, la expresión factorizada del polinomio, a partir del coeficiente del término principal y las raíces es:

$$P(x) = a\ (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)$$

La pregunta que surge naturalmente ahora es: ¿Cómo hallamos las raíces reales de un polinomio?

Analicemos este ejemplo, en el que también tendrá que completar algunas cosas:

Siendo $P(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 12$ un polinomio de grado......, de acuerdo al Teorema Fundamental del Álgebra, tendrá .... raíces.

Si conocemos que una de sus raíces: $x_1 = -2$, esto quiere decir que P(x) es divisible por (x - 2). Para calcular el cociente, ya que el divisor es (x - 2), podemos aplicar la regla de Ruffini.

Complete el cuadro y calcule los coeficientes:

	....	......	......	......
......		......	......	......
	......	......	......	......

El último valor que calculó, aplicando Ruffini es cero, de no ser así revise nuevamente. Si llegó a cero, entonces el polinomio cociente es: C(x) = ... y R(x) = ...

Por lo tanto, podemos expresar el polinomio P(x) como el producto del divisor por el cociente del siguiente modo:
$P(x) = (x - 2)\ (x^2 + 5x + 6)$

Al llegar a este paso decimos que P(x) es divisible por:
• (x - 2) y también por:
• $x^2 + 5x + 6$

Para encontrar las raíces restantes, es decir los valores de x que anulan al polinomio C(x), tendremos que volver a calcular las raíces del cociente obtenido:

$$C(x) = x^2 + 5x + 6$$

Calcular los ceros, significa igualar a cero este polinomio:

$$x^2 + 5x + 6 = 0$$

Obteniendo una ecuación de 2º grado completa cuyas raíces se calculan a partir de los coeficientes utilizando la siguiente fórmula:

$$x_{2,3} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Sustituyendo cada coeficientes por su valor: a = 1, b = 5 y c = 6 se obtiene:
$x_2 = -2$ y $x_3 = -3$

Así, la factorización del polinomio C(x) queda:

$$C(x) = x^2 + 5x + 6 = (x+2)(x+3).$$

Teniendo en cuenta la raíz anterior $x_1 = 2$, expresamos la factorización del polinomio P(x) del siguiente modo:

$$P(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = 1(x-2)(x+2)(x+3)$$

Concluimos que este polinomio es divisible por:

$$(x-2), (x+2) \text{ y } (x+3).$$

Ejercicio 169:

a) Escriba la expresión factorizada de un polinomio de grado 5 cuyo coeficiente principal es 2 y sus raíces son: $x_1 = x_2 = 3$, $x_3 = -2$, $x_4 = -1$ y $x_5 = 1$.

b) A partir de la expresión factorizada que encontró, escriba el polinomio correspondiente: ....

Polinomios primos

Recordamos que: al número 60 lo podemos escribir: 60 = 2.2. 3.5 = 22 . 3. 5 es decir, lo hemos expresado como producto de los factores 2, 3 y 5, ya que 60 es divisible por ellos. Decimos que 60 es número compuesto.

No sucede lo mismo con 61, ya que no es divisible por otros números que no sean él mismo y la unidad. A estos números se los llama números primos.

Con los polinomios sucede algo parecido, es decir, algunos de ellos se pueden factorizar y otros no. Decimos entonces:

Cuando a un polinomio de grado no nulo, no es posible expresarlo como producto de polinomios de grado menor, se dice que es un polinomio primo.

La factorización de un polinomio, conocidas sus raíces, no es la única forma de expresar un polinomio como un producto de polinomios primos.

Recordaremos otras maneras que son muy útiles cuando se trabaja con operaciones entre expresiones algebraicas enteras y fraccionarias, que son:

- Factor común
- Factor común por grupos de igual número de términos
- Trinomio cuadrado perfecto
- Cuatrinomio cubo perfecto
- Diferencia de cuadrados
- Suma o diferencia de potencias de igual grado

Factor común

Observe el polinomio: $P(x) = 2x^4 + 4x^2$

Podemos factorizarlo encontrando las raíces, pero también podemos extraer los factores comunes a ambos términos.

Para ello seguimos el siguiente procedimiento que consiste en:

- Calcular el mayor divisor común de los coeficientes.
- Identificar la variable x, con el menor exponente de todos los términos.

Volviendo al polinomio $P(x) = 2x^4 + 4x^2$ observamos que:

- 2 es el mayor divisor común de los coeficientes 2 y 4
- x^2 es el factor literal con menor exponente de los términos dados

Luego, el factor común es: $2\,x^2$

Si dividimos cada término del polinomio por el factor común obtenemos:

$$\frac{2x^4}{2x^2} = x^2 \quad \text{y} \quad \frac{4x^2}{2x^2} = 2$$

por lo tanto: $P(x) = 2x^4 + 4x^2 = 2x^2\,(x^2 + 2)$

¿Es posible verificar si esta factorización es correcta? ¿Qué propiedad debemos utilizar?

