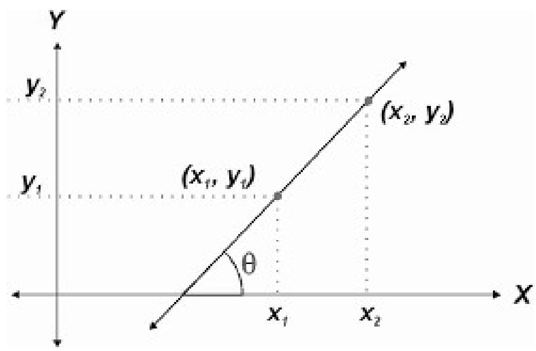
UNIDAD N°3

"Ecuaciones, rectas y parábolas"



El material que compone estas notas ha sido elaborado por las profesoras Estrellita Sobisch y Gisela Fitt; y revisado por el Coordinador del ingreso, Prof. Juan Manuel Lopez

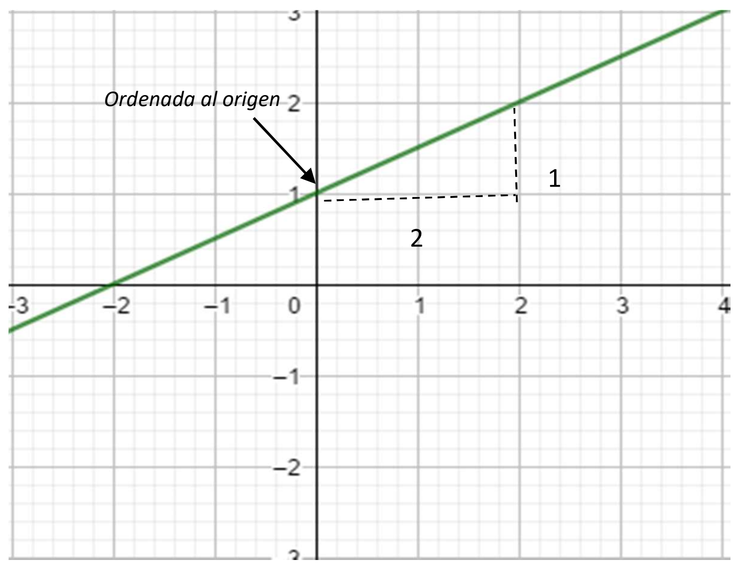
La finalidad de este es brindarles a todos los estudiantes que cursen el módulo de Matemática, del curso de Ingreso de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Nacional de Cuyo, (o cualquier otro curso de Ingreso a la Universidad), la posibilidad de revisar conceptos y habilidades de la disciplina adquiridos en el nivel medio y que son necesarios para poder cursar exitosamente las materias del Ciclo Básico.

Para el mismo se utilizaron las notas de clases de los docentes y como bibliografía principal, la indicada al final del apunte.

Función Lineal – Afín

Una expresión f de la forma $f(x) = mx + n$ denomina a una ***función afín*** *(o también polinómica de primer grado)* porque su gráfica es la de la ecuación $y = mx + n$, que representa una recta con pendiente m y ordenada al origen n.
Ejemplo:

$$f(x) = \frac{1}{2}x + 1$$



Observaciones:

$f(x) = mx + n$ → **Función Afín**

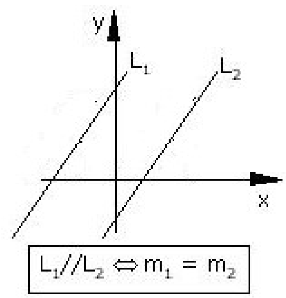
Las gráficas de las funciones afines **NO** necesariamente pasan por el origen ya que n puede tomar cualquier valor real

$f(x) = mx$ → **Función Lineal**

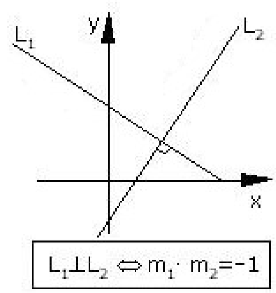
La gráfica de las funciones lineales pasan por el origen ya que $n = 0$.

Rectas paralelas y perpendiculares

- Dadas dos rectas $L_1(x) = m_1x + n_1$ y $L(x) = m_2x + n_2$, se dice que son ***paralelas*** cuando sus pendientes son iguales, es decir, $m_1 = m_2$.



- Dadas dos rectas, $L_1(x) = m_1x + n_1$ y $L_2(x) = m_2x + n_2$,se dice que son ***perpendiculares*** cuando sus pendientes son opuestas e inversas, es decir: $m_1 . m_2 = -1$, $m_2 = -\frac{1}{m_1}$



Ecuaciones de la recta

Dos puntos en el plano $P\ (P\ (x_1, y_1)\ )$ y $Q(x_2, y_2)$, determinan una única recta. Si queremos encontrar la ecuación de la recta que pase por esos puntos, podemos utilizar las siguientes ecuaciones:

- Si no conocemos su pendiente: $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} . (\ x - x_1)$.
- Si conocemos su pendiente: $y - y_1 = m . (\ x - x_1)$.

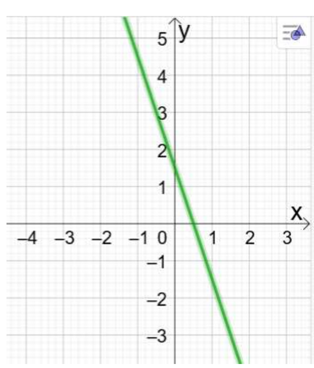
Ejercicio N° 1: Dadas las siguientes rectas,

$$y_1 = -\frac{5}{2}x - 2$$
$$y_2 = 2x + 3$$
$$y_3 = \frac{5}{3}x$$
$$y_4 = -x + 4$$
$$y_5 = -3x + \frac{3}{2}$$
$$y_6 = x - \frac{1}{2}$$

a. Represente gráficamente cada una de ellas.
b. Encuentre de forma analítica el cero y la ordenada al origen de cada función.
c. Halle la ecuación de una recta paralela y otra perpendicular en cada caso. Represente gráficamente.
d. Encuentre para cada recta, la paralela que pasa por el punto P de coordenadas $(-1, 5)$ y la perpendicular que pasa por el punto Q de coordenadas $(3, -2)$

Analizamos la $y_5 = -3x + \frac{3}{2}$**,** para que puedas guiarte en las resoluciones de otras funciones.

a) Para graficar rectas, basta con graficar dos puntos, por lo tanto si marcamos la ordenada al origen $n = 3/2$ en el eje de las ordenadas (eje y) y a partir de ella analizamos la pendiente que es $m = -3$ tenemos que trasladarnos verticalmente 3 unidades hacia abajo y trasladarnos horizontalmente 1 unidad a la derecha. De esa forma tendremos dos puntos que determinan la recta $y_5 = -3x + \frac{3}{2}$.



b)

Cero: $-3x + \frac{3}{2} = 0$

$$-3x + \frac{3}{2} - \frac{3}{2} = 0 - \frac{3}{2}$$

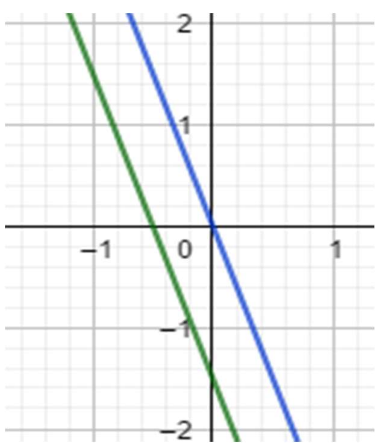
$$-3x = -\frac{3}{2}$$

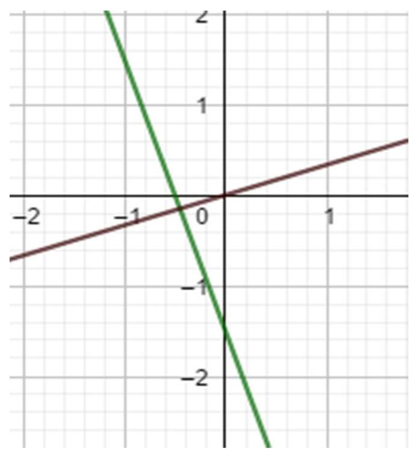
$$-3x.(-\frac{1}{3}) = -\frac{3}{2}.(-\frac{1}{3})$$

$$x = \frac{1}{2}$$

c) Si tenemos en cuenta la teoría sobre rectas paralelas, elegimos una expresión que tenga la misma pendiente, podemos decir que una recta paralela puede ser: $y = -3x$

Si tenemos en cuenta la teoría sobre rectas perpendiculares, elegimos una expresión que tenga la pendiente opuesta y recíproca, podemos decir que una recta perpendicular puede ser: $y = \frac{1}{3}x$





d) Si utilizamos la expresión de la ecuación de la recta conociendo la pendiente y como debemos encontrar la paralela que pase por $P\ (-1, 5)$ realizamos:

$y - 5 = -3.[\,x - (-1)]$ sustituimos el punto en la expresión y la misma pendiente.

$y - 5 = -3.(x + 1)$ arreglamos convenientemente el SM, aplicamos propiedad distributiva SM.

$y - 5 + 5 = -3x - 3 + 5$ sumamos ambos miembros el opuesto de -5.

$y = 3x + 2$ Ecuación de la recta paralela.

Si utilizamos la expresión de la ecuación de la recta conociendo la pendiente y como debemos encontrar la perpendicular, (utilizamos la pendiente opuesta y recíproca), que pase por $Q\ (3, -2)$, realizamos:

$y - (-2) = \frac{1}{3} \cdot (x - 3)$ sustituimos el punto en la expresión y la pendiente opuesta y recíproca.

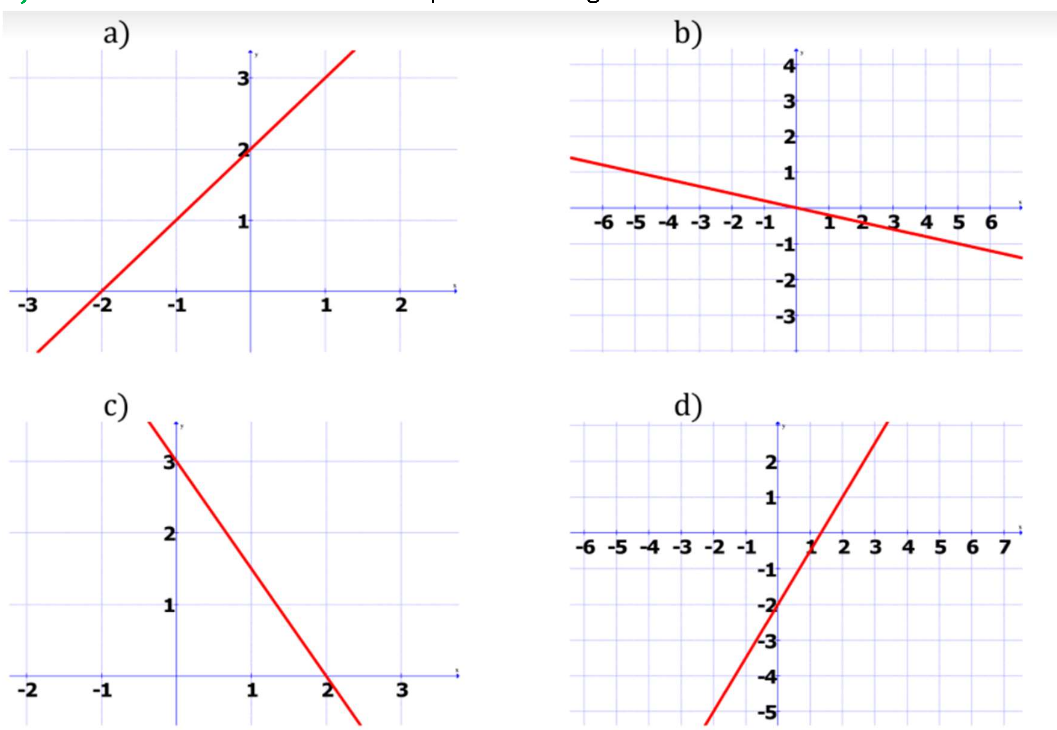
$y + 2 = \frac{1}{3}\, x - 1$ arreglamos conveniente el PM aplicamos propiedad distributiva en el SM.

$y + 2 - 2 = \frac{1}{3}\, x - 1 - 2$ sumamos ambos miembros el opuesto de 2

$y = \frac{1}{3}\, x - 3$ Ecuación de la recta perpendicular

- Resuelva los ítems restantes.

Ejercicio N° 2: Dadas las rectas representadas gráficamente:



a)Halle la expresión algebraica explícita de cada una de ellas.

b)Encuentre de forma analítica el cero y la ordenada al origen de cada función. Verifique gráficamente.

c)Halle, para cada una de ellas, la ecuación de la recta paralela que pase por el punto P de coordenadas (2; 2) y la recta perpendicular que pase por el punto Q de coordenadas (-3; -1)

d)Represente gráficamente la recta del inciso anterior

Analizamos a):

a) Desde la gráfica podemos determinar dos puntos de la recta, $(-2{,}0)$ y $(1{,}3)$ y debemos hallar ya ecuación explícita que pase por esos puntos.

