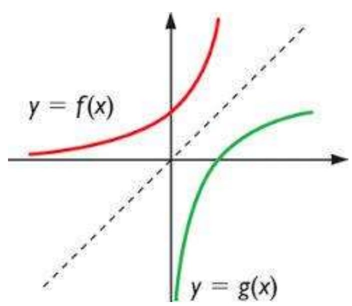
UNIDAD N°5

Funciones exponenciales y logarítmicas



El material que compone estas notas ha sido elaborado por la Prof. Estrellita Sobisch y revisado por las Profesoras Gisela Fitt y Celeste Scatragli, para brindarles a todos los estudiantes que cursen el módulo de Matemática, correspondiente al INGRESO de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Nacional de Cuyo, la posibilidad de revisar conceptos y habilidades de la disciplina adquiridos en el nivel medio, que son necesarios para poder cursar exitosamente las materias del Ciclo Básico.

Para el mismo se utilizaron las notas de clases de los docentes y como bibliografía principal:

- STEWART, J y Otros. (2001). *Precálculo (3ra ed.) México D. F., International Thomson Editores, S.A.*
- LARSON, Ron. (2012) Precálculo (8ª. Ed) México- Cengage Learning Editores, S.A.
- BIANCHINI, Edwaldo y otros-Vol. 1 (Primera ed.)- Brasil -Recife PE, Editora Moderna Ltda.

ÍNDICE

LA FUNCIÓN EXPONENCIAL

LA FUNCIÓN LOGARÍTMICA

A. LA FUNCIÓN EXPONENCIAL

1. Introducción

Imaginemos que una institución bancaria tiene una tasa de interés fijo e igual a **i**% al mes para una determinada inversión. Supongamos que un inversor inicia con un capital de P pesos, una aplicación en este tipo de inversión. Vamos a analizar mes a mes el comportamiento de su saldo, suponiendo que no hace ninguna retirada de dinero.

Después del 1° mes tenemos:

Capital : P

Interés : $P \cdot i$

Saldo S(1) : $P + P \cdot i = P(1+i)$

Después del 2° mes tenemos:

Capital : $P(1+i)$

Interés : $[P(1+i)] \cdot i = P(1+i) \cdot i$

Saldo S(2) : $P(1+i) + P(1+i) \cdot i = P(1+i) \cdot (1+i) = P(1+i)^2$

Procediendo de la misma manera, llegaremos a la conclusión

Después del 3° mes tenemos un: **Saldo (3) S(3)**$= P(1+i)^3$

Después del 4° mes tenemos un: **Saldo (4) S(4)**$= P(1+i)^4$

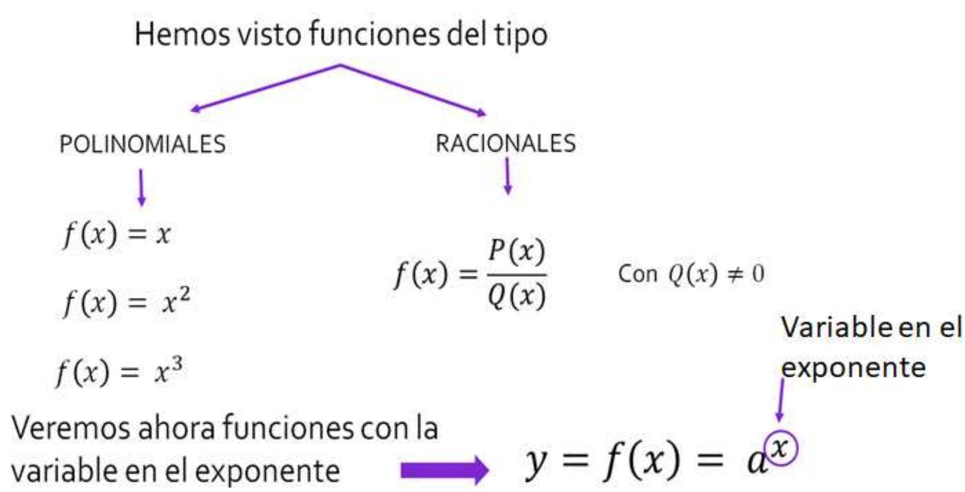
$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Después del *enésimo* mes tenemos un: **Saldo(n)** **S(n)**$= P(1+i)^n$

La fórmula utilizada **S(n)**$= P(1+i)^n$ es una función del tipo exponencial, pues la variable n aparece en el exponente.