Dejamos esta inquietud para que la resuelva y verifique el resultado.

Complete la tabla, teniendo en cuenta las flechas señaladas:

Busque el factor común y factorice la expresión dada:

$10\,x + 15\,y$	$5\,(2x + 3y)$
....	$4\,xy\,(a\,b - a\,c + d)$
$6\,x\,y - 9\,x\,y^2 + 3x^2\,y$	$3\,xy$ (....................)
....	$-7\,p\,(\,2p^3 + p + 1)$
$\frac{1}{2}ab^2 + \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{8}ab^2$	$\frac{1}{2}a$ (...................)
....	$0{,}2\,z\,(\,x + 2y - 3z)$

Aplique la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma.

Ejercicio 170:

Extraiga el ó los factores comunes de:

a) $6a^4\,b^3 - 4a^5\,b^2 - 12a^3\,b^2 + 4a^4\,b^4 - 6a^3\,b^3$

b) $\frac{7}{3}m^6\,x^3\,y + 7\,m^5\,n\,x^2 + \frac{14}{5}m^2\,n^3\,x\,y$

Factor común por grupos

No siempre es posible factorizar un polinomio a partir del factor común. Sin embargo, hay polinomios que presentan una estructura que nos permite formar grupos, asociando, con el mismo número de términos y que presentan un factor común para cada uno de esos grupos.

$$a\,x + a\,y + b\,x + b\,y = a\,(x + y) + b(\,x + y)$$

Analicemos este ejemplo: (*)

$a\,x+a\,y+b\,x+b\,y$

En él es posible observar que los dos primeros términos tienen de común el factor a y los dos últimos, el factor b. Si asociamos los dos primeros y los dos últimos términos:

$a\,x+a\,y+b\,x+b\,y=(a\,x+a\,y)+(b\,x+b\,y)$

y luego, de cada paréntesis, extraemos el factor común, obtenemos :

$a\,x+a\,y+b\,x+b\,y=a\,(x+y)+b(\,x+y)$

Observamos que han quedado dos términos que tienen como factor común , entonces extraemos ese factor común:

$a\,x+a\,y+b\,x+b\,y=(x+y)\,(a+b)$

¿En este caso, existe una única forma de agrupar los términos?..........................

Intente otra agrupación. ¿obtiene finalmente la misma factorización?...............

Recuerde:

Los polinomios que se pueden factorizar de esta forma cumplen con el siguiente requisito:

• Los grupos de términos que tienen factores comunes deben tener el mismo número de términos.

Ejemplo:

Analicemos el siguiente polinomio:

$P(x)=2x^3+2x^2-x-1$

Para factorizarlo, podemos agrupar los dos primeros términos y los dos segundos. ¡Cuidado con el paréntesis!

Analice en cuál de las expresiones siguientes es incorrecto el agrupamiento:

$2x^3+2x^2-x-1=2x^2(x+1)-(x-1)$

$2x^3+2x^2-x-1=2x^2(x+1)+(-x-1)$

$2x^3+2x^2-x-1=2x^2(x+1)-(x+1)$

Seguramente coincidimos que el primero, ya que al sacar los paréntesis, la expresión que se obtiene no es equivalente a la dada.

(*) La expresión de cuatro términos ha quedado factorizada como un producto de dos factores.

Cometer este error es muy común. Recuerde que el signo negativo que precede un paréntesis indica que al eliminarlo, cambia el signo de los términos que encierra el mismo. Esta condición no se cumple en el primer caso. Pero para la factorización nos interesa la tercera propuesta, ya que admite sacar factor común la expresión (x + 1).

Resulta entonces que:

$$2x^3+2x^2-x-1=2x^2(x+1)-(x+1)$$
$$2x^3+2x^2-x-1=(2x^2-1)(x+1)$$

> Recuerde que:
> • - a - b = - (a + b)
> • - a + b = - (a - b)

Ejercicio 171:
Factorice las siguientes expresiones:

a) $6am-4ac-3bm+2bc$
b) $abc+mnt-mc-abnt$
c) $6x^2+10ax+15x+25a$
d) $6a^4-4a^2-12a^3+8a$
e) $2x^6+2x^4+3x^2+3$

Trinomio cuadrado perfecto

¿Recuerda el resultado de $(x+a)^2$?...

La expresión que se obtiene se denomina trinomio cuadrado perfecto, que factorizada, es el cuadrado de un binomio.

Un trinomio cuadrado perfecto consta de .... términos, que cumplen las siguientes condiciones:

a) Dos de los términos son cuadrados.

b) Un término que es el doble del producto de las bases de los cuadrados.