Usamos la expresión de la ecuación de la recta desconociendo su pendiente, podemos usar cualquiera de los puntos, tenemos:

$$y - 3 = \frac{3-0}{1-(-2)} \, . (x - 1)$$ sustituimos los valores en la expresión.

$$y - 3 = \frac{3}{3} \, . (x - 1)$$ resolvemos buscando la pendiente

$$y - 3 = 1. (x - 1)$$ aplicamos propiedad distributiva

$$y - 3 = x - 1$$

$$y - 3 + 3 = x - 1 + 3$$ sumamos ambos miembros el opuesto de - 3

$$y = x + 2$$ Ecuación de la recta

b) *Ceros*: $x + 2 = 0$

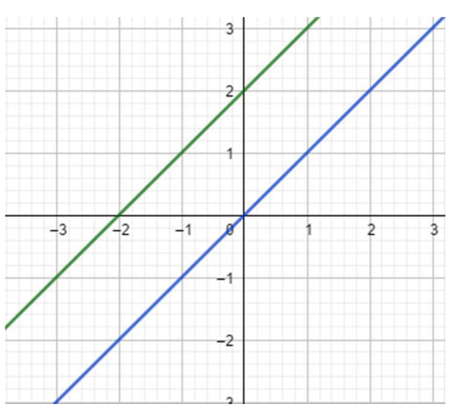
$$x - 2 + 2 = 0 + 2$$

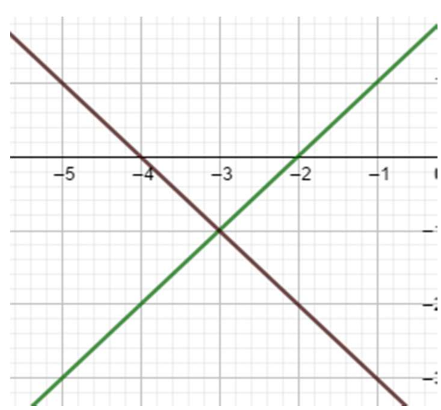
$$x = 2$$

Determinamos la ecuación de una recta *paralela* que pase por el punto $P\ (2, 2)$, al ser paralela la pendiente será 1 y utilizando la ecuación de una recta conociendo su pendiente tenemos que es: $y - 2 = x - 2$

$$y = x$$

Determinamos la ecuación de una recta p*erpendicular* que pase por el punto $Q(-3, -1)$, al ser paralela la pendiente será (-1) y utilizando la ecuación de una recta conociendo su pendiente tenemos que: $y + 1 = -(x + 3) y = -x - 4$





- Resuelva los ítems restantes.

Ejercicio N° 3: Dados los puntos

$$A(0,3) \text{ y } B(-4\,,0):$$

a) Representarlos en el gráfico, identificando cada uno de ellos.

b) Trazar la recta que une A y B.

c) A partir del gráfico , completar la siguiente tabla:

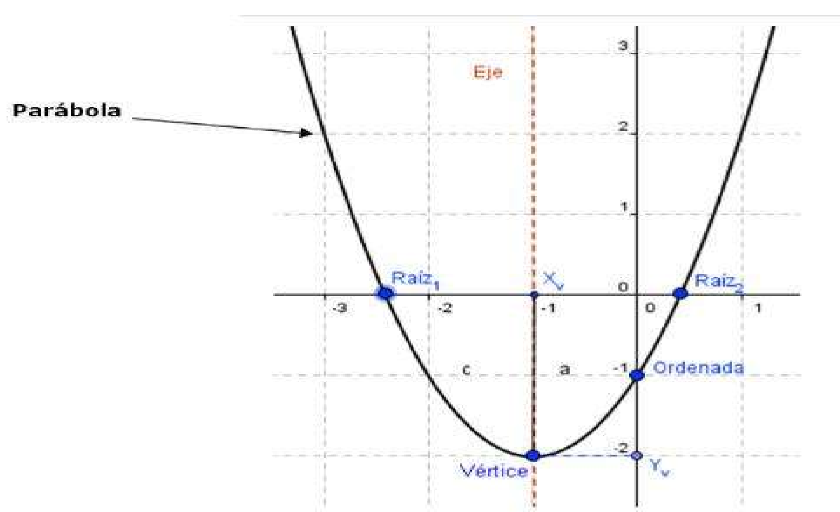
Ecuación	Pendiente	O. al origen	Cero	E. de una recta perpendicular

d) Representar gráficamente la recta perpendicular que fue elegida en el inciso anterior.

FUNCIÓN CUADRÁTICA

Una expresión de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$**,** donde a, b y c son números reales, con a distinto de cero ($a \neq 0$) representa la fórmula de una **función cuadrática**, o función polinómica de segundo grado.

La gráfica de una función cuadrática es una **parábola**.

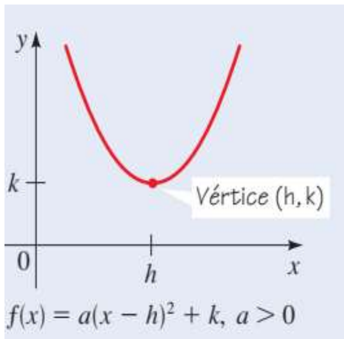


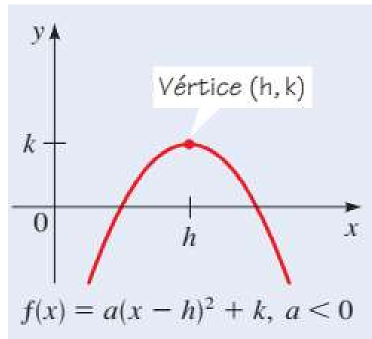
FORMA ESTÁNDAR O CANÓNICA

Una función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ se puede expresar en la **forma estándar o canónica**:

$$f(x) = a.(x - h)^2 + k$$

completando el cuadrado. La gráfica de f es una parábola con vértice $V(h,k)$, la parábola se abre hacia arriba si $a > 0$ o hacia abajo si $a < 0$.

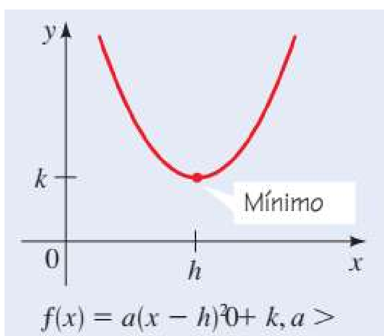


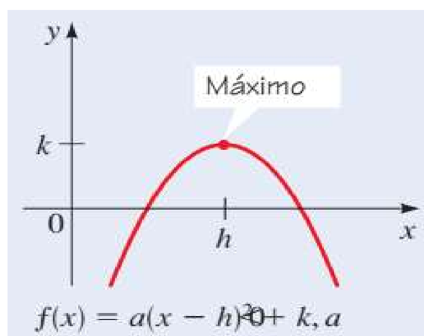


VALORES MÁXIMOS Y MÍNIMOS

Sea f una función cuadrática con la forma estándar $f(x) = a.(x - h)^2 + k$ el valor máximo o mínimo de f en $x = h$.

- Si $a > 0$, entonces el valor mínimo de f es $f(h) = k$
- Si $a < 0$, entonces el valor mínimo de f es $f(h) = k$





El valor máximo o mínimo de una función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ ocurre en

$$x = -\frac{b}{2.a}$$

- Si $a > 0$, entonces el valor mínimo es $f(-\frac{b}{2.a})$.
- Si $a < 0$, entonces el valor máximo es $f(-\frac{b}{2.a})$.

FORMA FACTORIZADA

Se llama expresión **factorizada** de la función cuadrática a aquella que se forma en función de los ceros:

$$f(x) = a.(x - x_1).(x - x_2).$$

Para encontrar las raíces de una función cuadrática podemos utilizar la siguiente expresión o fórmula:

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2.a}$$

$\Delta = b^2 - 4.a.c$, a esta expresión se lo llama **discriminante**, nos brinda información respecto sus ceros o raíces.

- Si $b^2 - 4.a.c > 0$, se obtiene *dos raíces* reales diferentes.
- Si $b^2 - 4.a.c = 0$, se obtiene *dos raíces* reales e iguales.
- Si $b^2 - 4.a.c < 0$, *no tiene raíces* reales en el conjunto de los números reales.

Ejercicio N° 4: Dadas las siguientes expresiones:

$$y_1 = -x^2 - 3x + 4$$

$$y_2 = -2x^2 + 2x + 12$$

$$y_3 = -2x^2 - 3x + 2$$

$$y_4 = -x^2 + 5x$$

$$y_5 = x^2 - 3x + 4$$

$$y_6 = -x^2 + 16$$

$$y_7 = -x^2 + 2x - 5$$

a) Halle el vértice, el eje de simetría, la ordenada al origen y los ceros (si existen)
b) Represente gráficamente.
c) Halle la forma canónica y factorizada.

Realizamos el análisis para la primera expresión: $y_1 = -x^2 - 3x + 4$

a)

<u>Ceros o Raíces:</u>

$-x^2 - 3x + 4 = 0$ sus coeficientes son: $a = -1 \quad b = -3 \quad c = 4$

Usando la fórmula: $x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2.a}$

Obtenemos las raíces:

$x_1,x_2 = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4.(-1).4}}{2.(-1)} = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{-2} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{-2} = \frac{3 \pm 5}{-2}$

$x_1 = \frac{3+5}{-2} = \frac{8}{-2} = -4$

Entonces las raíces son:

$x_2 = \frac{3-5}{-2} = \frac{-2}{-2} = 1$

Vértice:

Como el vértice es un punto en su representación gráfica, debemos calcular las siguientes coordenadas, $V\ (h, k)$. Para encontrar h debemos determinar:

$h = -\frac{b}{2.a}$

Con los datos de este ejercicio obtenemos lo siguiente:

$h = -\frac{b}{2.a} = -\left(\frac{-3}{2.(-1)}\right) = -\left(\frac{-3}{-2}\right)$

$h = -\frac{3}{2}$

Luego calculamos $y_1\left(-\frac{3}{2}\right) = k$

$k = -(-\frac{3}{2})^{2} - 3 . (-\frac{3}{2}) + 4$

Entonces el vértice es:

$k = -\frac{9}{4} + \frac{9}{2} + 4$

$k = \frac{25}{4}$

Eje de simetría

Para obtener el eje de simetría debemos utilizar la ecuación $x = h$

Continuando con el ejercicio tenemos que: $x = -\frac{3}{2}$

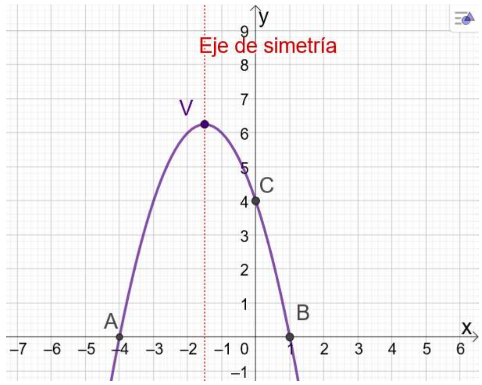
Ordenada al origen

Debemos evaluar a la función en $x = 0$:

$$y_1 = -0^2 - 3.0 + 4y_1 = 4$$

Es decir que el punto en donde la gráfica corta el eje de ordenadas tiene coordenadas $C(0, 4)$.

b) Realizamos la gráfica e indicamos en ella los resultados anteriores:



c) Su forma ***canónica*** teniendo cuenta la expresión $f(x) \ = \ a.(x - h)^2 \ + k$

en donde $V\ (h, k)$ es el vértice de la parábola, entonces en nuestro ejercicio tenemos:

$$V\left(-\frac{3}{2}, \frac{25}{4}\right) \longrightarrow \quad y_1 = -1.[x - (-\frac{3}{2})]^2 + \frac{25}{4}$$

$$y_1 = -1.(x + \frac{3}{2})^2 + \frac{25}{4} y_1 = -(x + 3/2)^2 + \frac{25}{4}$$

Teniendo en cuenta que, la expresión **factorizada** de la función cuadrática es aquella que se forma en función de los ceros: $f(x) = a.(x - x_1).(x - x_2)$**,**
Como hemos analizado anteriormente las raíces son: $x_1 = -4 \quad y \quad x_2 = 1$, por lo tanto la forma factorizada y_1 es:

$$y_1 = -1.[x - (-4)].(x - 1)$$

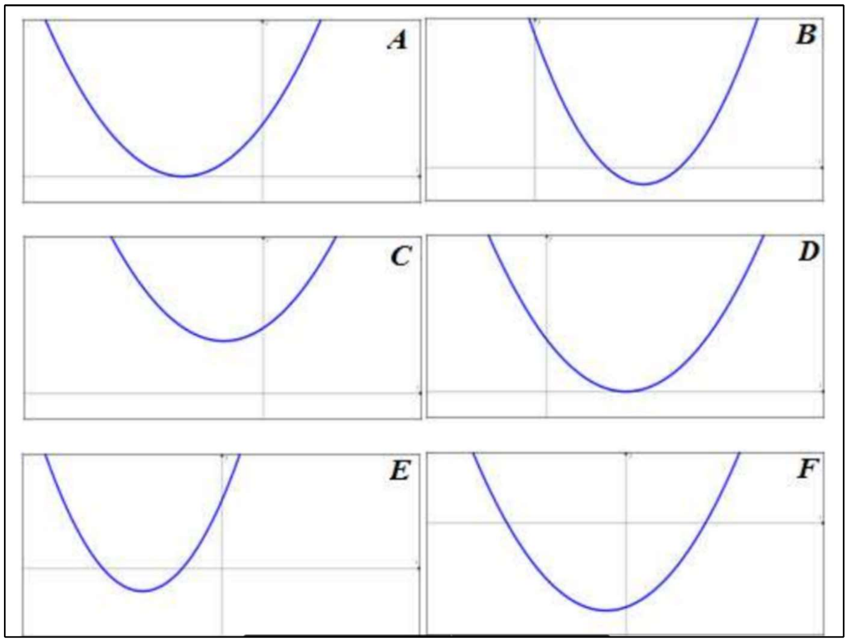
$$y_1 = -(x + 4).(x - 1)$$

Resuelva los ítems restantes.