Con la finalidad de estudiar esta función haremos un **breve repaso** de las propiedades de la potencia.

2. Potencia de exponente entero y exponente racional.

Recordemos que $R^* = R - \{0\}$ y $Q^* = Q - \{0\}$

Resumen de las propiedades

Para $x \in R^*$ e $y \in R^*$; $a \in Q$; $b \in Q$

a. $x^a \cdot x^b = x^{a+b}$ (*Producto de potencias de igual base*)
b. $x^a \div x^b = x^{a-b}$ (*Cociente de potencias de igual base*)
c. $(x \cdot y)^a = x^a \cdot y^a$ (*Distributiva de la potencia con respecto al producto*)
d. $\left(\frac{x}{y}\right)^a = \frac{x^a}{y^a}$ (*Potencia de una expresión fraccionaria*)
e. $(x^a)^b = x^{a \cdot b}$ (*Potencia de otra potencia*)
f. $x^1 = x$
g. $x^0 = 1$
h. $(x)^{-a} = \left(\frac{1}{x}\right)^a$ (*Exponente negativo*)

Además de estas propriedades, si el exponente es un racional en su expresión fraccionaria, tenemos:

$(x)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$; donde $p \in Z$ y $q \in Z^*$ (o sea p es un entero y q es un entero positivo)

Ejemplo 1

Calcular, en caso de que sea posible a una sola potencia

a. $2^3 \cdot 2^4 = 2^{3+4} = 2^7 = 128$
b. $3^{\frac{3}{4}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{3}{4}+\frac{1}{2}} = 3^{\frac{5}{4}}$ *o* $\sqrt[4]{3^5} = 3\sqrt[4]{3}$
c. $5^4 \div 5^3 = 5^{4-3} = 5^1 = 5$
d. $3^5 \div 3^5 = 3^{5-5} = 3^0 = 1$
e. $2^4 \div 2^5 = 2^{4-5} = 2^{-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}$
f. $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{5}} \div \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{4}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{5}-\frac{3}{4}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{3}{20}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{3}{20}} = \sqrt[20]{\left(\frac{3}{2}\right)^3}$
g. $\left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^3 =$

(como tenemos bases diferentes, nos vemos obligados a hacer las cuentas)

$\left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{9}{16} \cdot \frac{8}{125} = \frac{9}{250}$

h. $\left(\frac{2}{5}\right)^{-2} \div \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{3}{4}} =$

(también tenemos bases diferentes, pero es posible obtener las mismas bases aplicando la propiedad del exponente negativo)

$\left(\frac{2}{5}\right)^{-2} \div \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{3}{4}} = \left(\frac{5}{2}\right)^2 \div \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{3}{4}} = \left(\frac{5}{2}\right)^{2-\frac{3}{4}} = \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{5}{4}} = \sqrt[4]{\left(\frac{5}{2}\right)^5} = \frac{5}{2}\sqrt[4]{\frac{5}{2}}$

Ejemplo 2

Efectuar:

a. $(a^3)^2 = a^{3 \cdot 2} = a^6$

b. $\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{3}{4}} = a^{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}} = a^{\frac{3}{8}} = \sqrt[8]{2^3} = \sqrt[8]{8}$

c. $2 \cdot \sqrt[3]{(0,5)^2} = 2 \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}} = 2 \cdot (2^{-1})^{\frac{2}{3}} = 2 \cdot 2^{-\frac{2}{3}} = 2^{1-\frac{2}{3}} = 2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$

d. $2^{-x} \div 2^{x} = 2^{-x-x} = 2^{-2x}$

e. $3^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{3} = 3^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}} = 3^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{3^5}$

Ejercicios propuestos

1. Reduzca a una sola potencia:

a. $a^5 \cdot a^4 \cdot a \cdot a^{-3}$

b. $\left(\frac{1}{2}\right) \div \left(\frac{1}{2}\right)^2$

c. $\left(\frac{2}{5}\right) \div \left(\frac{2}{5}\right)^{-2}$

d. $x \div x^3$

2. Efectúe

a. $\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0$

b. $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$

c. $3^{x-2} \div 3^{x-3}$

d. $(0,2)^4 \cdot 5^4 \cdot (0,2)^{-2}$

3. Potencia de exponente real.

Es importante saber que las propiedades de las potencias para exponentes racionales permanecen válidas para exponentes irracionales.

Recordando que la unión de los números racionales Q , con los irracionales I, o sea $Q \cup I$, dá como resultado los números reales R, tenemos:

Las propiedades de las potencias para exponentes racionales permanecen válidas para exponentes reales (si la base es positiva).