El cuadrado de un binomio es el producto del binomio por sí mismo y si aplicamos la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma, obtenemos:

$$(a+b)^2=(a+b)(a+b)=a.a+a\,b+ba+bb=a^2+2a\,b+b^2$$

$(a + b)^2$	=	$a^2 + 2\,ab + b^2$
Cuadrado de un binomio		Trinomio cuadrado perfecto

Observe los siguientes ejemplos:

Ejemplos

• El trinomio $25\,x^2 + 10\,x\,y^2 + y^4$ es un trinomio cuadrado perfecto porque:
a) El primer término es el cuadrado de5x ya que: $(5x)^2 = 25\,x^2$

b) El tercer término es el cuadrado de y^2 ya que: $(y^2)^2 = y^4$

c) El segundo término es el doble producto de las bases de esos cuadrados, es decir: $2 \,.\, 5\,x\,y^2 = 10\,x\,y^2$

Luego, el trinomio cuadrado perfecto dado se factoriza:

$25\,x^2 + 10\,x\,y^2 + y^4 = (5\,x + y^2)^2$

• El trinomio, $(9 - 6x + x^2)$ se puede factorizar de dos maneras:

$$9 - 6x + x^2 = (3 - x)^2$$
$$9 - 6x + x^2 = (x - 3)^2$$

> Nota: Siempre que el término del doble producto aparezca con signo negativo, en el trinomio cuadrado perfecto, podemos factorizarlo de las dos maneras.

Ejercicio 172:
Complete la siguiente tabla:

Desarrolle el cuadrado de un binomio

$(3x+1)^2$	....
....	$x^2 + 6x + 9$
$(0{,}5a - 0{,}3)^2$	....
....	$25a^2 - 70\,a\,b + 49b^2$

Escriba el cuadrado de un binomio

Ejercicio 173:
Factorice las siguientes expresiones:

a) $x^2 y^4 + \frac{1}{4} - x y^2$

b) $\frac{9}{25} x^6 + \frac{12}{5} x^3 y^2 + 4 y^4$

Cuatrinomio cubo perfecto

¿Recuerda el resultado al realizar $(x + a)^3$?..

La expresión obtenida se denomina cuatrinomio cubo perfecto, que factorizada es el cubo de un binomio.

Un cuatrinomio cubo perfecto de la forma $x^3 + 3\,x^2\,a + a^3$ consta de........ términos que cumplen las siguientes condiciones:

a) Dos de los términos son cubos: x^3 y a^3

b) Un tercer término $3\,x^2\,a$, es el triple del cuadrado de la base del primer término por el segundo término.

c) El cuarto término $3\,xa^2$, es el triple de la base del primer término por el cuadrado de la base del segundo.

Para desarrollar el cubo de un binomio, desarrollamos primero el cuadrado y luego multiplicamos la expresión que obtuvimos por el binomio original:

$$(a+b)^3 = (a+b)^2\,(a+b) = (\,a^2 + 2a\,b + b^2)(a+b)$$
$$= a^3 + a^2\,b + 2a^2\,b + 2ab^2 + ab^2 + b^3$$
$$\underbrace{(a+b)^3}_{\text{Cubo de un binomio}} = \underbrace{a^3 + 3a^2\,b + 3ab^2 + b^3}_{\text{Cuatrinomio cubo perfecto}}$$

> Nota: Recuerde que:
> $(a - b)^3 = [a + (-b)]^3 = a^3 + 3a^2\,(-b) + 3a\,(-b)^2 + (-b)^3 = a^3 - 3a^2\,b + 3\,ab^2 - b^3$

Ejemplo:

• El polinomio $x^3+6x^2y+12xy^2+8y^3$ es un cuatrinomio cubo perfecto porque:

$x^3=(x)^3$ $\qquad$ $6x^2y=3(x)^2\,2y$

$8y^3=(2y)^3$ $\qquad$ $12xy^2=3\,x(2y)^2$

Luego este cuatrinomio cubo perfecto se factoriza:

$$x^3+6x^2y+12xy^2+8y^3=(x+2y)^3$$

Ejercicio 174:
Complete la siguiente tabla:

Desarrolle el cubo de un binomio.

$(3x+1)^3$	…………………
…………………	$x^3-\frac{3}{2}x^2y+\frac{3}{4}xy^2-\frac{1}{8}y^3$
$(mp^2-p)^3$	…………………

Escriba el cubo de un binomio.

Ejercicio 175:
Factorice las siguientes expresiones:

a) $8a^3+36a^2b+54ab^2+27b^3$

b) $x^3-\frac{3}{5}x^2+\frac{3}{25}x-\frac{1}{125}$

Diferencia de cuadrados

Complete con la expresión correspondiente: (a + b) (a - b) = ………………… ?