Teniendo en cuenta que:

- Si $b^2 - 4.a.c > 0$, se obtiene *dos raíces* reales diferentes.
- Si $b^2 - 4.a.c = 0$, se obtiene *dos raíces* reales e iguales.
- Si $b^2 - 4.a.c < 0$, *no tiene raíces* reales en el conjunto de los números reales.

Ejercicio N° 5: Relaciona cada una de las gráficas de las siguientes funciones cuadráticas con la expresión algebraica correspondiente, a partir del cálculo de la discriminante.



I	$= x^2 + x - 6$	*IV*	$y_4 = x^2 + 2x + 5$
II	$= x^2 + 4x + 3$	*V*	$y_5 = x^2 + 4x + 4$
III	$= x^2 - 6x + 8$	*VI*	$y_6 = x^2 - 4x + 4$

Trabajamos con la primera función: $y_1 = x^2 + x - 6$, teniendo en cuenta sus coeficientes analizamos el discriminante:

$$1^2 - 4.1.(-6) = 25$$

Al tener un número mayor que cero, sabemos que tiene dos raíces reales diferentes, podemos calcularlas como:

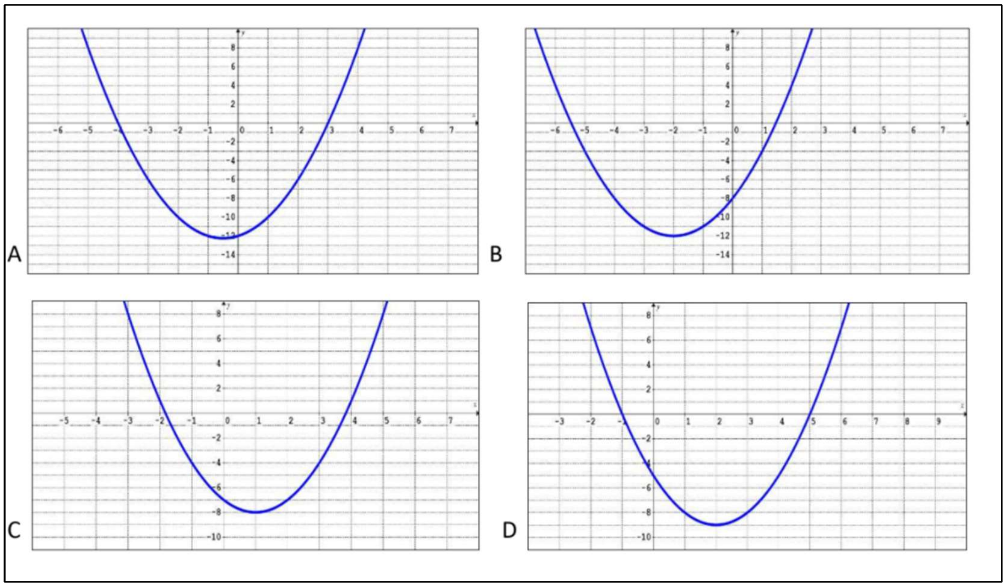
$x_1, x_2 = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4.1.(-6)}}{2.1} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2}$

$x_1 = -3$ y $x_2 = 2$

Como las raíces nos indican los cortes de la parábola con el eje de las abscisas tenemos que la gráfica de $y_1 = x^2 + x - 6$ es la F.

- Resuelva los ítems restantes

Ejercicio N° 6: Determina, a partir de las siguientes representaciones gráficas, la expresión algebraica correspondiente, considerando en todos los casos el coeficiente principal *a* = 1.



Para poder encontrar las expresiones de las siguientes gráficas podemos recurrir a información brindada por las misma, pudiendo identificar, sus ceros, vértice, ordenada al origen o a la combinación de estos elementos.

Analizamos la gráfica **A:**

Teniendo en cuenta la información de la primera gráfica y teniendo en cuenta que $a = 1$:

Los ceros o raíces son: $x_1 = -4$ y $x_2 = 3$, sabiendo que la expresión factorizada es:

$$y = a.(x - x_1).(x - x_2)$$

$y = [x - (-4)](x - 3)$ sustituimos los ceros en la expresión factorizada.

$y = (x + 4).(x - 3)$ aplicamos la propiedad distributiva.

$y = x^2 - 3x + 4x - 12$ operamos los términos semejantes.

Luego la expresión algebraica que buscamos es : $y = x^2 + x - 12$ **.**

- Resuelva los ítems restantes

ECUACIONES

Una ecuación es un enunciado en el que se establece que dos expresiones matemáticas son iguales.
La mayor parte de las ecuaciones que se estudian en el Álgebra contienen incógnitas, es decir, letras que representan números

Llamamos **solución** de una ecuación, al número real que hace verdadera la igualdad. Y denotaremos por **Conjunto Solución**, a todos los valores que hacen cierta la igualdad. Veamos un ejemplo práctico

Ejercicio N° 7

Determine en cada uno de los siguientes casos, si los valores dados son solución de la ecuación.

(a)	$\boldsymbol{(5x-3)\,4=(2-2x)\,6}$	$\boldsymbol{x_1=0}$	$\boldsymbol{x_2=\frac{3}{4}}$
(b)	$\boldsymbol{3-[4-(2-m)]=3m-(-4+m)}$	$\boldsymbol{m_1=-1}$	$\boldsymbol{m_2=\frac{1}{2}}$
(c)	$\boldsymbol{\frac{2}{x}+\frac{1}{x-3}=\frac{2}{3}}$	$\boldsymbol{x_1=\frac{3}{2}}$	$\boldsymbol{x_2=3}$
(d)	$\boldsymbol{\sqrt{4-x}=-1}$	$\boldsymbol{x_1=5}$	$\boldsymbol{x_2=3}$

Ejemplo:
Para verificar si un valor (número real) es solución de una ecuación, hay que reemplazar la letra que representa "la incógnita", por el número indicado.
Así, en el ítem (a) tenemos

$\boldsymbol{(a)\ \ (5x-3)\,4=(2-2x)\,6}$ $\qquad \boldsymbol{x_1=0}$ $\qquad \boldsymbol{x_2=\frac{3}{4}}$

- Incógnita: "x"
- Para $x_1=0$

Llamaremos de Primer Miembro (PM) a: $(5x-3)\,4$ y de Segundo Miembro (SM) a $(2-2x)\,6$. Si al reemplazar el PM y el SM por $x_1=0$ obtenemos el mismo valor, decimos que es una solución. Caso contrario, decimos que no es una solución

Verificación

PM: $(5\cdot 0-3)\,4=(-3)\cdot 4=-12$
SM: $(2-2\cdot 0)\,6=2\cdot 6=12$
Como $PM\neq SM$, decimos que $x_1=0$ no es solución de la ecuación.

Verificación

- Para $x_2 = \frac{3}{4}$

  PM: $\left(5 \cdot \frac{3}{4} - 3\right)\ 4 = \left(\frac{15}{4} - 3\right) \cdot 4 = \frac{15-12}{4} \cdot 4 = 3$

  SM: $\left(2 - 2 \cdot \frac{3}{4}\right)\ 6 = \left(2 - \frac{6}{4}\right) \cdot 6 = \frac{8-6}{4} \cdot 6 = \frac{2}{4} \cdot 6 = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3$

  Como $PM = SM$, decimos que $x_2 = \frac{3}{4}$ es solución de la ecuación.

- Resuelva los ítems restantes

Repasando:

Consideramos a la letra como la "incógnita" de la ecuación, por lo que el objetivo, ahora, es determinar el valor de la incógnita que hace que la igualdad en la ecuación sea cierta.

Los valores de la incógnita que hacen que la ecuación sea verdadera se llaman **soluciones** o **raíces** de la ecuación, y el proceso para determinar las soluciones se llama **resolución** de una ecuación.

Ejercicio N° 8

Resuelva cada una de las siguientes ecuaciones:

a. $\mathbf{-3\ (8x - 2) = 78}$

b. $\mathbf{\left(\frac{3}{2}m + 2\right) : (-3) = -5}$

c. $\mathbf{\frac{5}{3}t - 2 = \frac{3}{2}t - \frac{3}{4}}$

d. $\mathbf{3\ (2 - 2x) = -2\ (3 + 2x) - 5}$

e. $\mathbf{\frac{4}{3}p + p - 3 = \frac{p+1}{2}}$

f. $\mathbf{\frac{5}{2}y - \frac{2}{3}(y - 2) = \frac{3y+6}{2}}$

g. $\mathbf{\frac{1}{x} = \frac{4}{3x} + 1}$

h. $\mathbf{\frac{4m-2}{m+2} = \frac{8}{5}}$

i. $\mathbf{\frac{3}{x+1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3x+3}}$

j. $\mathbf{\frac{3}{x-2} + \frac{2}{x+2} = \frac{27}{x^2-4}}$

k. $\mathbf{\sqrt{3}x + \sqrt{12} = \frac{x+5}{\sqrt{3}}}$

l. $\mathbf{(s - 2)^2 = (s + 2)^2 + 32}$

Dos ecuaciones con exactamente las mismas soluciones se llaman **ecuaciones equivalentes**.
Para resolver una ecuación, tratamos de encontrar una ecuación más simple y equivalente en la que la variable esté sola en un lado del signo de "igual".
Las propiedades que aplicamos para resolver una ecuación son

Aquí A, B y C representan expresiones algebraicas y el símbolo ⇔ significa "equivale a".

Propiedad	Descripción
1. $A = B \;\Leftrightarrow\; A + C = B + C$	Sumar la misma cantidad a ambos miembros de una ecuación se obtiene una ecuación equivalente.
2. $A = B \;\Leftrightarrow C \cdot A = C \cdot B \quad con\ (C \neq 0)$	Multiplicar ambos miembros de una ecuación por la misma cantidad no cero se obtiene una ecuación equivalente.

Resolvemos la ecuación cambiándola a una equivalente en la que todos los términos que tienen la variable están en un lado y todos los términos constantes están en el otro.
Veamos la ecuación (c):

$$\frac{5}{3}t - 2 = \frac{3}{2}t - \frac{3}{4}$$

Dominio de la ecuación: **R**

$$\frac{5}{3}t - 2 = \frac{3}{2}t - \frac{3}{4}$$ Ecuación dada

$\frac{5}{3}t - 2 + 2 = \frac{3}{2}t - \frac{3}{4} + 2$ Se suma 2 en ambos miembros

$\frac{5}{3}t = \frac{3}{2}t + \frac{5}{4}$ Operando en SM y Simplificando en el PM

$\frac{5}{3}t + \left(-\frac{3}{2}t\right) = \frac{3}{2}t + \frac{5}{4} + \left(-\frac{3}{2}t\right)$ Sumando $\left(-\frac{3}{2}t\right)$en ambos miembros

$\frac{5}{3}t - \frac{3}{2}t = \frac{5}{4}$ Simplificando en el SM

$\left(\frac{10-9}{6}\right)\, t = \frac{1}{6}t = \frac{5}{4}$ Operando en el PM

$\frac{1}{6}t = \frac{5}{4}$

$\left(\frac{1}{6}t\right) \cdot 6 = \frac{5}{4} \cdot 6$ Multiplicando por 6 ambos miembros

$t = \frac{5}{4} \cdot 6 = \frac{30}{4} = \frac{15}{2}$ Operando en ambos miembros y simplificando

$t = \frac{15}{2}$ Raíz de la ecuación

Verificación de la Respuesta

PM: $\frac{5}{3} \cdot \frac{15}{2} - 2 = \frac{75}{6} - 2 = \frac{75-12}{6} = \frac{63}{6} = \frac{21}{2}$

SM: $\frac{3}{2} \cdot \frac{15}{2} - \frac{3}{4} = \frac{45}{4} - \frac{3}{4} = \frac{42}{4} = \frac{21}{2}$

$$PM = SM = \frac{21}{2}$$

La verificación es un paso <u>ineludible</u>.

Ejemplo 2:

Analizamos la ecuación (i)

$$\frac{3}{x+1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3x+3}$$

Observación Importante: Cuando en la ecuación aparece la incógnita en el denominador, se debe descartar la posibilidad de que el, o los, denominador/es sea/n cero.

A este procedimiento lo llamamos determinar el “dominio de la ecuación” o también, dar las “Condiciones de existencia de la ecuación”.

En este caso tenemos:

Condiciones de existencia: $x \neq -1$

pues en $x + 1 = 0$ $x = -1$ $\Rightarrow$ $(-1) + 1 = 0$ y

en $3x + 3$ $x = -1$ $\Rightarrow$ $3 \cdot (-1) + 3 = 0 \Rightarrow -3 + 3 = 0$

Dominio de la ecuación: $R - \{-1\}$

$\frac{3}{x+1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3x+3}$ Ecuación dada

$\frac{3}{x+1} - \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{3x+3}\right) = \frac{1}{3x+3} + \left(-\frac{1}{3x+3}\right)$ Se suma $\left(-\frac{1}{3x+3}\right)$ en ambos miembros

$\frac{3}{x+1} - \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{3x+3}\right) = 0$ Simplificando en el SM

$\frac{3 \cdot 2 \cdot (3x+3) - (x+1) \cdot (3x+3) - 2 \cdot (x+1)}{(x+1) \cdot 2 \cdot (3x+3)} = 0$ Sacando común denominador y Operando en el PM

$\frac{6 \cdot 3x + 6 \cdot 3 - (3x^2 + 6x + 3) - 2 \cdot x - 2}{(x+1) \cdot 2 \cdot (3x+3)} = 0$ Operando en el PM

$\frac{18 \cdot x + 18 - 3x^2 - 6x - 3 - 2 \cdot x - 2}{(x+1) \cdot 2 \cdot (3x+3)} = 0$ Operando en el numerador del PM

$\frac{-3x^2 + 10x + 13}{(x+1) \cdot 2 \cdot (3x+3)} = 0$ Operando en el numerador del PM

$$-3x^2 + 10x + 13 = 0$$

Ya que el denominador es distinto de 0, sólo el numerador puede ser 0 para que la igualdad sea verdadera.
Resolviendo la ecuación de segundo grado.

$$x_1 = -1 \qquad x_2 = \frac{13}{3}$$

Recordando la **Condiciones de existencia**: $x \neq -1$
Por lo tanto $x_1 = -1$ no es una solución aceptable.