Observación:

- En el caso particular de α real y positivo, tenemos $0^{\alpha} = 0$
- Sin embargo 0^0 es una indeterminación.

Ejemplos

Calcular:

a. $3^{\sqrt{2}} \cdot 3^5 = 3^{\sqrt{2}+5}$

b. $5^{3\pi} \div 5^{2\pi} = 5^{3\pi-2\pi} = 5^{\pi}$

c. $\left(\frac{3}{4}\right)^{\sqrt{5}} \div \left(\frac{3}{4}\right)^{\sqrt{5}} = \left(\frac{3}{4}\right)^{\sqrt{5}-\sqrt{5}} = \left(\frac{3}{4}\right)^0 = 1$

4. La Función Exponencial – Definición.

Recordando el ejemplo de la introducción, podemos definir la función exponencial así:

> Sea a un número real positivo y diferente de 1 ($a \in R_{+}^{*}$ y $a \neq 1$) definimos la función exponencial con base a a la función
>
> $f\colon R \to R_{+}^{*}$ definida por $f(x) = a^{x}$

Son ejemplos de funciones exponenciales:

a. $f(x) = 5^{x}$ (en este caso la base es 5)
b. $f(x) = (0{,}4)^{x}$ (en este caso la base es 0,4)
c. $f(x) = \left(\sqrt{5}\right)^{x}$ $(en\ este\ caso\ la\ base\ es\ \sqrt{5})$

1. TRABAJO PRÁCTICO N° 5

Ejercicio 1. En las siguientes funciones definidas, identifique las que son funciones exponenciales.

a) $y = 10^{x}$	b) $f(x) = x^{10}$	c) $y = 10x$
d) $y = \frac{10}{x}$	e) $f(x) = (0{,}1)^{x}$	f) $y = \frac{2^{x}}{3^{x}}$

Si la base a es 10, la misma se conoce como **base decimal** y la función $f(x) = 10^{x}$ se conoce como **función exponencial decimal**, haciendo referencia a la base 10.

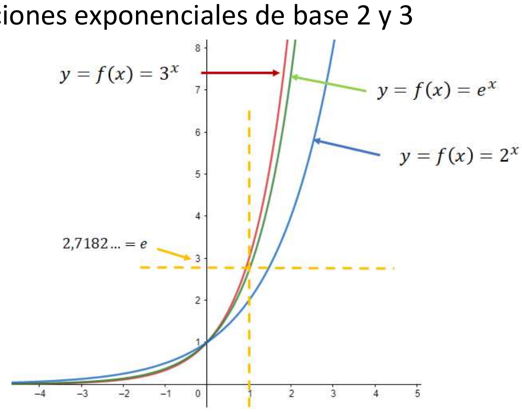
En numerosas aplicaciones, la opción más adecuada para una base es el número irracional

$$e = 2.718281828 \ldots$$

conocido como número *neperiano.*

Recuerde que $2 < e < 3$

Cuando este número es usado como base de la potencia, la función dada por $f(x) = e^{x}$ recibe el nombre de **función exponencial natural**. Su gráfica se ilustra en la siguiente figura y se compara con las funciones exponenciales de base 2 y 3



Asegúrese de ver que para la función exponencial $f(x) = e^x$, e sea la constante 2.718281828 ..., mientras x sea la variable.

Para todos los otros casos es sólo llamada **función exponencial**.

5. Gráfico de la Función Exponencial.

Las gráficas de todas las funciones exponenciales tienen características semejantes.
Analizaremos la imagen de la gráfica de funciones exponenciales a través de algunos ejemplos.

Ejemplo 1

$$y = f(x) = 2^x$$

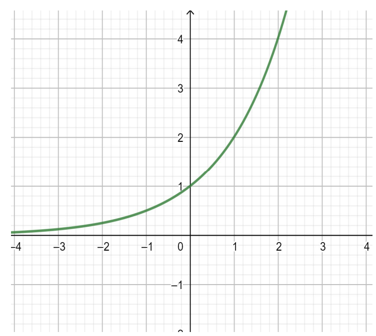
Construimos una tabla de valores con los puntos pertenecientes al gráfico cartesiano de la función, atribuyendo valores arbitrarios a x y, enseguida, calculando el valor de $f(x)$ para cada uno de esos valores. Ejemplo:

$y = f(-2) = 2^{-2} = \frac{1}{4}$; $y = f(-1) = 2^{-1} = \frac{1}{2}$; $y = f(0) = 2^0 = 1$

$y = f(1) = 2^1 = 2$; $y = f(2) = 2^2 = 4$

x	$f(x) = 2^x$
-2	$1/4$
-1	$1/2$
0	1
1	2
2	4

Tabla



Gráfico

Observamos que cuanto menor es el valor de x, más los puntos del gráfico de la función se aproximan del $eje\ x$, sin embargo, no llega a tocarlo nunca. La recta sostén del $eje\ x$, por este motivo es llamada de asíntota a la curva; palabra que viene del latín "*asymptota"* que significa "$línea$" .

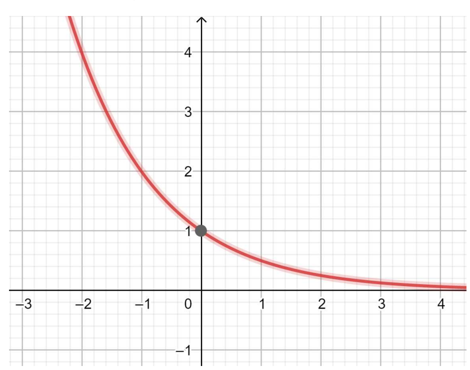
Ejemplo 2

$$y = f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

Procediendo del mismo modo que en el ejemplo anterior, tenemos:

x	$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
-2	4
-1	2
0	1
1	$1/2$
2	$1/4$

Tabla



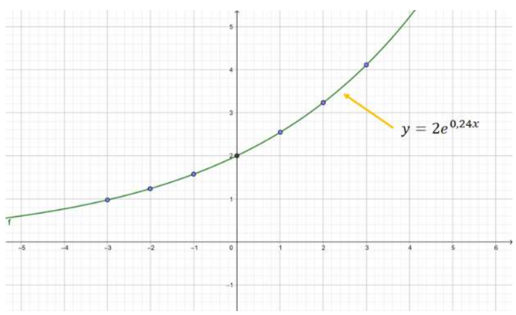
Gráfico

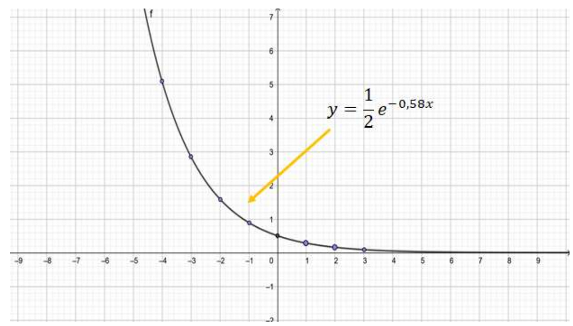
Observamos que cuanto mayor es el valor de x, más los puntos del gráfico de la función se aproximan del $eje\ x$, sin embargo, no llega a tocarlo nunca. Por este motivo, la recta sostén del $eje\ x$, es una asíntota a la curva.

Ejemplos 3: Función exponencial natural

Trace la gráfica de cada una de las funciones exponenciales naturales.

a) $y = 2e^{0,24x}$
b) $y = \frac{1}{2}e^{-0,58x}$





ϕ

De lo expuesto anteriormente podemos clasificar la función $y = f(x) = a^x$ en:

- Creciente si $a > 1$
- Decreciente cuando $0 < a < 1$

Caracterización de la Función Exponencial:

Podemos resumir las propiedades de la gráfica de la función $f(x) = a^x$

1. Dominio: R
2. Imagen: R_+^* (reales positivos)
3. Siempre pasa por $P(0, 1)$
4. La función es inyectiva, o sea que: $f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$
5. La función es sobreyectiva, o sea que: $\forall\, y \in R_+^*$, $existe\ x \in R\ tal\ que\ y = a^x$
6. De (4) y (5) podemos decir que la función es biyectiva.
7. Si $a > 1$, la función es creciente, o sea: $x_1 > x_2 \Longrightarrow a^{x_1} > a^{x_2}$
8. Si $0 < a < 1$, la función es decreciente, o sea: $x_1 > x_2 \Longrightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$
9. El $eje\ x$ es asíntota de la gráfica.

Como hemos visto en los ejemplos y ejercicios anteriores se puede ver que la gráfica de una función exponencial es siempre creciente o decreciente. En consecuencia, las gráficas pasan la prueba de la recta horizontal y, por tanto, las funciones son uno a uno o inyectivas.