Aplicando propiedad distributiva, obtenemos:

$$(a+b)(a-b)=a^2-a\,b+b\,a-b^2=a^2-b^2$$

Luego, por la propiedad simétrica de la igualdad:

$$\underbrace{a^2 - b^2}_{\text{Diferencia de cuadrados}} = \underbrace{(a+b)(a-b)}_{\text{Producto de la suma por la diferencia de las bases}}$$

Ejercicio 176:
Escriba las siguientes expresiones como producto de una suma por una diferencia:

a) $16y^2 - x^4 =$ ....

b) $1 - m^2 n^4 p^6 =$ ....

Suma o diferencia de potencias de igual grado

Los siguientes polinomios son particularmente binomios que presentan la siguiente expresión:

$P(x) = x^n + a^n$ ó $P(x) = x^n - a^n$
siendo n un número natural

Para factorizarlos es de suma importancia tener presente dos propiedades que son:

• Todo polinomio de grado n tiene n raíces (números reales o complejas, iguales o distintas).

• Si de un polinomio de grado n conocemos sus n raíces: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$. (siendo el coeficiente principal a_n), podemos escribir su expresión factorizada:

$$P(x) = a_n\,(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3).....(x - x_n)$$

Para llevar a cabo la factorización utilizaremos dos conceptos:

• Estas expresiones son divisibles por un binomio de la forma (x - a) siempre que a sea un cero o raíz del polinomio dado. Luego: P(x) = (x - a) C(x)

• La regla de Ruffini para calcular los coeficientes de C(x) y verificar si efectivamente el valor hallado para a es un cero del polinomio.

Debemos averiguar si $x_n + a_n$ ó $x_n - a_n$ son divisibles por (x + a) ó (x - a).

En ambos casos, la divisibilidad depende si el exponente n (número natural) es par o impar.

Ya que estamos trabajando con división de polinomios, siendo el divisor un binomio de primer grado en x podemos aplicar el Teorema del Resto. Si es divisible, el resto será cero y podremos factorizar como:

$$x^n \pm a^n = (x \pm a)C(x)$$

A continuación analizaremos algunos ejemplos particularizando si el grado es un número natural par o impar. Para ello comprobaremos que las siguientes divisiones son exactas aplicando el teorema del resto y calcularemos el cociente aplicando regla de Ruffini.

• Si se tiene suma de potencias del mismo exponente n, siendo n es impar

$$(x^3 + 27) : (x+3) = (x^3 + 3^3):(x+3)$$

• Aplicando el teorema del resto para x = -3 resulta: $(-3)^3 + 3^3 = 0$ y la división es exacta. Resolviendo la división con la regla de Ruffini, obtenemos el cociente:

$$(x^3 + 27) : (x+3) = x^2 - 3x + 9$$

Utilizamos en la igualdad el algoritmo de la división y de esta forma obtenemos la expresión factorizada

$$(x^3 + 27) = (x+3)(x^2 - 3x + 9)$$

• Si se tiene resta de potencias del mismo exponente n, siendo n es impar

$$(x^5 - 32) : (x-2) = (x^5 - 2^5):(x-2)$$

Aplicando el teorema del resto para x = 2 resulta: $2^5 - 2^2 = 0$ y la división es exacta. Aplicando regla de Ruffini obtenemos el cociente:

$$(x^5 - 32) : (x-2) = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16 \quad (2)$$

(2) Utilizamos en la igualdad el algoritmo de la división. Así obtenemos:

$$(x^5 - 32) = (x-2)(x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16)$$

• Si se tiene suma de potencias del mismo exponente n, siendo n es par

$$(x^6 + 64) : (x \pm 2) = (x^6 + 2^6) : (x \pm 2)$$

Aplicando el teorema del resto:

Si x = -2 resulta: $(-2)^6 + 2^6 = 128$ la división no es exacta.

Si x = 2 resulta: $2^6 + 2^6 = 128$ la división no es exacta.

Conclusión:
Si se presenta una suma de dos potencias de grado par, no es divisible por la suma ni por la diferencia de las bases.

• Si se tiene resta de potencias del mismo exponente n, siendo n es par

$$(x^4 - 16) : (x+2) = (x^4 - 2^4) : \ (x+2)$$

Aplicando el teorema del resto para $x = -2$ resulta: $(-2)^4 - 2^4 = 0$, es decir que la división es exacta y el cociente es $C(x) = x^3 - 2x^2 + 4x - 8$.