Comprobación de las respuestas

PM: $\frac{3}{x+1} - \frac{1}{2} \quad x_2 = \frac{13}{3} \rightarrow$

$$\frac{3}{\frac{13}{3}+1} - \frac{1}{2} = \frac{3}{\frac{13+3}{3}} - \frac{1}{2} = \frac{9}{16} - \frac{1}{2} = \frac{9-8}{16} = \frac{1}{16}$$

SM: $\frac{1}{3x+3} = \frac{1}{3 \cdot \frac{13}{3}+3} = \frac{1}{13+3} = \frac{1}{16}$

$$\Rightarrow PM = SM = \frac{1}{16}$$

El Conjunto Solución (S) entonces es: $S = \left\{\frac{13}{3}\right\}$

- Resuelva los ítems restantes del ejercicio

Ejercicio N° 9

Despeje la incógnita encerrada entre llaves en cada una de las siguientes igualdades.

a. $\{\boldsymbol{n}\}\ \boldsymbol{I = \frac{nE}{R+nr}}$

b. $\{\boldsymbol{P}\}\ \boldsymbol{x = \frac{Pgt^2}{2u(1+m)}}$

c. $\{\boldsymbol{x}\}\ \boldsymbol{a = \frac{2bx}{1+b(x-1)}}$

d. $\{\boldsymbol{L}\}\ \boldsymbol{T = \frac{W(u^2-2gL)}{gL}}$

e. $\{\boldsymbol{K}\}\ \boldsymbol{T = 2\pi\sqrt{\frac{K^2+h^2}{gh}}}$

f. $\{\boldsymbol{c}\}\ \boldsymbol{2ax = \sqrt{b-4ac} - b}$

g. $\{\boldsymbol{S}\}\ \boldsymbol{T = \sqrt{\frac{R-S}{S}}}$

h. $\{\boldsymbol{R}\}\ \boldsymbol{I = E\sqrt{R^2 + w^2L^2}}$

i. $\{\boldsymbol{p}\}\ \boldsymbol{\frac{1}{f} = (p-1)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s}\right)}$

Ejemplo:

Resolveremos como modelo la letra (g)

(g). $\{S\}\ T = \sqrt{\frac{R-S}{S}}$

Se solicita despejar la letra S

$T = \sqrt{\frac{R-S}{S}}$	Ecuación dada
$T^2 = \left(\sqrt{\frac{R-S}{S}}\right)^2$	Elevando al cuadrado ambos miembros
$T^2 = \frac{R-S}{S}$	Simplificando el SM
$S \cdot T^2 = \left(\frac{R-S}{S}\right) \cdot S$	Multiplcando por S ambos miembros
$S \cdot T^2 = R - S$	Simplificando el SM
$S \cdot T^2 + S = R - S + S$	Sumando S a ambos miembros
$ST^2 + S = R$	Simplificando S en el SM
$S(T^2 + 1) = R$	Sacando Factor Comun en el PM
$\frac{S(T^2+1)}{(T^2+1)} = \frac{R}{(T^2+1)}$	Dividiendo ambos miembros por $(T^2 + 1)$
$S = \frac{R}{(T^2+1)}$	Simplificando en el PM

- Resuelva los ítems restantes del ejercicio

Ejercicio N° 10

Resuelva las siguientes ecuaciones de segundo grado por factorización.

a. $\boldsymbol{x^2 - 5x + 6 = 0}$

b. $\boldsymbol{2m^2 - 24 = -2m}$

c. $\boldsymbol{4t^2 = 2\left(\frac{3}{2} - 2t\right)}$

d. $\boldsymbol{2r(3r - 5) = 3(1 - r)}$

e. $\boldsymbol{x^2 - 5x + 3 = 0}$

f. $\boldsymbol{3s(s + 1) - 5 = 2(s^2 - 3)}$

- Para ecuaciones de este tipo, no existen restricciones en cuanto a las condiciones de existencia. Por lo tanto, **Dominio de la ecuación**: R
- Para las ecuaciones cuadráticas, podemos usar la formula resolvente o de Baskhara, $\left(x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)$, para encontrar las raíces y luego aplicar el Teorema fundamental del Álgebra para polinomios de segundo grado para expresarla de forma factorizada.

Una versión del Teorema Fundamental del Algebra es:
"todo polinomio de grado $N > 0$, con coeficientes reales o complejos tiene exactamente N raíces reales o complejas, iguales o distintas".

Para $N = 2$, el polinomio $ax^2 + bx + c$, debe tener a lo máximo dos raíces. Sean éstas x_1 y x_2. Este polinomio puede ser factorizado de la siguiente manera

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Ejemplo:

Resolveremos como modelo la letra (a)

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

Fórmula resolvente:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2}$$

$$x_1 = \frac{5+1}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$x_2 = \frac{5-1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Por lo tanto $x^2 - 5x + 6 = 1 \cdot (x - 3) \cdot (x - 2)$. Luego

$$x^2 - 5x + 6 = 1 \cdot (x - 3) \cdot (x - 2) = 0$$

- Resolveremos este ejemplo usando otro teorema que dice que, las raíces x_1 y x_2 de un polinomio de grado 2, $ax^2 + bx + c$, tienen la siguiente relación:

$$\{x_1 . x_2 = c/a \; (x_1 + x_2) = -b/a$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

Construiremos un dispositivo en forma de tabla con 3 columnas.

En la primera columna se colocan x, de tal forma que multiplicada da el término ax^2

Para la segunda columna, se buscan dos números que multiplicados den el término independiente y se colocan como indica el esquema abajo. Luego se multiplican sus filas. A seguir, se hace el producto cruzado como indican las flechas y los mismos se colocan en la tercera columna. Después se suman las filas.

$$\begin{array}{cc|c}
\multicolumn{2}{c}{\text{Se multiplica}} & \text{Se suma} \\
x & -2 & -3x \\
x & -3 & -2x \\
\hline
x^2 & 6 & -5x \\
 & \uparrow & \uparrow \\
 & \text{c} & \text{b}
\end{array}$$

Las dos primeras columnas, leídas horizontalmente, son los factores con los que podemos expresar el polinomio

$$\begin{array}{cc}
(\; x \;\; -2\,) & -3x \\
(\; x \;\; -3\,) & -2x \\
\hline
x^2 \quad 6 & -5x
\end{array}$$

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2) \cdot (x - 3) = 0$$

Este método es útil cuando las raíces son racionales. Caso contrario, sólo se puede usar el primer método. Esto ocurre en el ejercicio del ítem (f).

- Resuelva los ítems restantes del ejercicio usando ambos métodos

Ejercicio N° 11

Resuelva las siguientes ecuaciones de segundo grado completando cuadrados.

a. $\boldsymbol{x^2 - 4x - 12 = 0}$

b. $\boldsymbol{p^2 - 15 = -2p}$

c. $\boldsymbol{2m^2 - 8 = -6m}$

d. $3x\left(x + \frac{1}{2}\right) = 3\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{3}x\right)$

e. $\boldsymbol{3s^2 - s = 0}$

f. $\boldsymbol{2p(p + 4) + 1 = \frac{1}{2}(2p + 10)}$

Ejemplo:

Repasando:

Para hacer que $x^2 + bx$ sea un cuadrado perfecto, se suma $\left(\frac{b}{2}\right)^2$, el cuadrado de la mitad del coeficiente de x. Esto da el cuadrado perfecto

$$x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2$$

Resolveremos la letra (c) como ejemplo:

$$2m^2 - 8 = -6m$$

Condiciones de existencia: Como la incógnita m no está en el denominador, no hay que eliminar ningún valor en particular. Luego el **Dominio de la ecuación** es R

$$2m^2 - 8 = -6m$$ Ecuación dada

$$2m^2 + 6m = 8$$ Efectuando las operaciones correspondientes

$$2(m^2 + 3m) = 8$$ Sacando Factor Común en el PM

$$m^2 + 3m = 4$$ Dividiendo por 2 ambos miembros

$$m^2 + 3m + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 4 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$$ Completando cuadrados en el PM

$$\left(m + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$$

$$\sqrt{\left(m + \frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$$ Aplicando raíz cuadrada a ambos miembros

$$\left|m + \frac{3}{2}\right| = \frac{5}{2}$$ Simplificando el PM

$m + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$ (si $m + \frac{3}{2} \geq 0$) ó $m + \frac{3}{2} = -\frac{5}{2}$ (si $m + \frac{3}{2} < 0$) Aplicando definición de Valor Absoluto (Unidad 1)

$m_1 = \frac{5}{2} - \frac{3}{2} = \frac{2}{2} = 1$ ó $m_2 = -\frac{5}{2} - \frac{3}{2} = -\frac{8}{2} = -4$ Efectuando las operaciones correspondientes

$m_1 = 1$ ó $m_2 = -4$

Comprobación de las respuestas

Para $m_1 = 1$

PM: $2m^2 - 8 =$ $m_1 = 1$ → $2(1)^2 - 8 = 2 - 8 = -6$

SM: $-6m =$ $m_1 = 1$ → $-6m = -6 \cdot (1) = -6$

$\Rightarrow PM = SM = -6$

Luego $m_1 = 1$ es solución de la ecuación

Para $m_2 = -4$

PM: $2m^2 - 8 =$ $m_2 = -4$ → $2(-4)^2 - 8 = 32 - 8 = 24$

$\Rightarrow PM = SM = 24$

SM: $-6m = \quad m_2 = -4 \;\rightarrow\quad -6m = -6\cdot(-4) = 24$

Luego $m_2 = -4$ también es solución de la ecuación

El Conjunto Solución (S) entonces es: $S = \{-4\,,1\}$

- Resuelva los ítems restantes del ejercicio

Ejercicio N° 12: Calcule las soluciones de cada ecuación.

a. $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+2} = \frac{5}{4}$

b. $\frac{m}{2m+7} - \frac{m+1}{m+3} = 1$

c. $\sqrt{2x+1} + 1 = x$

d. $\sqrt{\sqrt{s-5} + s} = 5$

e. $2p(p^3 + 2p) = -1$

f. $2r^3\left(\frac{1}{2}r^3 - 1\right) - 1 = 2$

g. $2x^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{5}{2}} = 3x^{\frac{1}{2}}$

h. $12t^{\frac{2}{3}} + t^{\frac{8}{3}} = 7t^{\frac{5}{3}}$

i. $|3x+5| = 1$

j. $|5s-2| = 7$

Ejemplos:

Resolveremos algunos ejemplos

(a) $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+2} = \frac{5}{4}$

(c) $\sqrt{2x+1} + 1 = x$

(g) $2x^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{5}{2}} = 3x^{\frac{1}{2}}$

(i) $|3x+5| = 1$

Solución de (a)

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+2} = \frac{5}{4}$$

Condiciones de existencia: Como los denominadores no pueden ser 0, debemos exigir que $x \neq 1$ y $x \neq -2$, pues estos valores anulan a $x-1$ y a $x+2$

Dominio de la ecuación es $R - \{-2\,,1\}$

En estos casos, debemos igualar todo a 0:

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+2} = \frac{5}{4} \qquad \text{Ecuación dada}$$

$$\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+2}-\frac{5}{4}=0$$
Sumando en ambos miembros $\left(-\frac{5}{4}\right)$

$$\frac{4\cdot(x+2)+4(x-1)-5(x-1)(x+2)}{4(x-1)(x+2)}=0$$
Sacando común denominador y sumando las fracciones algebraicas

$$\frac{4x+8+4x-4-5[x^2+x-2]}{4(x-1)(x+2)}=0$$
Efectuando las operaciones en el numerador

$$\frac{4x+8+4x-4-5\,x^2-5x+10}{4(x-1)(x+2)}=0$$
Efectuando las operaciones en el numerador

$$\frac{-5\,x^2+3x+14}{4(x-1)(x+2)}=0$$
El denominador no es cero. La única posibilidad es que el numerador sea 0

$$-5\,x^2+3x+14=0$$
Resolviendo la ecuación de segundo grado con la fórmula resolvente en el numerador

$$x_1=2\ ;\ \ x_2=-\frac{7}{5}$$
Raíces de la ecuación

Ambas raíces pertenecen al dominio de la ecuación. Luego $S=\left\{-\frac{7}{5},2\right\}$

Solución de (c)

$$\sqrt{2x+1}+1=x$$

Condiciones de existencia: Como es una raíz cuadrada, el radicando no puede ser negativo. O sea $2x+1\geq 0 \quad \Rightarrow \quad x\geq -\frac{1}{2}$

Dominio de la ecuación es $\{\,x\ \in R|\ x\geq -\frac{1}{2}\}$

$$\sqrt{2x+1}+1=x$$

$$\sqrt{2x+1}=x-1$$
Restamos 1 a ambos miembros

$$\left(\sqrt{2x+1}\right)^2=(x-1)^2$$
Elevamos al cuadrado ambos miembros para eliminar la raíz

$$2x+1=\ x^2-2x+1$$
Desarrollamos el cuadrado del segundo miembro

$$x^2-2x+1-2x-1=0$$
$$x^2-4x=0$$
Suma de opuestos en ambos miembros.

$$x(x-4)=0$$
Simplificación.

$$x_1=0 \quad \text{o} \quad x_2=4$$

Factorización.