Se puede usar la propiedad biunívoca para resolver ecuaciones exponenciales sencillas.

TRABAJO PRÁCTICO N° 5

Ejercicio 2. Representa gráficamente las siguientes funciones (utilice los conceptos aprendidos sobre desplazamiento de gráficas)

b) $y = 3^x - 1$	b) $y = 2^{x+1}$	c) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}$	d) $y = 1 + 2^x$

TRABAJO PRÁCTICO N° 5

Ejercicio 3. Verifique si las funciones abajo son crecientes o decrecientes en R. Justifique

	$a)\ f(x) = (1{,}6)^x$		$b)\ y = 10^x$		$c)\ f(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^x$
	$d)\ y = (10^{-1})^x$		$e)\ f(x) = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^x$		$f)\ y = \pi^x$
	$g)\ y = (\sqrt{2} - 1)^x$		$h)\ y = \left(\frac{3}{\sqrt{5}}\right)^{-x}$		$i)\ y = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{-x}$

Ejercicio 4. La función $f(x) = 5^x$ es una función exponencial con base ………………… Evalúe la función en los siguientes casos:

a. $f(-2) =$
b. $f(0) =$
c. $f(2) =$
d. $f(6) =$

Ejercicio 5. Trace la gráfica de la función haciendo una tabla de valores. Use calculadora si es necesario.

a. $f(x) = 3^x$
b. $h(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

Ejercicio 6. Grafique ambas funciones en un conjunto de ejes.

a. $f(x) = 2^x \quad y \quad g(x) = 2^{-x}$
b. $f(x) = 4^x \quad y \quad g(x) = 7^x$

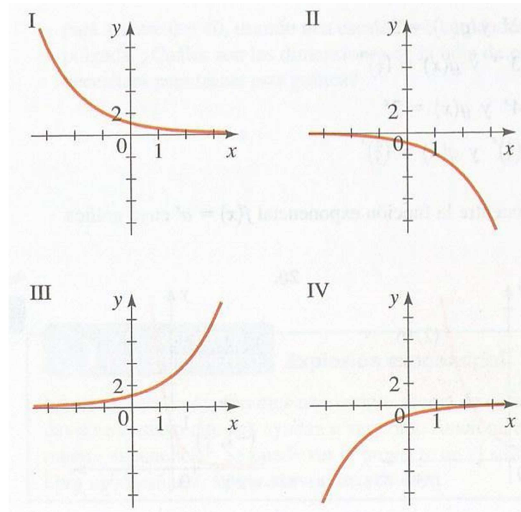
Ejercicio 7. Relacione cada función exponencial con su gráfica.

$a. f(x) = 2^x$

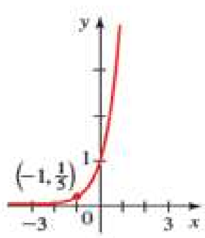
$b. f(x) = 2^{-x}$

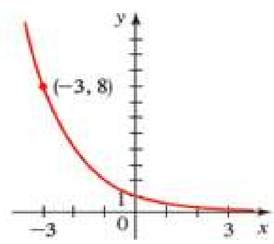
$c. f(x) = -2^x$

$d. f(x) = -2^{-x}$



Ejercicio 8. Encuentre la función exponencial $f(x) = a^x$ cuya gráfica nos dan.

a) 

b) 

Ejercicio 9. Grafique la función, no localizando puntos sino empezando desde las gráficas modelos y haciendo las transformaciones adecuadas.

a) $f(x) = -3^x$

b) $g(x) = 2^x - 3$

c) $h(x) = 4 + \left(\frac{1}{2}\right)^x$

Ejercicio 10. Encuentre las funciones $f \circ g$ y $g \circ f$; y determine sus dominios.

$$f(x) = 2^x \;,\; g(x) = x + 1$$

6. Ecuaciones Exponenciales.

Llamamos de ecuación exponencial a toda ecuación que presenta la incógnita en el exponente. Son ejemplos de ecuaciones exponenciales:
$3^x = 1$; $5^{x-3} = 10 \cdot 2^{x-1}$; $\pi^x = 3$
Resolver una ecuación exponencial significa encontrar el valor (o valores) de la incógnita que haga la ecuación una sentencia numérica verdadera. Por ejemplo, en la ecuación $2^x = 32$, el valor $x = 5$ es una raíz, pues $2^5 = 32$.