Usando el algoritmo de la división, se tiene:

$$\left(x^4 - 16\right) = \left(x+2\right)\left(x^3 + 2x^2 + 4x + 8\right)$$

También $(x^4 - 16) : (x-2) = (x^4 - 2^4) : \ (x-2)$

Aplicando el teorema del resto para $x = 2$ resulta: $2^4 - 2^4 = 0$, es decir que la división es exacta y el cociente es: $C(x) = x^3 + 2x^2 + 4x + 8$

Usando el algoritmo de la división, se tiene

$$\left(x^4 - 16\right) = \left(x-2\right)\left(x^3 + 2x^2 + 4x + 8\right)$$

Pero en ambos casos, si se analiza el segundo factor, se verá que el proceso de factorizar no está terminado, pues el segundo factor también es factorizable por el segundo caso de factoreo:

$$x^3 - 2x^2 + 4x - 8 = (x^3 - 2x^2) + (4x - 8) = x^2\,(x-2) + 4\,(x-2) = (x^2+4)(x-2)$$

Obtenemos entonces:

$$(x^4 - 16) = (x^2 + 4)\ (x-2)\ (x+2)$$

Nota:
Puede ocurrir que los casos de factorización aparezcan combinados:

a) $3x + 3x^2 + \dfrac{3}{4} = 3\left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2$ (factor común y trinomio cuadrado perfecto)

b) $b^3 - b + 1 - b^2 = (b^2 - 1)\ (b-1)$ (factor común por grupos y diferencia de cuadrados)

Ejercicio 177:
Complete la siguiente tabla:

Escriba como el producto de la suma por la diferencia de las bases

$\frac{1}{9}x^4 - 0.25$	....
....	$(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})$
$\frac{1}{25}a^2 - 0.01$	....

Escriba como una diferencia de cuadrados

Ejercicio 178:
Complete lo siguiente:

a) $(x-a)(x^2+xa+a^2)$ es la factorización de: ....

b) (x^3+27) factorizado es igual a: ....

c) $(x^2+4)(x-2)(x+2)$ es la factorización de..

d) (x^5-243) factorizado es ....

A continuación mencionamos los pasos generales a tener en cuenta para la factorización de polinomios:

1º Sacar factor común si es posible.
2º Si el polinomio no queda totalmente factorizado, se aplica alguno de los otros casos analizados o el método de las raíces.

Para utilizar el método de la factorización a partir de los ceros o raíces reales del polinomio tenemos en cuenta:

a) Calcular alguna raíz entera a partir de los divisores enteros del término independiente.
b) Verificar si los divisores son raíces del polinomio utilizando el teorema del resto.
c) Calcular el cociente C(x) entre P(x) y el divisor (x -a) utilizando la Regla de Ruffini, de modo que: P(x) = (x - a) C(x)
d) Se repite lo realizado en el punto c) en caso de que C(x) sea.

Ejercicio 179:
Realice las siguientes factorizaciones a partir de los ceros:

a) $4x - 1 =$.................................

b) $x^2 - 2x - 3 =$.................................

c) $27x^3 + 8 =$.................................

Máximo común divisor y mínimo común múltiplo

Una aplicación útil de la factorización de polinomios es calcular, para dos polinomios, el mínimo común múltiplo o múltiplo común menor, mcm(P(x), Q(x)); y el máximo común divisor mcd(P(x), Q(x)) , los que a su vez permitirán trabajar con funciones racionales.

Estos conceptos los vimos en el módulo de números reales. Si tiene alguna duda respecto de ellos, repase antes de continuar.

> El máximo común divisor de dos o más polinomios, mcd (P(x), Q(x)), es el polinomio de grado máximo que sea divisor de todos los polinomios dados.
>
> El mínimo común múltiplo de dos o más polinomios es el polinomio de grado mínimo que sea múltiplo de todos ellos.

Pasos para el cálculo del máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de dos o más polinomios:

a) Se factorizan los polinomios dados.

b) El máximo común divisor es el producto de los factores comunes a los polinomios dados, elevados a su menor exponente con que aparezcan en una de las factorizaciones de los polinomios.

c) El mínimo común múltiplo es el producto de los factores comunes y no comunes a los polinomios dados, elevados a su mayor exponente con que aparezcan en una de las factorizaciones de los polinomios.

Ejemplo:

Calcularemos el mcd y el mcm de los polinomios:

$$P_1(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2x - 3 \qquad P_2(x) = x^4 - 1 \qquad P_3(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$$

Primero factorizaremos cada polinomio. Le proponemos que analice y escriba para cada polinomio el/los casos de factoreo utilizados:

a) $2x^3-3x^2+2x-3 = 2x(x^2+1)-3(x^2+1) = (x^2+1)(2x-3)$

b) $x^4-1=(x^2-1)(x^2+1)=(x-1)(x+1)(x^2+1)$

c) $x^3-2x^2+x-2 = x^2(x-2)+(x-2) = (x^2+1)(x-2)$

Es importante tener en cuenta que:

• El mcd de dos o más polinomios debe dividir en forma exacta (con resto cero) a todos ellos, por lo tanto es el producto de los factores comunes con su menor exponente.

En nuestro caso es mcd $(P_1(x), P_2(x), P_3(x)) = x^2+1$.

• El mcm de dos o más polinomios es el polinomio de menor grado que es divisible por todos los polinomios. Por ello se obtiene multiplicando los factores comunes y no comunes con su mayor exponente.

En nuestro ejemplo es: $mcm(P_1(x), P_2(x), P_3(x))=(x^2+1)(2x-3)(x-1)(x+1)(x-2)$.