Raíces de la ecuación al cuadrado

Aquí las soluciones potenciales son, entonces, $x_1 = 0$ y $x_2 = 4$. Es necesario comprobarlas para ver si cumplen con la ecuación original. Estas soluciones potenciales, son soluciones de la ecuación al cuadrado y podrían no serlo de la original.

Comprobación para $x_1 = 0$

PM: $\sqrt{2x+1}+1 \underbrace{=}_{x_1=0} \sqrt{2.0+1}+1 = \sqrt{0+1}+1 = 1+1 = 2$

SM: $x \underbrace{=}_{x_1=0} 0$

Como PM$\neq$ SM ; $x_1 = 0$ no es solución

Comprobación para $x_2 = 4$

PM: $\sqrt{2x+1}+1 \underbrace{=}_{x_2=4} \sqrt{2.4+1}+1 = \sqrt{9}+1 = 3+1 = 4$

SM: $x \underbrace{=}_{x_2=4} 4$

Como PM= SM; $x_2 = 4$ es solución. Y 4 está en el dominio de la ecuación pues $4 > -\frac{1}{2}$

El Conjunto Solución es: $S = \{4\}$

Solución de (g)

$$2x^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{5}{2}} = 3x^{\frac{1}{2}}$$

Dominio de la ecuación es R

$2x^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{5}{2}} = 3x^{\frac{1}{2}}$	Ecuación dada
$2x^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{5}{2}} - 3x^{\frac{1}{2}} = 0$	Pasaje de términos
$x^{\frac{1}{2}}(2x - 2x^2 - 3) = 0$	Factorizando
$x^{\frac{1}{2}}(-2x^2 + 2x - 3) = 0$	El polinomio entre paréntesis no tiene raíces reales.
$x^{\frac{1}{2}} = 0 \ \Rightarrow \ x = 0$	Raíz.

Comprobación para $x = 0$

PM: $2x^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{5}{2}} \underbrace{=}_{x=0} 2 0^{\frac{3}{2}} - 2 0^{\frac{5}{2}} = 0$

SM: $3x^{\frac{1}{2}} \underbrace{=}_{x_1=0} 3 \cdot 0^{\frac{1}{2}} = 0$

Como PM= SM; $x = 0$ es solución.

El Conjunto Solución es: $S = \{0\}$

Solución de (i)

$$|3x+5| = 1$$

Dominio de la ecuación: R

$\|3x+5\| = 1$	Ecuación dada
$3x+5=1 \quad (1)$ o $3x+5=-1 \quad (2)$	Por definición de Valor Absoluto
$(1) \quad 3x+5=1$	Resolviendo la ecuación (1)
$3x = 1-5 = -4$	
$x_1 = -\frac{4}{3}$	Raíz de la ecuación (1)
$(2) \quad 3x+5=-1$	Resolviendo la ecuación (1)
$3x = -1-5 = -6$	
$x_2 = -\frac{6}{3} = -2$	Raíz

Comprobación para $x_1 = -\frac{4}{3}$

$|3x+5| \underbrace{=}_{x_1=-\frac{4}{3}} \left|3\left(-\frac{4}{3}\right)+5\right| = |-4+5| = |1| = 1$ Verifica la ecuación

Comprobación para $x_2 = -2$

$|3x+5| \underbrace{=}_{x_2=-2} |3(-2)+5| = |-6+5| = |-1| = 1$ Verifica la ecuación

El Conjunto Solución es: $S = \left\{-\frac{4}{3}, -2\right\}$

- Resuelva los ítems restantes del ejercicio

Ejercicio N° 13

Sea $S = \left\{-2, -1, 0, \frac{1}{2}, \ 1, \sqrt{2}, 2, 4\right\}$ Determine cuáles elementos de S cumplen con la desigualdad en cada caso.

a. $\mathbf{4x - 2 \geq 2x}$

b. $\mathbf{1 < 2x - 4 \leq 7}$

c. $\boldsymbol{m^2 + 2 < 4}$

Resolveremos algunos elementos de S para la inecuación (b)

$$1 < 2x - 4 \leq 7$$

Para $x = -2$

$1 < 2x - 4 \leq 7 \ \Rightarrow \ 1 < 2(-2) - 4 \leq 7 \Rightarrow 1 < -4 - 4 \leq 7 \ \Rightarrow \ 1 < -8 \leq 7$

Error $1 \nless -8$ Por lo tanto -2 no verifica la desigualdad

Para $x = 4$

$1 < 2x - 4 \leq 7 \ \Rightarrow \ 1 < 2(4) - 4 \leq 7 \Rightarrow 1 < 8 - 4 \leq 7 \ \Rightarrow \ 1 < 4 \leq 7$

Ambas desigualdades son correctas. Luego 4 verifica la desigualdad.

- Resuelva los ítems restantes del ejercicio

Ejercicio N° 13: Resuelva cada una de las siguientes desigualdades lineales. Exprese la solución usando notación de intervalos y grafique el conjunto solución.

a. $\mathbf{7m - 3 > 2m + 3}$

b. $4x + 7 \leq 9x - 2$

c. $\frac{1}{3}y + 2 < \frac{1}{6}y - 1$

d. $-\frac{5}{2}(x-2) < -3\left(\frac{1}{6}x + 2\right)$

e. $-\frac{2}{3}(2r+5) \geq \frac{3}{4}r - 2$

f. $\frac{1}{6} < \frac{2t-13}{12} \leq \frac{2}{3}$

g. $-\frac{1}{2} \leq \frac{4-3s}{5} \leq \frac{1}{4}$

Cuando tratamos con desigualdades debemos tener en cuenta las siguientes propiedades

Propiedades de las desigualdades

Sean a, b, c y d números reales.

1. Propiedad transitiva

$a < b$ y $b < c \quad \Rightarrow \quad a < c$

2. Suma de desigualdades

$a < b$ y $c < d \quad \Rightarrow \quad a + c < b + d$

3. Suma de una constante

$a < b \quad \Rightarrow \quad a + c < b + c$

4. Multiplicación por una constante

Para $c > 0$; $a < b \quad \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c$

Para $c < 0$; $a < b \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c$ Invertir la desigualdad cuando se multiplica por un número negativo

Resolveremos algunos ejercicios como ejemplo. Empezamos con el (b)

$$4x + 7 \leq 9x - 2$$

Dominio de la inecuación: R

$4x + 7 \leq 9x - 2$	Inecuación dada
$4x + 7 - 7 \leq 9x - 2 - 7$	Sumando (-7) en ambos miembros
$4x \leq 9x - 9$	Resolviendo
$4x - 9x \leq -9$	Sumando $(-9x)$ en ambos miembros
$-5x \leq -9$	Resolviendo

$5x \geq 9$ — Multiplicando por (-1) ambos miembros

$x \geq \frac{9}{5}$ — Multiplicando por $(\frac{1}{5})$ ambos miembros

Intervalo : $[\frac{9}{5}, \infty)$

Resolveremos ahora la inecuación (f)

$$\frac{1}{6} < \frac{2t-13}{12} \leq \frac{2}{3}$$

Dominio de la inecuación: R

$\frac{1}{6} < \frac{2t-13}{12} \leq \frac{2}{3}$	Inecuación dada
$12 \cdot \frac{1}{6} < 12 \cdot \frac{2t-13}{12} \leq 12 \cdot \frac{2}{3}$	Multiplicando por (12) en ambos miembros
$2 < 2t - 13 \leq 8$	Resolviendo
$2 + 13 < 2t - 13 + 13 \leq 8 + 13$	Sumando 13) en ambos miembros
$15 < 2t \leq 21$	Resolviendo
$\frac{1}{2} \cdot 15 < \frac{1}{2} \cdot 2t \leq \frac{1}{2} \cdot 21$	Multiplicando por $\left(\frac{1}{2}\right)$ ambos miembros
$\frac{15}{2} < t \leq \frac{21}{2}$	Resolviendo

Intervalo : $(\frac{15}{2}, \frac{21}{2}]$

- Resuelva los ítems restantes del ejercicio.

Ejercicio N° 14

Resuelva cada una de las siguientes desigualdades no lineales. Exprese la solución, usando notación de intervalos y grafique el conjunto solución.

a. $\mathbf{2(x-4)(x+3)>0}$

b. $\mathbf{2x^2-5x \leq 3(x-8)}$

c. $\mathbf{3m^2>9(m-6)}$

d. $\mathbf{r^2 \leq 16}$

e. $\mathbf{(s-4)(s+3)(s-1) \leq 0}$

f. $\mathbf{25x \leq x^3}$

g. $\mathbf{\frac{x-1}{x+2}<0}$

h. $\mathbf{-2<\frac{5x-2}{x+3}}$

i. $\mathbf{4<\frac{8s}{2s+3}}$

j. $\mathbf{1+\frac{2}{m+1} \leq \frac{2}{m}}$

k. $\mathbf{\frac{3}{x-1}-\frac{4}{x} \geq 1}$

l. $\mathbf{\frac{1}{p+1}+\frac{1}{p+2} \leq 0}$

Resolveremos 3 casos importantes (a), (b) y (k). Cada uno de ellos, responde a un tipo particular de resolución. Pero todos comparten el hecho de que se debe dejar de un lado de la inecuación los factores (polinomios factorizados y factores numéricos) y del otro lado, **debe** quedar un 0 (cero).
Comenzamos con (a)

$$2(x-4)(x+3)>0$$

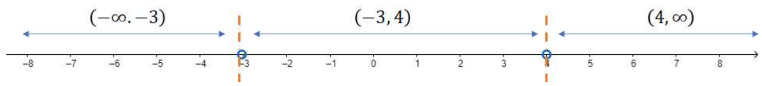
Dominio de la inecuación: R

$$2(x-4)(x+3)>0 \;\; (*) \qquad \text{Inecuación dada}$$

$(*)$ la expresión ya está factorizada en este caso.
Las raíces de las ecuaciones son $x_1 = 4$ y $x_2 = -3$
El producto de los 3 factores debe ser positivo. Deberíamos considerar todas las posibilidades de signo de los factores (excepto 2 que es positivo) y resolver cada una de éstas, para luego hacer la unión de todos los intervalos.
En lugar de esto, usaremos un excelente recurso:
Construiremos una Tabla de doble entrada.

- Las raíces dividen a la recta real en tres intervalos: $(-\infty.-3);\ (-3,4)\ y\ (4,\infty)$

Gráficamente:



La tabla:

Número testigo →	-4	0	5
factores \ intervalo	$(-\infty.-3)$	$(-3,4)$	$(4,\infty)$
$(x-4)$	$-$	$-$	$+$
$(x+3)$	$-$	$+$	$+$
2	$+$	$+$	$+$
$2(x-4)(x+3)$	$+$	$-$	$+$

Parece snecesario colocar el 2 como un factor más en la tabla. Sin embargo, si fuese un número negativo, influiría en el signo del resultado.
En cada intervalo, elegimos un “número testigo” con el cual evaluamos cada factor. Así obtenemos el signo del factor en cada intervalo.
Ejemplo:
Número testigo: $x = -4$
Factor:

$(x-4) = -4 - 4 = -8 < 0$ se coloca un signo $(-)$ en la tabla
$(x+3) = -4 + 3 = -1 < 0$ se coloca un signo $(-)$ en la tabla

Número testigo: $x = 0$
Factor:

$(x-4) = 0 - 4 = -4 < 0$ se coloca un signo $(-)$ en la tabla
$(x+3) = 0 + 3 = 3 > 0$ se coloca un signo $(+)$ en la tabla

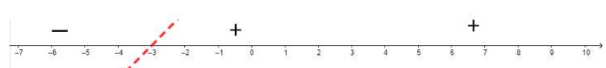
Luego, la inecuación $2(x-4)(x+3) > 0$, será positiva en $(-\infty.-3) \cup (4,\infty)$

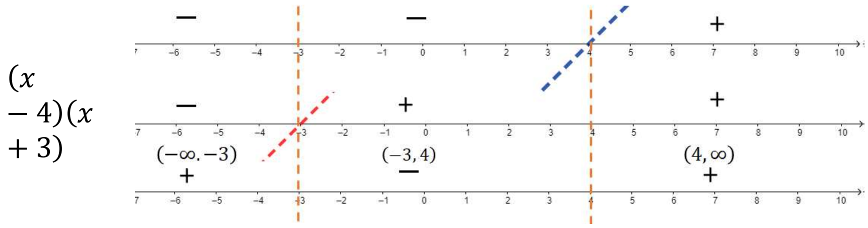
$$S = (-\infty.-3) \cup (4,\infty)$$

También puede hacerse un razonamiento geométrico: $(*)$

$(x-4)$ Es una recta con pendiente positiva. Corta al $eje\ x$ en $x = 4$

$(x+3)$ Es una recta con pendiente positiva. Corta al $eje\ x$ en $x = 4$





Las líneas verticales corresponden a las raíces de las ecuaciones
En la última semirrecta, se muestra el resultado.
Luego, la inecuación $2(x-4)(x+3) > 0$, será positiva en $(-\infty.-3) \cup (4,\infty)$

$$S = (-\infty.-3) \cup (4,\infty)$$

$(*)$*esta opción es para aquellos alumnos a los cuales les resulta más fácil pensar geométrica*

Resolveremos el ítem (b)

$$2x^2 - 5x \leq 3(x-8)$$

Dominio de la inecuación: R

$2x^2 - 5x \leq 3(x-8)$	Inecuación dada
$2x^2 - 5x - 3(x-8) \leq 3(x-8) - 3(x-8)$	Sumando $-3(x-8)$ en ambos miembros
$2x^2 - 5x - 3(x-8) \leq 0$	Resolviendo
$2x^2 - 5x - 3x + 24 \leq 0$	Propiedad distributiva
$2x^2 - 8x + 24 \leq 0$	Sumar términos semejantes
$2(x^2 - 4x + 12) \leq 0$	Factor común

En este caso, el polinomio $x^2 - 4x + 12$ no tiene raíces reales, por lo tanto, no lo podemos factorizar en R. Como el coeficiente del término cuadrático es positivo, este polinomio es positivo para todos los $x \in R$. Tenemos entonces:

$2 > 0$ y $x^2 - 4x + 12 > 0$

Como el producto de dos números positivos es siempre positivo, concluimos que no existe ningún número real que satisface la desigualdad. Por lo tanto $S = \emptyset$

Ahora resolveremos el ítem (k)

$$\frac{3}{x-1} - \frac{4}{x} \geq 1$$

Condiciones de existencia: Como la incógnita está en el denominador, $x \neq 1$ y $x \neq 0$

Dominio de la inecuación es $R - \{0\,,1\,\}$

Aquí debemos recordar la recomendación de dejar de un lado de la inecuación los términos (o los factores, según el caso) y del otro lado, **debe** quedar un 0 (cero).