Es posible transformar (a través de las propiedades) algunas ecuaciones en otras equivalentes que posean, en ambos miembros, potencias de la misma base (mayor que cero y distinto de 1). Obtenido esto, y recordando que la función $y = a^x$ es inyectiva, llegamos a una ecuación que envuelve solamente los exponentes de los dos miembros.

Cuando no es posible obtener potencias de la misma base en los dos miembros, utilizaremos otros métodos, en especial los **Logaritmos**.
<u>En esta parte del curso</u>, **no** haremos uso de los logaritmos para resolver las ecuaciones exponenciales.
Observe con detenimiento los ejemplos de ecuaciones exponenciales, siendo $U = R$. Es importante que preste atención a cómo se puede reducir, en estos casos, a la misma base, para resolver la ecuación.

Ejemplo 1

Resolver la ecuación $3^x = 9$

Solución

$3^x = 9$

$3^x = 3^2$ expresamos el 9 en la base 3

$x = 2$ por la propiedad biunívoca

El conjunto solución es $S = \{2\}$

Ejemplo 2

Resolver la ecuación $\sqrt{3} = 27^x$

Solución

Como $\sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}}$ y $27 = 3^3$, tenemos:

$3^{\frac{1}{2}} = (3^3)^x \Rightarrow 3^{\frac{1}{2}} = 3^{3x}$

$3x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{6}$ El conjunto solución es $S = \left\{\frac{1}{6}\right\}$

Ejemplo 3

Resolver la ecuación $\left(\frac{2}{3}\right)^{5x} = \left(\frac{27}{8}\right)$

Solución

Como $\frac{27}{8} = \frac{3^3}{2^3} = \left(\frac{3}{2}\right)^3 \Rightarrow \frac{27}{8} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$, entonces:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{5x} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} \Rightarrow 5x = -3 \Rightarrow x = -\frac{3}{5}$$

El conjunto solución es $S = \left\{-\frac{3}{5}\right\}$

TRABAJO PRÁCTICO N° 5

Ejercicio 11. Siendo $U = R$, resuelva las ecuaciones exponenciales

a) $5^x = 125$ b) $81 - 3^x = 0$ c) $125 \cdot 5^x - 1 = 0$

d) $2^x = \sqrt{2}$ e) $\sqrt{8^x} = 64$ f) $8^x = \sqrt[5]{64}$

Ejemplo 4

Resolver la ecuación $2^x + 2^{x+1} = 24$

Solución

La ecuación puede ser escrita así: $2^x + 2^x \cdot 2 = 24$

Sustituyendo 2^x por y

$$y + 2y = 24$$

$$3y = 24 \Rightarrow y = 8$$

$$2^x = 8 = 2^3 \Rightarrow x = 3$$

El conjunto solución es $S = \{3\}$

Ejemplo 5

Resolver la ecuación $3 \cdot 2^{x+1} - 4 \cdot 2^{x-2} - 6 \cdot 2^x = -4$

Solución

Como $2^{x+1} = 2 \cdot 2^x$ y $2^{x-2} = \frac{2^x}{2^2} = \frac{2^x}{4}$

$$3 \cdot 2^{x+1} - 4 \cdot 2^{x-2} - 6 \cdot 2^x = -4$$

$$3 \cdot 2 \cdot 2^x - 4 \cdot \frac{2^x}{4} - 6 \cdot 2^x = -4$$

$$6 \cdot 2^x - 2^x - 6 \cdot 2^x = -4$$

$$-2^x = -4$$
$$2^x = 2^2 \Rightarrow x = 2$$

El conjunto solución es $S = \{2\}$

Ejemplo 6

Resolver la ecuación $9^x = \left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-x}$

Solución

Como $9 = 3^2$ y $\frac{1}{3} = 3^{-1}$, entonces:

$$(3^2)^x = (3^{-1})^{x^2-x}$$
$$3^{2x} = (3)^{x-x^2}$$

$2x = x - x^2$

$$x^2 + x = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \quad ó \quad x_2 = -1$$

El conjunto solución es $S = \{-1, 0\}$

TRABAJO PRÁCTICO N° 5

Ejercicio 12. Siendo $U = R$, resuelva las siguientes ecuaciones exponenciales

$a)$ $3^{x-4} + 3^x = \dfrac{82}{27}$ b) $\left(\frac{0,5}{3}\right)^{3x-2} = 1$ c) $\sqrt[5]{2^{3x}} = \sqrt[6]{2^{2x-4}}$

c) $2^{x+2} + 2^x = 80$ d) $\frac{5^{5x}}{5^4} = \left(\frac{1}{5}\right)^{x+1}$ e) $\frac{8^x}{4^{x-1}} = 2^{x+2}$