Ejercicio 180:
Calcule el mcd y el mcm de las siguientes ternas de polinomios:

a) $P_1(x)=axm^2+2axmn+axn^2 \quad P_2(x)=a^3xm+a^3xn \quad P_3(x)=2ax^2$

b) $Q_1(x)=x^4-x \qquad Q_2(x)=x^2-2x+1 \qquad Q_3(x)\ 2x^2-2$

c) $R_1(x)=2x^3-3x^2+2x-3 \quad R_2(x)=x^4-1 \quad R_3(x)=x^3-2x^2+x-2$

Ejercicio 181:
¿Las siguientes expresiones son iguales o distintas?

a) $(m+n)^2$ y $(-m-n)^2$

b) $(m-n)^2$ y $(n-m)^2$

c) $(m+n)^2$ y m^2+n^2

Ejercicio 182:
Complete el polinomio T(x) para que sea trinomio cuadrado perfecto:

a) $T(x)=16x^4+\ldots\ldots\ldots\ldots+25=(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)^2$

b) $T(x)=49x^6-70x^3+\ldots\ldots\ldots=(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)^2$

c) $T(x)=\ldots\ldots\ldots\ldots-30x\ldots\ldots\ldots\ldots=(\ldots\ldots-5)^2$

Ejercicio 183:
Complete S(x) para que sea cuatrinomio cubo perfecto:

$S(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots - 12x^2 \ldots\ldots\ldots\ldots = (4 - \ldots\ldots)^3$

Ejercicio 184:
Factorice hasta llegar a la mínima expresión:

a) $4axn - 6\,bnx - 10nxy + 2axn =$

b) $4axn - 6\,bnx - 10nxy + 2axn =$

c) $3x^3 + 6\;x^2 + 5x + 10 =$

d) $4x^4 + 1/16 - x^2 =$

e) $a^4 x^6 - 49 =$

f) $-x^2 + 100 =$

g) $2x^3 - 3\,x^2 - 8x + 12 =$

h) $8x^3 - 4x^2 + \frac{2}{3}\;x - \frac{1}{27} =$

i) $312x^5 + 1 =$

j) $x^6 - 729 =$

Ejercicio 185:
Complete con el resultado:

a) $P(x) = x^3 \;- 7x + 6$ es equivalente a: ....

b) La expresión factorizada del polinomio $P(x) = 2x^2 + 3x - 5$ es: ....

c) ¿El polinomio $3x^3 + 6x^2 - 24x = (x^2 + 4x)(3x - 6)$ admite otra factorización?

d) Si los factores de un polinomio son (x -2y) (3x -5y) encuentre el polinomio. ¿Qué propiedad aplicó?

e) Si sabemos que un factor del polinomio $x^4 - 7x - 3$ es x - 2, encuentre el otro factor.

f) Si factorizamos un polinomio completo de segundo grado $P(x) = ax^2+bx+c$ ¿cuál será el signo entre los términos los factores binomiales en cada caso? Escriba el polinomio correspondiente:

a) $a>0, b>0$ y $c<0$

b) $a>0, b<0$ y $c>0$

c) $a>0, b>0$ y $c>0$

d) $a>0, b<0$ y $c<0$

Expresiones racionales fraccionarias

Dados dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ donde $Q(x)\neq 0$, la expresión $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ es una *expresión racional fraccionaria.*
Es decir, es un cociente de dos polinomios. También se las conoce como fracciones algebraicas.
Como por ejemplo:

a) $\dfrac{3x+y}{x-2}$ b) $\dfrac{a+b^2}{x+y^3}$ c) $\dfrac{2ab}{3b-a}$

Las fracciones algebraicas se comportan como las fracciones numéricas, es decir, podemos simplificarlas, sumarlas, restarlas, multiplicarlas y dividirlas.

Simplificación

Cuando se trabaja con fracciones algebraicas, la simplificación consiste en factorizar el numerador y denominador con el objeto de eliminar los factores comunes que existan en ellos.

Este procedimiento se repite hasta que los dos polinomios resulten primos entre sí. En este caso, decimos que la fracción está reducida a su más simple expresión y recibe el nombre de irreducible.

Antes de comenzar a simplificar hay que tener en cuenta que se deben excluir los valores de x que anulan el denominador de la expresión que se simplifica.