$\frac{3}{x-1} - \frac{4}{x} \geq 1$	Inecuación dada

$$\frac{3}{x-1}-\frac{4}{x}+(-1)\geq 1+(-1)$$ Sumando -1 en ambos miembros

$$\frac{3}{x-1}-\frac{4}{x}-1\geq 0$$ Resolviendo

$$\frac{3x-4(x-1)-x(x-1)}{x(x-1)}\geq 0$$ Sumando fracciones algebraicas

$$\frac{3x-4x+4-(x^2-x)}{x(x-1)}\geq 0$$ Propiedad distributiva

$$\frac{-x+4-x^2+x}{x(x-1)}\geq 0$$ Sacando el paréntesis

$$\frac{4-x^2}{x(x-1)}\geq 0$$ Simplificando

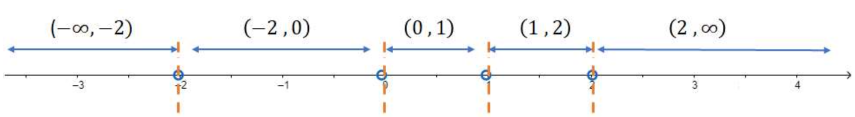
$$\frac{(2+x)(2-x)}{x(x-1)}\geq 0$$ Inecuación totalmente factorizada

Factores de la inecuación $(2+x)\,;\,(2-x)\;;\;x\;;\;(x-1)$

Tabla de doble entrada:

Raíces de los factores: $x=0\,;\,x=2\,;\,x=-2\,;\,x=1$

Intervalos: $(-\infty,-2)\;;\;(-2\,,0)\;;\;(0\,,1)\;;\;(1\,,2)\;;\;(2\,,\infty)$



Números testigo →	-3	-1	0.5	1.5	3
factores \ intervalo	$(-\infty,-2)$	$(-2\,,0)$	$(0\,,1)$	$(1\,,2)$	$(2\,,\infty)$
$(2+x)$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
$(2-x)$	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$
x	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
$(x-1)$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$
$\frac{(2+x)(2-x)}{x(x-1)}$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$

Luego, la inecuación $\frac{(2+x)(2-x)}{x(x-1)}\geq 0$, será positiva en, en primera instancia en:

$$(-2\,,0)\cup(1\,,2)$$

Como la inecuación admite la igualdad, debemos analizar en los extremos, excluyendo los valores que no pertenecen al Dominio de la inecuación. Luego:

$$S=[-2\,,0)\cup(1\,,2]$$

- Resuelva los ítems restantes del ejercicio

Ejercicio N° 15

Escribe como intervalos el mayor conjunto que cumple con cada enunciado:

a. El siguiente de un número es mayor que 3.
b. La suma entre el cuadrado de un número y el propio número es menor o igual que 2.
c. El producto entre un número y su siguiente es negativo.
d. El cociente entre un número y su siguiente es positivo.
e. El cociente entre un número y su anterior es menor que 1.

Ejercicio N° 16

Resuelva cada una de las siguientes desigualdades con valor absoluto. Exprese la solución, usando notación de intervalos y grafique el conjunto solución.

a.	$\mathbf{|2x-6| \le 4}$	*b.*	$\mathbf{8-|2x-1| \ge 6}$
c.	$\mathbf{|5x-2| > 9}$	*d.*	$\mathbf{5|m+3|-5 > 3}$
e.	$\mathbf{\left|\frac{s-2}{3}\right| < 2}$	*f.*	$\mathbf{4|3p-5|+7 \le 10}$

Repaso de conceptos

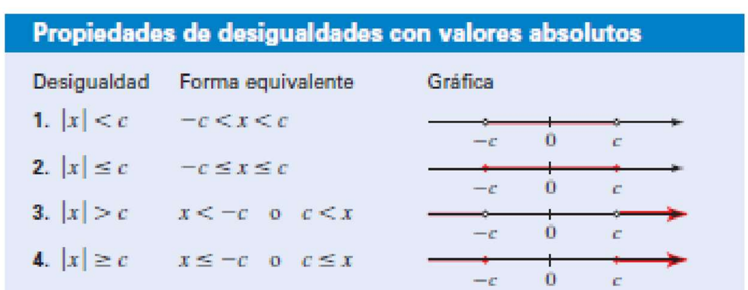
Debemos considerar el concepto de Valor absoluto y sus propiedades.
El valor **absoluto o módulo** de un número real cualquiera **x:**
Se simboliza | x |, es la distancia entre x y cero en la recta numérica, por lo cual nunca puede ser un valor negativo

Es decir que | x | ≥ 0

Definición:

Valor absoluto de un número es | x |, tal que: $|x| = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \ge 0 \end{cases}$

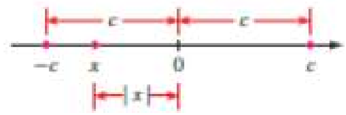
Propiedades de desigualdades con Valor absoluto



Propiedades de desigualdades con valores absolutos

Desigualdad	Forma equivalente	Gráfica
1. $|x| < c$	$-c < x < c$	
2. $|x| \le c$	$-c \le x \le c$	
3. $|x| > c$	$x < -c$ o $c < x$	
4. $|x| \ge c$	$x \le -c$ o $c \le x$	

Estas propiedades se pueden demostrar mediante la definición de valor absoluto.
Para demostrar la propiedad 1, nótese que $|x| < c$ menciona que la distancia de x a 0 es menor que c y en el siguiente gráfico se observa que esto es verdadero sí y sólo sí x está entre –c y c.



Resolveremos ejercicios b) y d).
Comenzamos con b)

$$8 - |2x - 1| \geq 6$$

$8 - \|2x - 1\| \geq 6$	Inecuación dada
$8 + (-8) - \|2x - 1\| \geq 6 + (-8)$	Sumamos (-8) a cada miembro.
$-\|2x - 1\| \geq -2$	Resolvemos.
$\frac{-\|2x - 1\|}{(-1)} \geq \frac{-2}{(-1)}$	Dividimos por (-1) a cada miembro.
$\|2x - 1\| \leq 2$	Resolvemos.
$-2 \leq 2x - 1 \leq 2$	Aplicamos la forma equivalente de la Propiedad 2.
$-2 + (1) \leq 2x - 1 + (1) \leq 2 + (1)$	Sumamos (1) a cada miembro.
$-1 \leq 2x \leq 3$	Resolvemos.
$-1 . \left(\frac{1}{2}\right) \leq 2x . \left(\frac{1}{2}\right) \leq 3 . \left(\frac{1}{2}\right)$	Multiplicamos por $\left(\frac{1}{2}\right)$ a cada miembro.
$-\left(\frac{1}{2}\right) \leq x \leq \left(\frac{3}{2}\right)$	Inecuación resuelta.

Resolver una desigualdad que contenga una variable significa encontrar todos los valores de esa variable que hagan verdadera la desigualdad. Por lo general, a diferencia de una ecuación, la desigualdad tiene infinidad de soluciones que forman un intervalo o una unión de intervalos en la recta real.
Mediante la notación por intervalos, el conjunto solución es el siguiente:

$$S = \left[-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$$

Geométricamente, el conjunto solución está formado por todos los números comprendidos en el intervalo dado anteriormente.

Verificación:
Debemos comprobar que el intervalo hallado como solución, verifica. Por lo tanto, elegimos un valor que esté dentro de ese intervalo y procedemos a la evaluación del mismo en la inecuación:

Para $x = 1$

$$8 - |2(1) - 1| \geq 6$$
$$8 - |2 - 1| \geq 6$$
$$8 - |1| \geq 6$$
$$8 - 1 \geq 6$$
$$7 \geq 6 \checkmark$$

Ahora resolveremos ejercicio d)

$$5|m + 3| - 5 > 3$$

En primer lugar, hay que dejar de un lado de la inecuación la expresión que contiene el valor absoluto, para poder resolver aplicando la propiedad correspondiente.

$5\|m + 3\| - 5 > 3$	Inecuación dada.
$5\|m + 3\| - 5 + (5) > 3 + (5)$	Sumamos (5) a cada miembro.
$5\|m + 3\| > 8$	Resolvemos.
$\left(\frac{1}{5}\right).5\|m + 3\| > \left(\frac{1}{5}\right) \cdot 8.$	Multiplicamos por $\left(\frac{1}{5}\right)$.
$\|m + 3\| > \left(\frac{8}{5}\right)$	Resolvemos.
$m + 3 > \left(\frac{8}{5}\right)\ (I) \quad \vee \quad m + 3 < -\left(\frac{8}{5}\right)\ (II)$	Aplicamos la forma equivalente de la Propiedad 3.
$(I) \quad m + 3 + (-3) > \left(\frac{8}{5}\right) + (-3)$	En (I), sumamos (-3) a cada miembro.
$m > -\left(\frac{7}{5}\right)$	Resolvemos. Obtenemos un intervalo solución de la inecuación.
$(II) \quad m + 3 + (-3) < -\left(\frac{8}{5}\right) + (-3)$	En (II), sumamos (-3) a cada miembro.
$m < -\left(\frac{23}{5}\right)$	Resolvemos. Obtenemos otro intervalo solución de la inecuación

$$S=\left(-\infty;-\frac{23}{5}\right)\cup\left(-\frac{7}{5};\infty\right)$$

Conjunto solución mediante notación de intervalos.

Geométricamente, el conjunto solución es el siguiente:

Finalmente se procede a la verificación e la inecuación, tomando valores de cada uno de los intervalos de solución.

Para $m=-6$

$$\begin{gathered}5|(-6)+3|-5>3\\5|(-3)|-5>3\\5.3-5>3\\15-5>3\\10>3\end{gathered}$$

Para $m=2$

$$\begin{gathered}5|(2)+3|-5>3\\5|5|-5>3\\25-5>3\\20>3\end{gathered}$$

Ejercicio N° 17

Justifica analíticamente si las rectas $3x-y=0$ e $y=-4+\frac{1}{8}x$ son secantes o paralelas. Verificar gráficamente tu respuesta.

SISTEMAS DE ECUACIONES

Ejercicio N° 18

Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones, por un método analítico

1. $\begin{cases}x+y=4\\2x-y=2\end{cases}$

2. $\begin{cases}2x+y=11\\x-2y=4\end{cases}$

3. $\begin{cases}2x-3y=12\\-x+\frac{3}{2}y=4\end{cases}$

4. $\begin{cases}2x+6y=0\\-3x-9y=18\end{cases}$

5. $\begin{cases}-x+\frac{1}{2}y=-5\\2x-y=10\end{cases}$

6. $\begin{cases}12x+15y=-18\\2x+\frac{5}{2}y=-3\end{cases}$

Revisión de conceptos

Un sistema de ecuaciones es un conjunto de ecuaciones con las mismas incógnitas. Una solución de un sistema es una asignación de valores para las incógnitas que cumplen cada una de las ecuaciones. Resolver un sistema significa encontrar todas las soluciones del sistema.

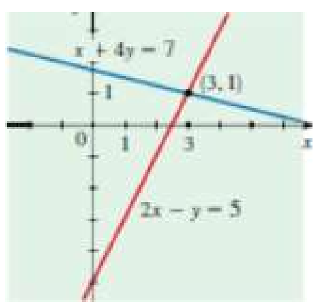
Ejemplo:

$$\begin{cases} 2x - y = 5 \quad Ec.(I) \\ x + 4y = 7 \quad Ec.(II) \end{cases}$$

Se puede comprobar que $x = 3\ e\ y = 1$ es una solución de este sistema.

$Ecuación\ (I)$	$Ecuación\ (II)$
$2x - y = 5$	$x + 4y = 7$
$2.(3) - (1) = 5$	$(3) + 4.(1) = 7$
$6 - 1 = 5$	$3 + 4 = 7$

La solución se puede escribir como par ordenado (3; 1).
Además de la solución analítica, siempre existe la interpretación geométrica o gráfica.



Existen métodos analíticos de resolución, que a continuación detallaremos aplicándolos a la resolución del primer sistema

Método de Sustitución

En este método empezamos con una ecuación en el sistema y despejamos una incógnita en términos de la otra.

Procedimiento:

- ***Despejar una incógnita.*** Escoja una ecuación y despeja una incógnita en términos de la otra incógnita.
- ***Sustituir.*** Para obtener una ecuación con una incógnita sustituya en la otra ecuación la expresión que encontró en el paso 1 y luego despeje dicha incógnita.
- ***Sustituir hacia atrás.*** Para despejar la incógnita restante sustituya en la expresión encontrada en el paso 1 la expresión que encontró en el paso 2.