Ejemplo 7

Resolver la ecuación $4^x - 3 \cdot 2^{x-1} - 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2-x} = 10 + 2 \cdot 2^{x+1}$

Solución

Analizaremos los términos de ambos miembros por separado y luego los sustituiremos en la ecuación exponencial.
Así:

$4^x = (2^2)^x = 2^{2x} = (2^x)^2$ (1)
$2^{x-1} = \frac{2^x}{2}$ (2)
$\frac{1}{2} = 2^{-1}$ (3)
$2^{x+1} = 2^x \cdot 2$ (4)

Sustituyendo en la ecuación dada, tenemos:

$$4^x - 3 \cdot 2^{x-1} - 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2-x} = 10 + 2 \cdot 2^{x+1}$$

$$(2^x)^2 - 3 \cdot \frac{2^x}{2} - 5 \cdot (2^{-1})^{2-x} = 10 + 2 \cdot 2^x \cdot 2$$

Reescribiendo:

$(2^x)^2 - \frac{3}{2} \cdot 2^x - 5 \cdot (2)^{x-2} = 10 + 4 \cdot 2^x$ (5)

Como $(2)^{x-2} = \frac{2^x}{2^2} = \frac{2^x}{4}$ (6)

Reemplazando (6) en (5) y reescribiendo

$(2^x)^2 - \frac{3}{2} \cdot 2^x - \frac{5}{4} \cdot 2^x = 10 + 4 \cdot 2^x$ (7)

Si hacemos $2^x = y$ (8)

Reemplezamos (8) en (7)

$(y)^2 - \frac{3}{2} \cdot y - \frac{5}{4} \cdot y = 10 + 4 \cdot y$

Multipliquemos por 4 ambos miembros para eliminar las fracciones y trabajar con coeficientes enteros.

$4 \cdot [(y)^2 - \frac{3}{2} \cdot y - \frac{5}{4} \cdot y] = 4 \cdot [10 + 4 \cdot y]$

$4y^2 - 6y - 5y = 40 + 16y$ Distributiva en ambos miembros

Efectuando las operaciones algebraicas necesarias, tenemos:

$4y^2 - 27y - 40 = 0$ (9)

Las raíces de (9) son $y_1 = 8$ e $y_2 = -\frac{5}{4}$

Para $y_1 = 8$, en (8) tenemos: $2^x = 8 \Rightarrow 2^x = 2^3 \Rightarrow x = 3$

Para $y_2 = -\frac{5}{4}$, en (8) tenemos: $2^x = -\frac{5}{4}$, lo cual es imposible pues el rango de la función exponencial son los reales positivos, o sea, $a^x > 0$ para todo x real

Por lo tanto, el conjunto solución es: $S = \{3\}$

LA FUNCIÓN LOGARÍTMICA

2. Introducción

En la sección anterior vimos cómo es sencillo resolver una ecuación exponencial cuando es posible obtener en ambos miembros de la igualdad potencias de la misma base. Por ejemplo:

$$2^x = 64 \Rightarrow 2^x = 2^6 \Rightarrow x = 6 \Rightarrow S = \{6\}$$

En la sección anterior nunca resolvimos ecuaciones del tipo $5^x = 12$, pues es imposible obtener en ambos miembros potencias de la misma base.

Las funciones exponenciales tienen una base constante y un exponente variable. La inversa de la función exponencial es la función logarítmica.

Para abordar este tema, pasaremos inicialmente al estudio de los logaritmos como operación matemática, para después estudiar la función inversa de la exponencial, o sea, la función logarítmica.

3. Definición de logaritmo

Sean a, b y c números reales con $a \neq 1$, $a \in R_+^* - \{1\}$.y $b \in R_+^*$

Llamaremos al "*logaritmo en base a de* b (b)", al número real c, tal que $a^c = b$

Es bueno recordar la definición de logaritmo mediante el siguiente esquema.

obtenemos

$$\log_a b = \text{c} \underset{def}{\Longleftrightarrow} a^c = b$$

elevada

donde:

- a es la base del logaritmo
- b es el logaritmando;
- c es el logaritmo;

Obtener el logaritmo de un número (en cualquier base) es una operación aritmética binaria, o sea que es la siguiente función:

$$\begin{aligned} log&: \mathbb{R} \text{ X } \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ &(a, b) \to c = \log_a b \qquad (1) \end{aligned}$$

Observemos que

$$a^c \underbrace{=}_{(1)} a^{(b)} \underbrace{=}_{porde\ logaritmo} b \qquad (2)$$

En los siguientes ejemplos:

$$2^5 = 5$$

$$e^{lnln\, 5} = 5$$

es común decir: "simplificamos la base con el logaritmo". En realidad, sólo estamos usando la definición de logaritmo.