Ejemplos:

$\dfrac{x+3}{x^2-9}$ *para* $x\neq\pm 3$

Si observa el numerador, no es posible factorizarlo, pero en cambio el denominador es una diferencia de cuadrados, luego:

$x^2-9=(x-3)(x+3)$

Reemplazando en la expresión fraccionaria y simplificando los factores iguales del numerador y denominador resulta:

$$\frac{(x+3)}{(x^2-9)}=\frac{(x+3)}{(x+3).(x-3)}=\frac{1}{(x-3)}$$

La expresión simplificada de $\frac{x+3}{x^2-9}$ para $x \neq \pm 3$ es: $\frac{1}{x-3}$

b) $\frac{-4x+4}{x^2+x-2}$

Observamos que:

En el numerador se repite el factor 4 en cada término, entonces la expresión factorizada es: - 4(x -1)

El denominador es un trinomio cuadrado, pero no es perfecto. Por lo que tendremos que calcular los ceros del polinomio. Es decir, hacemos:

$$x^2+x-2=0$$

Podemos calcular los posibles ceros, buscando los divisores del término independiente o bien resolviendo la ecuación de segundo grado.

Entonces, de los divisores hallados los que anulan al divisor son: .... Resultando entonces el denominador:

$$x^2+x-2=(x+2).(x-1)$$

Reemplazando las factorizaciones realizadas en el numerador y denominador:

$$\frac{-4x+4}{x^2+x-2}=\frac{-4(x-1)}{(x+2)(x-1)}$$

y simplificando factores iguales del numerador y denominador obtenemos:

$$\frac{-4x+4}{x^2+x-2}=\frac{-4\ (x-1)}{(x+2)\ (x-1)}=\frac{-4}{(x+2)}$$

Resultando la expresión simplificada de $\frac{-4x+4}{x^2+x-2}$ para $x \neq -2$ y $x \neq 1$, $\frac{-4}{(x+2)}$

Ejercicio 64:

Factoriza y simplifica las siguientes expresiones:

a) $\frac{4x^3-16x}{x^3-6x^2+12x-8}$ b) $\frac{3x^2-27}{x^4-81}$

Suma y resta

Para suma y/o restar expresiones fraccionarias es necesario que todas presenten el mismo denominador.

De no ser así, antes de operar deberá buscarse expresiones equivalentes con el mismo denominador. Este común denominador de los términos dados es conveniente que sea el mínimo común múltiplo de los denominadores dados.

Ejemplo:

Dada la siguiente expresión, calcularemos su suma algebraica :

$$\frac{x+2}{1-x^2}-\frac{1}{1-x}+\frac{1}{x+x^2} \quad con \; x \notin \{1,-1,0\}$$

Aplicamos el procedimiento:

1. Se calcula el mcm de sus denominadores al que llamaremos mínimo común denominador:

$$\left.\begin{array}{l} P(x)=(1-x)^2=(1-x)\,(1+x) \\ Q(x)=(x+x^2)=x\,(1+x) \end{array}\right\} \mathrm{mcm}(P(x),Q(x))=(1+x)(1-x)x$$

2. Se divide el mínimo común múltiplo encontrado por cada uno de los denominadores y el resultado de cada cociente se multiplica por el numerador correspondiente:

$$\frac{(x+2)}{(1+x)(1-x)}-\frac{1}{1-x}+\frac{1}{x(1+x)}=\frac{x(x+2)-(1+x)x+(1-x)}{(1+x)(1-x)x}=$$

3. Se realizan las operaciones que han quedado indicadas en el numerador:

$$\frac{x\,(x+2)-(1+x)\;x+(1-x)}{(1+x)(1-x)\,x}=\frac{x^2+2\;x-x-x^2+1-x}{(1+x)(1-x)\,x}=$$

4. Luego se escribe el resultado de la operación que será la fracción algebraica que tiene como numerador la expresión obtenida en el paso (3) y como denominador el mínimo común múltiplo encontrado en el paso (1). Si es posible se factoriza el numerador para simplificarlo con factores del denominador, o se cancelan términos semejantes hasta que la fracción sea irreducible:

$$\boxed{\frac{x^2+2\;x-x-x^2+1-x}{(1+x)(1-x)\,x}=\frac{1}{(1-x)(1+x)\,x}}$$

Ejercicio 186:
Resuelva las operaciones indicadas:

a) $\dfrac{x+2}{4-x^2}-\dfrac{1}{x}-\dfrac{x^2}{2x+x^2}$

b) $\dfrac{y^2}{(y-x)^2}-\dfrac{y+x}{y-x}$

Multiplicación de fracciones algebraicas

> El producto de dos o más expresiones fraccionarias es otra expresión fraccionaria cuyo numerador se obtiene de la multiplicación de los numeradores, y cuyo denominador resulta de multiplicar los denominadores

Para hacer más sencillo este cálculo es práctico llevar a cada una de las expresiones fraccionarias a su expresión irreducible mediante la factorización y simplificación para luego obtener el resultado.

Ejemplo:

$$\frac{(x^3+8)}{(x+2)}\cdot\frac{(x+1)}{(x^2-2x+4)}\,\frac{1}{(x-1)}=$$

$$\frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{(x+2)}\cdot\frac{(x+1)}{(x^2-2x+4)}\cdot\frac{1}{(x+1)}=$$

$$\frac{x+1}{x-1}$$

División

Resuelva la división siguiente, pero sin utilizar la calculadora.