Demostración para ejercicio 1)

$$\{ x + y = 4 \qquad Ec.(I)\ 2x - y = 2 \qquad Ec.(II)$$

- ***Despejar una incógnita.*** De la Ec. (I) despejamos la incógnita y.

$$y = -x + 4$$

$2x - y = 2$	Ecuación II
$2x - (-x + 4) = 2$	Sustituimos la expresión encontrada en el paso anterior.
$2x + x - 4 = 2$	Resolvemos paréntesis.
$2x + x - 4 + (4) = 2 + (4)$	Sumamos (4) en cada miembro.
$3x = 6$	Resolvemos y agrupamos términos semejantes.
$3x\,.\left(\frac{1}{3}\right) = 6.\left(\frac{1}{3}\right)$	Multiplicamos por $\left(\frac{1}{3}\right)$ a cada miembro.
$x = 2$	Encontramos valor de la variable.

- ***Sustituir.***

- ***Sustituir hacia atrás.*** Para determinar el valor de la variable restante, procedemos a sustituir la variable hallada en el paso 2 (variable $x = 2$) en la ecuación resultante del paso 1.

$y = -x + 4$	Ecuación hallada en paso 1.
$y = -(2) + 4$	Sustituimos por x=2 (Hallado en el paso 2).
$y = 2$	Encontramos valor de la variable y.

$$Solución: \{(2; 2)\}$$

Método de igualación

En este método despejamos en ambas ecuaciones del sistema, la misma variable (cualquiera de las dos) y posteriormente igualamos ambas ecuaciones.

Procedimiento:

- ***Despejar la misma incógnita.*** Escoja una variable (x o y) y despeje en ambas ecuaciones esa variable en términos de la otra.
- ***Igualar.*** Proceda igualando ambas ecuaciones y opere algebraicamente para obtener el valor de la variable.
- ***Sustituir hacia atrás.*** Para despejar la incógnita restante sustituya en cualquiera de las expresiones encontradas en el paso 1, la expresión que encontró en el paso 2.

Demostración para ejercicio 1)

$$\{ x + y = 4 \qquad Ec.(I)\ 2x - y = 2 \qquad Ec.(II)$$

- ***Despejar la misma incógnita en ambas ecuaciones.*** Para este desarrollo despejamos la variable y en términos de la variable x.

Para ecuación I	Para Ecuación II
$x + y = 4$	$2x - y = 2$
$y = -x + 4$	$y = 2x - 2$

- ***Igualar.***

$y_1 = y_2$	Igualamos ambas ecuaciones.
$-x + 4 = 2x - 2$	
$-x - 2x = -2 - 4$	Reordenamos y agrupamos términos semejantes.
$-3x = -6$	Resolvemos.
$-3x.\left(-\frac{1}{3}\right) = -6.\left(-\frac{1}{3}\right)$	Multiplicamos por $\left(-\frac{1}{3}\right)$ ambos miembros.
$x = 2$	Obtenemos el valor de la variable x.

- ***Sustituir hacia atrás.*** Para despejar la incógnita restante sustituya en cualquiera de las expresiones encontradas en el paso 1, la expresión que encontró en el paso 2.

Para ecuación I

$y = -x + 4$	Expresión hallada en el despeje.
$y = -(2) + 4$	Sustituimos el valor de x=2, encontrado en el paso 2.
$y = 2$	Obtenemos el valor de la variable y.

Para ecuación II

$y = 2x - 2$	Expresión hallada en el despeje.
$y = 2.(2) - 2$	Sustituimos el valor de x=2 encontrado en el paso 2
$y = 2$	Obtenemos el valor de la variable y.

$$Solución: \{(2; 2)\}$$

De la misma manera podemos proceder despejando la variable x en términos de la variable y. ¡¡Inténtelo!!

Método de Eliminación

Para resolver un sistema con este método tratamos de combinar las ecuaciones mediante sumas y restas para eliminar una de las incógnitas.

Procedimiento

- ***Ajustar los coeficientes.*** Multiplique una o más de las ecuaciones por números apropiados, de modo que el coeficiente de una incógnita de una ecuación sea el negativo de su coeficiente en la otra ecuación.
- ***Sumar las ecuaciones.*** Sume las dos ecuaciones para eliminar una incógnita y luego despeje la incógnita restante.
- ***Sustituir hacia atrás.*** En una de las ecuaciones originales sustituya el valor encontrado en el paso 2 y despeje la incógnita restante.

Demostración para ejercicio 1)

$$\{\ x + y = 4 \qquad Ec.(I)\ 2x - y = 2 \qquad Ec.(II)$$

- ***Ajustar los coeficientes.*** Como los coeficientes en términos de y son negativos entre sí, podemos sumar las ecuaciones para eliminar y.
- ***Sumar las ecuaciones.***

$\{\, x+y=4 \quad Ec.(I)\ 2x-y=2 \quad Ec.(II)$	Sistema dado.
$3x \quad = 6$	Sumamos las ecuaciones.
$3x\,.\left(\frac{1}{3}\right)=6.\left(\frac{1}{3}\right)$	Multiplicamos por $\left(\frac{1}{3}\right)$ ambos miembros.
$x=2$	Obtenemos la variable x.

- ***Sustituir hacia atrás.*** Sustituimos x=2 en una de las ecuaciones originales, por ejemplo en Ec. (I) y despejamos y.

Para ecuación I

$x+y=4$	Ecuación dada.
$2+y=4$	Sustituimos por x=2.
$2+y+(-2)=4\ +(-2)$	Sumamos (-2) en cada miembro.
$y=2$	Resolvemos y obtenemos la variable y.

$$Solución: \{(2;2)\}$$

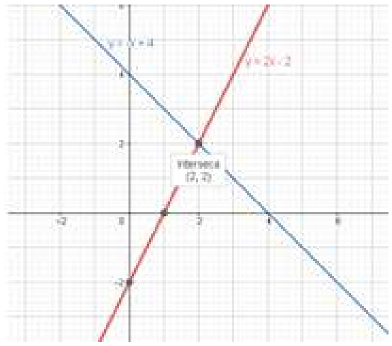
Interpretación gráfica

Procedimiento:

- ***Trazar la gráfica de cada función.*** Exprese cada ecuación de forma apropiada para poder graficar correctamente. Se sugiere expresar la ecuación de la recta e la forma pendiente-intersección.
- ***Encontrar los puntos de intersección.*** Las soluciones son las coordenadas x e y de los puntos de intersección.

Si analizamos lo realizado anteriormente, en el método de Igualación ya determinamos ambas ecuaciones e la forma pendiente- intersección. Por lo tanto, ya tenemos las ecuaciones para poder graficar.

$$Ecuación\ (I) \quad \rightarrow \quad y=-x+4$$
$$Ecuación\ (II) \quad \rightarrow \quad y=2x-2$$



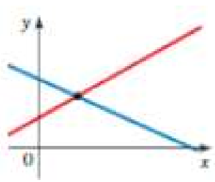
Es necesario realizar un análisis del número de soluciones de un sistema lineal con dos incógnitas. Ya hemos determinado que la gráfica de un sistema lineal con dos incógnitas es un par de rectas, de modo que para resolver gráficamente debemos encontrar el punto o los puntos de intersección de las rectas.

Hay tres posibles resultados para resolver dichos sistemas;

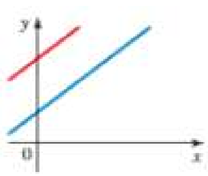
1. El sistema tiene exactamente una solución.
2. El sistema no tiene solución.
3. El sistema tiene infinitas soluciones.

Cuando un sistema no tiene solución se lo denomina *Incompatible o Inconsistente*.

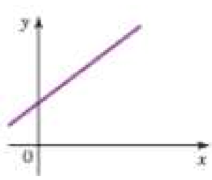
Cuando se tiene solución, si ésta es única es *Compatible determinado* y si las soluciones son infinitas, es *Compatible Indeterminado*.



Las rectas se cruzan en un solo punto. El sistema tiene una sola solución. *Es Compatible Determinado*.



Las rectas son paralelas y no se cruzan. El sistema no tiene solución. *Es Incompatible*.



Las rectas coinciden, las ecuaciones son para la misma recta. El sistema tiene infinitas soluciones. Es *Compatible Indeterminado*.

- Resuelva los ítems restantes del ejercicio

Ejercicio N° 19

Resuelve los siguientes problemas:

A) A un empleado de una carpintería se le olvidó anotar cuántas mesas de 3 patas y cuántas de 4 patas tenía que preparar para un pedido.
Si le trajeron 27 tableros y 93 patas. ¿Cuántas mesas de cada tipo puede armar para que no le falten ni le sobren patas?

B) Determine dos números cuya suma sea 34 y cuya diferencia sea 10.

C) Martín invierte sus ahorros en dos cuentas, una le da el 5% y la otra el 8% de interés simple al año. Su interés anual es de $1180. ¿Cuánto invirtió a cada cuenta si sus ahorros eran $20.000?

D) Si la cantidad de alambre necesaria para cercar un campo rectangular es de 3000m. ¿Cuáles son las dimensiones del campo si se sabe que la diferencia entre el ancho y el largo es de 50 metros?

E) En una bicicletería hay entre bicicletas y triciclos 23 vehículos. La cantidad de ruedas es 49. ¿cuántas bicicletas y cuántos triciclos hay?

F) Un lado de un triángulo isósceles mide 3cm menos que la suma de los dos lados iguales. El perímetro es de 33cm. ¿Cuáles son las medidas de los lados del triángulo?

G) Si aumenta en dos centímetros el largo y el ancho de un rectángulo, el perímetro resulta ser de 24cm. Si el largo se disminuye en dos centímetros el rectángulo se transforma en un cuadrado. ¿Cuál es el área de dicho rectángulo?

H) ¿Cuánto miden los lados de un aula rectangular cuyo perímetro es de 21m y si superficie es de $26m^2$?

I) En un rombo de 8cm de perímetro, una de las diagonales mide el doble de la otra. ¿cuál es el área del rombo?

Revisión de conceptos

Muchas veces cuando usamos ecuaciones para resolver problemas en las distintas áreas de estudio obtenemos sistemas como los vistos anteriormente. Se ha planteado una guía para trabajar con sistemas de ecuaciones lineales, que a continuación se resume.

Procedimiento

1. ***Identificar las incógnitas.*** Identifique las cantidades que el problema pide encontrar. Generalmente, éstas se encuentran realizando una lectura cuidadosa de la pregunta planteada al final del problema. Introduzca notación acorde para las incógnitas (llámelas x, y o mediante otras letras).
2. ***Expresar todas las cantidades desconocidas en términos de las incógnitas.*** Lea otra vez el problema y exprese todas las cantidades mencionadas en el problema en términos de las incógnitas que haya definido en el paso 1.
3. ***Establecer un sistema de ecuaciones.*** Encuentre los datos importantes del problema que den las relaciones entre las expresiones que haya encontrado en el paso 2. Establezca un sistema de ecuaciones (o un modelo) que exprese estas relaciones.
4. ***Resolver el sistema e interpretar los resultados.*** Resuelva el sistema que haya encontrado en el paso 3, verifique sus soluciones y dé su respuesta final como una frase que conteste la pregunta planteada en el problema.

Vamos a resolver, a modo de ejemplo, los problemas A); D) y F)

A) A un empleado de una carpintería se le olvidó anotar cuántas mesas de 3 patas y cuántas de 4 patas tenía que preparar para un pedido.
Si le trajeron 27 tableros y 93 patas. ¿Cuántas mesas de cada tipo puede armar para que no le falten ni le sobren patas?

1. ***Identificar las incógnitas***. Nos pide averiguar cuántas mesas de 3 patas y cuántas de 4 patas se pueden armar. Allí identificamos nuestras incógnitas.

$$x\text{: } patas\ para\ un\ tipo\ de\ mesa$$
$$y\text{: } patas\ para\ otro\ tipo\ de\ mesa$$

2. ***Expresar todas las cantidades desconocidas en términos de las incógnitas***

$$Mesa\ de\ 3\ patas\text{: } 3.x$$
$$Mesa\ de\ 4\ patas\text{: } 3.y$$

$$Cantidad\ de\ tableros\ para\ mesas: 27$$
$$Número\ de\ patas: 93$$

3. ***Establecer un sistema de ecuaciones.***
   En base a los datos aportados por el problema, podemos establecer las relaciones que llevarán a las ecuaciones finales del sistema.
   El total de tableros para hacer las mesas es de 27, eso incluye las mesas de 3 patas y 4 patas. Entonces la ecuación se plantea:
   $$x + y = 27$$
   El número de patas es 93, aquí también están incluidas las mesas de 3 y 4 patas. Pero a diferencia de la ecuación anterior, debemos discriminar, que sólo estamos hablando de patas, por lo tanto, utilizamos la relación que sólo especifica esto.
   $$3x + 4y = 93$$
   De esta manera, queda determinado nuestro sistema de ecuaciones lineales.

$$\{x + y = 27 \quad Ec.\ I\ 3x + 4y = 93 \quad Ec.II$$

4. ***Resolver el sistema e interpretar los resultados.*** Para resolver el sistema, podemos utilizar cualquiera de los métodos analíticos explicados anteriormente.

Vamos a utilizar el Método de Sustitución:

$3x + 4y = 93$	Ecuación II
$3x + 4.(-x + 27) = 93$	Sustituimos la expresión encontrada en el paso anterior.
$3x - 4x + 108 = 93$	Resolvemos paréntesis.
$3x - 4x = 93 - 108$	Agrupamos términos semejantes.
$-x = -15$	Resolvemos.
$-x.(-1) = 15.(-1)$	Multiplicamos por (-1) a cada miembro.
$x = 15$	Encontramos valor de la variable x.

De la Ec. (I) despejamos la incógnita y

$$y = -x + 2$$

Una vez hallada la variable x, hacemos el reemplazo en la ecuación despejada en el

paso 1, para encontrar el valor de la variable y.

$y = -x + 27$	Ecuación hallada en paso 1.

$y = -(15) + 27$	Sustituimos por x=15(Hallado en el paso (2).
$y = 12$	Encontramos valor de la variable y.

La solución hallada es $S = \{(15; 12)\}$. Debemos verificar para dar la respuesta final. En la primera ecuación del sistema, que hace referencia al número de mesas totales:

$$x + y = 27$$
$$15 + 12 = 27$$

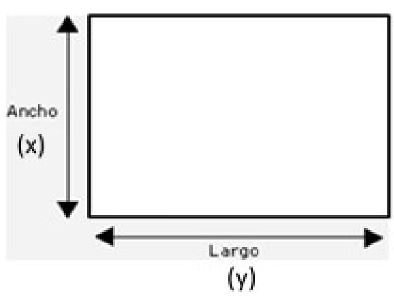
En la segunda ecuación del sistema, que hace referencia al número de patas:

$$3x + 4y = 93$$
$$3(15) + 4(12) = 93$$
$$45 + 48 = 93$$

Una vez verificadas, podemos dar la

Respuesta: *"Puede armar 15 mesas de 3 patas y 12 mesas de 4 patas, para que no le falten ni sobren patas"*

D) Si la cantidad de alambre necesaria para cercar un campo rectangular es de 3000m. ¿Cuáles son las dimensiones del campo si se sabe que la diferencia entre el ancho y el largo es de 50 metros?



Establecemos que el campo, de forma rectangular, tiene las siguientes dimensiones. Por lo tanto, llamamos:

$$longitud\ del\ largo: y$$
$$longitud\ del\ ancho: x$$

Menciona que la cantidad de alambre para cercar el campo es de 3000 m, lo que implica que este es su perímetro. El perímetro está dado por:

$$Perímetro = 2 \times\ long.del\ ancho + 2 \times\ long.del\ largo$$

$$3000\ m = 2.x + 2.y$$

Finalmente, hacer referencia que la relación entre el ancho y el largo es de 50 m. Esto en términos de ecuación se traduce:

$$long\ del\ ancho - long\ del\ largo = 50m$$

$$x - y = 50m$$

De esta manera, ya tenemos nuestro sistema de ecuaciones lineales:

$$\{2x + 2y = 3000 \quad Ec.(I)\; x - y = 50 \quad (Ec.II)$$

Vamos a utilizar el Método de Eliminación:

Aplicamos en la ecuación (II) una multiplicación por un factor (2) a cada término de la misma. Luego restamos las ecuaciones, para simplificar y dejar en términos de una variable.

$$\{\,2x + 2y = 3000 \quad Ec.(I)\; (2)x - (2)y = (2).50 \quad Ec.(II)$$

Multiplicamos por (2) ambos miembros de la Ec. II

$$4y \quad = 2900$$

Restamos las ecuaciones.

$$4y\,.\left(\frac{1}{4}\right) = 2900.\left(\frac{1}{4}\right)$$

Multiplicamos por $\left(\frac{1}{4}\right)$ ambos miembros.

$$y = 725$$

Obtenemos la variable y.

Sustituimos $y = 775$ en una de las ecuaciones originales, por ejemplo, en Ec. (II) **y** despejamos x.

Para ecuación II

$$x - y = 50$$

Ecuación dada.

$$x - 725 = 50$$

Sustituimos por y=725.

$$x - 725 + (725) = 50 + (725)$$

Sumamos (725) en cada miembro.

$$x = 775$$

Resolvemos para obtener la variable y.

La solución hallada es $S = \{(775; 725)\}$. Debemos verificar para dar la respuesta final.

En la primera ecuación del sistema, que hace referencia al perímetro:

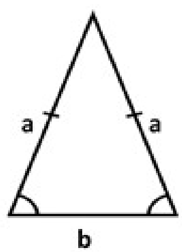
$$2x + 2y = 3000$$
$$2(775) + 2(725) = 3000$$
$$1550 + 1450 = 3000$$

En la segunda ecuación del sistema, que hace referencia a la diferencia entre el largo y el ancho:

$$x - y = 50$$
$$775 - 725 = 50$$

Una vez verificadas, podemos dar la respuesta: *"Las dimensiones del campo son: el largo 725 m y el ancho 775 m"*

F) Un lado de un triángulo isósceles mide 3cm menos que la suma de los dos lados iguales. El perímetro es de 33cm. ¿Cuáles son las medidas de los lados del triángulo?



En primer lugar, hay que reconocer que un triángulo isósceles, es aquel triángulo que posee dos lados iguales y uno desigual.
A continuación, le damos nombre a las variables:

$$a\text{: } long\ de\ los\ lados\ iguales$$
$$b\text{: } longitud\ del\ lado\ desigual$$

La primera relación dice que el lado distinto mide 3 cm menos que la suma de los lados iguales. Esto se traduce:

$$b = (a + a) - 3$$
$$b = 2a - 3$$
$$2a - b = 3$$

La otra ecuación está dada por la relación de perímetro del triángulo isósceles.

$$Perímetro = a + a + b$$
$$33\ cm = 2a + b$$

De esta manera, ya tenemos nuestro sistema de ecuaciones lineales:

$$\{2a - b = 3 \ \ Ec.(I)\ 2a + b = 33 \ \ Ec.(II)$$

Vamos a utilizar el Método de Igualación

Para ecuación I	Para Ecuación II
$2a - b = 3$	$2a + b = 33$
$b = 2a - 3$	$b = -2a + 33$

$$y_1 = y_2$$

Igualamos ambas ecuaciones.

$$2a - 3 = -2a + 33$$

$2a + 2a = 33 + 3$ Reordenamos y agrupamos términos semejantes.

$4a = 36$ Resolvemos.

$4a.\left(\frac{1}{4}\right) = 36.\left(\frac{1}{4}\right)$ Multiplicamos por $\left(\frac{1}{4}\right)$ ambos miembros.

$a = 9$ Obtenemos el valor de la variable a.

En el siguiente paso, debemos despejar la incógnita restante, sustituimos en cualquiera de las expresiones encontradas en el paso 1, la expresión que encontró en el paso 2.

Para ecuación I

$b = 2a - 3$ Expresión hallada en el despeje.

$b = 2.(9) - 3$ Sustituimos el valor de a=9, encontrado en el paso 2.

$b = 15$ Obtenemos el valor de la variable b.

La solución hallada es $S = \{(9; 15)\}$. Debemos verificar para dar la respuesta final. En la primera ecuación del sistema, que hace referencia a la diferencia entre la suma de los lados iguales y el lado desigual:

$$2a - b = 3$$
$$2(9) - 15 = 3$$
$$18 - 15 = 3$$

En la segunda ecuación del sistema, que hace referencia al perímetro del triángulo isósceles:

$$2a + b = 33$$
$$2.(9) + 15 = 33$$
$$18 + 15 = 33$$

Una vez verificadas, podemos dar la respuesta: *"Las medidas de los lados iguales del triángulo son 9 cm y el lado desigual mide 15 cm"*

Ejercicio N° 20

Para que la solución del sistema:

a. $\{3x - ky = 5 \;\; -2kx - 3y = 4 \quad sea\ S = \{(1, -2)\}, el\ valor\ de\ k\ debe\ ser$___________

b. $\begin{cases}(5+a)x-y=b\\(4-b)x-ay=-4\end{cases}$ $sea\ S=\{(2{,}3)\}, debe\ cumplirse\ que\ a=$ ___ $y\ b=$ ___

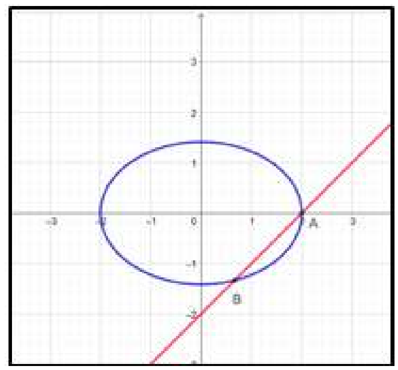
- Se deja para el alumno resolver

Ejercicio N° 21

En la siguiente imagen se ha graficado la recta $y=x-2$ y la elipse de ecuación $1=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}$.

a. A partir de la gráfica, ¿cuáles con las abscisas de los puntos de intersección entre ambas curvas?

b. Determine analíticamente las ordenadas y las abscisas de los puntos A y B.



Para resolver este ejercicio y los que continúan, debemos tener en cuenta los conceptos analizados para Sistemas de Ecuaciones. En primer lugar, hay que determinar cuál es el sistema de ecuaciones a partir de los datos proporcionados. Proceder a resolverlo empleando métodos analíticos.

Sugerencia: usar Método de Sustitución.

a) A partir de la observación gráfica, debemos aproximar "a ojo", los valores de abscisas (valores de x) de los puntos de intersección, A y B.

$$A=\{(\dots;\dots)\}$$
$$B=\{(\dots;\dots)\}$$

b) Analíticamente debemos establecer el sistema de ecuaciones y proceder a resolverlo.

$$\begin{cases}x-y=2 & Ec.(I)\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1 & Ec.(II)\end{cases}$$

Aplicamos Método de Sustitución, para esto despejamos de la Ecuación (I) la variable y, luego sustituimos ésta en la Ecuación (II).

$$De\ la\ Ec.(I)\rightarrow y=x-2$$

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$$ Ecuación (II) dada.

$$\frac{x^2}{4}+\frac{(x-2)^2}{2}=1$$ Reemplazamos la variable y.

$$\frac{x^2}{4}+\frac{(x^2-4x+4)}{2}=1$$

Desarrollamos Cuadrado de binomio.

$$\frac{x^2}{4}+\frac{x^2}{2}-2x+2=1$$

Resolvemos.

$$\frac{3x^2}{4}-2x+2+(-1)=1+(-1)$$

Agrupamos términos semejantes. Sumamos (-1) en ambos miembros.

$$\frac{3x^2}{4}-2x+1=0$$

Resolvemos la ecuación cuadrática por Baskara.

$$x_1=2 \quad \wedge \quad x_2=\frac{2}{3}$$

Valores de abscisas obtenidos.

Al quedarnos planteada una ecuación cuadrática, obtenemos dos valores de ceros o raíces, que serán los valores de abscisas de los puntos A y B. Finalmente, reemplazamos estos valores de x, en la ecuación (I) y obtenemos los valores de y.

$$En\ la\ Ec.(I) \rightarrow y=x-2$$

$$Para\ x_1=2$$

$$y=(2)-2$$

$$y=0$$

$$Para\ x_2=\frac{2}{3}$$

$$y=\left(\frac{2}{3}\right)-2$$

$$y=-\frac{4}{3}$$

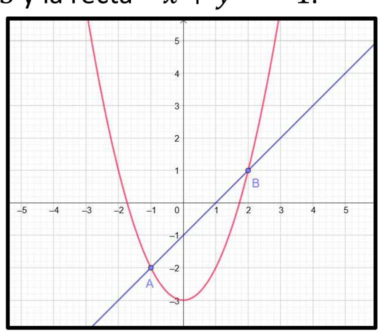
De esta forma, los valores de ordenadas y abscisas de los puntos son:

$$A=\left\{\left(\frac{2}{3};-\frac{4}{3}\right)\right\}$$

$$B=\{(2;0)\}$$

Ejercicio N° 22

Determine analítica y gráficamente los puntos de intersecciones entre la gráfica de $y=x^2-3$ y la recta $-x+y=-1$.



Ejercicio N° 23 Dada la ecuación de la circunferencia $x^2+y^2=9$, y una recta $y=x+4$, determine analíticamente si la recta es secante, tangente o exterior a la circunferencia.

Ejercicios adicionales propuestos

- Los siguientes ejercicios se resuelven siguiendo los ejemplos anteriores.

1. Resuelva cada una de las siguientes ecuaciones.

   a. $x - \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}x - 5 = 0$

   b. $2m - \frac{m}{2} + \frac{m+1}{4} = 6m$

   c. $(t-4)^2 = (t+4)^2 + 32$

   d. $\frac{4}{x-1} + \frac{2}{x+1} = \frac{35}{x^2-1}$

   e. $6x(x-1) = 21 - x$

   f. $3y^2 + 5y = 2$

   g. $-p(p+3) = \frac{7}{4}$

   h. $m^2 = \frac{3}{4}m - \frac{1}{8}$

   i. $\frac{x+5}{x-2} = \frac{5}{x+2} = \frac{28}{x^2-4}$

   j. $2x + \sqrt{x+1} = 8$

   k. $x^4 - 13x^2 + 40 = 0$

   l. $v^{\frac{4}{3}} - 5v^{\frac{2}{3}} + 6 = 0$

2. Despeje la incógnita encerrada entre llaves en cada una de las siguientes igualdades.

   a. $\{x\}\ \frac{ax+b}{cx+d} = 2$

   b. $\{a\}\ \frac{a+1}{b} = \frac{a-1}{b} + \frac{b+1}{a}$

   c. $\{r\}\ F = G\frac{mM}{r^2}$

   d. $\{i\}\ A = P\left(1 + \frac{i}{100}\right)^2$

   e. $\{t\}\ h = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t$

3. Resuelva cada una de las siguientes desigualdades. Exprese la solución, usando notación de intervalos y grafique el conjunto solución.

   a. $-1 < r + 5 < 4$

   b. $2(7x - 3) \leq 12x + 16$

   c. $-3(y - 5) > 2(3y + 2)$

   d. $-\frac{4}{3}(m + 3) < -2\left(\frac{3}{4}m - 2\right)$

   e. $3x^2 - 3x < 2x^2 + 4$

   f. $x^3 - 4x > 0$

   g. $\frac{2m+1}{m-5} \leq 3$

   h. $\frac{6}{x-1} - \frac{6}{x} \geq 1$

   i. $\frac{x+2}{x+3} < \frac{x-1}{x-2}$

   j. $\left|\frac{r+1}{2}\right| \geq 4$

   k. $3 - |2x + 4| \leq 1$

   l. $|2x - 3| \leq 0,4$