$\dfrac{10}{9}:\dfrac{5}{3}=$

Si usted lo hizo correctamente, el cociente es 2/3 y para llegar al resultado debe haber multiplicado la primera fracción (dividendo), por el inverso multiplicativo de la segunda fracción (divisor). Luego debe haber simplificado y realizado la multiplicación.

Del mismo modo se realiza la división entre expresiones algebraicas fraccionarias.

La división entre expresiones fraccionarias es otra expresión hallada:
I. Factorizando las expresiones algebraicas dividendo y divisor;
II. Multiplicando al dividendo por el inverso de la expresión fraccionaria divisor
III. Simplificando (si fuera posible)
IV. Realizando la multiplicación indicada.

Analicemos el siguiente cálculo:

$$\frac{X+2}{2-X}:\frac{X^3+8}{X^2-4}$$

Para calcular el cociente, multiplicamos la fracción dividendo por la fracción recíproca del divisor:

$$\frac{X+2}{2-X}:\frac{X^3+8}{X^2-4}=\frac{X+2}{2-X}.\frac{X^2-4}{X^3+8}$$

Al observar el producto de las dos fracciones vemos que no es posible simplificar factores. Pero, al analizar la segunda fracción visualizamos que es posible factorizarlos ya que, el numerador es una diferencia de cuadrados y el denominador es una suma de potencias de igual grado:

Obtenemos la expresión factorizada:

$$\frac{X+2}{2-X}:\frac{X^3+8}{X^2-4}=\frac{(x+2)}{2-x}\cdot\frac{(x-2)(x+2)}{(x+2)(x^2-2x+4)}$$

Simplificando factores comunes:

$$\frac{X+2}{2-X}:\frac{X^3+8}{X^2-4}=\frac{1}{2-x}\cdot\frac{(x-2)(x+2)}{(x^2-2x+4)}$$

Al analizar la expresión obtenida, vemos los factores y , en el que uno es el opuesto del otro. Pero, al sacar factor común -1 en cualquiera de las dos expresiones resulta:

$$\frac{X+2}{2-X}:\frac{X^3+8}{X^2-4}=\frac{1}{-1(-2+x)}\cdot\frac{(x-2)(x+2)}{(x^2-2x+4)}$$

Y simplificando, obtenemos:

$$\frac{x+2}{2-x}:\frac{x^3+8}{x^2-4}=-\frac{(x+2)}{(x^2-2x+4)}$$

Ejercicio 66:
Factorice y simplifique las siguientes expresiones:

a) $\dfrac{x^2+2x+1}{x^3+1}$

b) $\dfrac{a^2m^2+2m^2xa+x^2m^2}{2am^2+2m^2x}$

Ejercicio 187:
Efectúe las siguientes operaciones:
Nota: debe aclarar que el factor por el cual se divide, es distinto de cero.

a) $\dfrac{x+5}{x^2-25}+\dfrac{x+2}{2x^2-6x-20}-\dfrac{21}{2x+2}$

b) $\dfrac{y^2}{(y-x)^2}-\dfrac{y+x}{y-x}$

c) $\dfrac{y^2}{yx-y}\cdot\dfrac{3x^2-3x}{y}$

d) $\dfrac{x^4-y^4}{x^3+y^3}:\dfrac{x^2+y^2}{(x-y)^2+xy}$

e) $\dfrac{a^2-6a+9}{(a+3)^2}:\dfrac{a^3-3a^2}{a^2-9}$

f) $\dfrac{1}{2x-2}+\dfrac{4x-3}{x^2-1}-\dfrac{x-1}{x^2-2x+1}$

g) $\dfrac{2x-4}{2x-10}+\dfrac{x^2+5x}{x^2+10x+25}-\dfrac{6x}{x^2-25}$

h) $\dfrac{3x^2+6x}{2x^3}\cdot\dfrac{x^2+8x+16}{x^4-16}\cdot\dfrac{2x^3-4x^2}{3x+12}$

i) $\dfrac{x^2-x-12}{x^4-64x}+\dfrac{x^2+3x+13}{x^3+4x^2+16x}$

Ejercicio 188:
A continuación encontrará enunciados que deberá leer con atención. Debajo de cada pregunta hay opciones de las cuales sólo una es la correcta. Marque con un círculo la respuesta correcta.

1) La expresión $\dfrac{4-x^2}{2x^2+2+x^3+x}\cdot\dfrac{x^2+1}{4-2x}$, factorizada y simplificada es igual a:

2-x   2+x   2   0,5   Ninguna

2) Al resolver y simplificar $\dfrac{1-3z^{-1}}{1-2z^{-1}-3z^{-2}}$ obtenemos:

$z\,(z-3)^{-1}$ $z\,(z+1)^{-1}$ $-z\,(z-3)^{-1}$ $(z-3)/z$ Ninguna