Recordemos entonces que:

> El logaritmo de un número positivo b, en una cierta base a **,** positiva y diferente de 1, es el ***exponente*** al cual se debe elevar la base a , de modo a obtener ese número b .

Comparando esta última expresión con el ejemplo dado al comienzo, $5^x = 12$, podemos observar que $a = 5$ y $b = 12$, por lo que $x = 12$

Si bien no sabemos cuál es el valor de x, podemos afirmar que:

$$1 < x < 2$$

pues

$$5^1 < 12 < 5^2$$

Veremos más adelante una forma de calcular x, mediante un cambio de base (en este curso), o una serie de potencias (en Cálculo I)

Logaritmos Especiales:

Si la base es 10, colocamos simplemente $log\ log\ b$.
O sea, $log\ log\ b\ = x\ def \Leftrightarrow\ 10^x = b$
Si la base es el ya conocido número e, usamos el siguiente símbolo $ln\ b$.
O sea, $ln\ ln\ b\ = x\ \ def \Leftrightarrow\ \ e^x = b$
El símbolo "$ln\ b$" se lee: "logaritmo natural".

Ejemplo 1

Determinar x en los siguientes casos:

a)5 $= x$ b) $\frac{3}{4} = x$ c) $= x$ d) $1\ = x$

Solución

a) $5\ = x\ \ \Rightarrow\ 5^x = 5\ \Rightarrow\ 5^x =\ 5^1\ \Rightarrow\ x = 1$

b) $\frac{3}{4} = x\ \ \Rightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^x = \frac{3}{4}\ \ \Rightarrow\ \left(\frac{3}{4}\right)^x = \left(\frac{3}{4}\right)^1 \Rightarrow\ x = 1$

c) $= x\ \ \Rightarrow\ 2^x = 1\ \ 1 = 2^0 \Rightarrow\ \ 2^x = 2^0 \Rightarrow\ \ \ x = 0$

d) $1\ = x\ \Rightarrow\ \left(\frac{1}{2}\right)^x = 1\ 1 = \left(\frac{1}{2}\right)^0 \Rightarrow\ \left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^0 \Rightarrow x = 0$

Podemos observar que:

- el logaritmo de la base es 1
- el logaritmo de 1 es cero independientemente de la base.

Ejemplo 2

Determinar x en los siguientes casos:

a) $36\ = x$ b) $2\ = x$

Solución

a) $36\ = x\ \Rightarrow\ \ 6^x = 36\ \ 36 = 6^2 \Rightarrow\ \ \ 6^x = 6^2\ \ \Rightarrow\ x = 2$

b) $2 \;= x \Rightarrow \;\; 8^x = 2 \;\; 8 = 2^3 \Rightarrow \;\; \left(2^3\right)^x = 2 \;\Rightarrow\; 2^{3x} = 2^{\,1} \;\Rightarrow\; 3x = 1 \;\Rightarrow\; x = \frac{1}{3}$

TRABAJO PRÁCTICO N° 5

Ejercicio 13. Complete según la definición de logaritmos:

$5^3 = 125$, entonces $\log_{\square} \square$ = ...

$log_5\, 25 \; = 2$, entonces $\square^{\square}$ = ...

Ejercicio 14. Usando la definición de logaritmo, determine el valor de x (sin usar calculadora)

a) $\log_{10} 10 = x$ b) $\log_{\sqrt{3}} \sqrt{3} = x$ c) $\log_{25} 1 = x$

d) $\log_{16} \sqrt{2} = x$ e) $\log_{0,01} 0{,}1 = x$ f) $\log_{16} \sqrt{2} = x$

Ejercicio 15. Complete los espacios en blanco:

Fórmula logarítmica	Forma exponencial	Forma logarítmica	Forma exponencial
$\log_8 8 = 1$			$4^3 = 64$
$\log_8 64 = 2$		$\log_4 2 = \frac{1}{2}$	
	$8^{2/3} = 4$		$4^{3/2} = 8$
	$8^3 = 512$	$\log_4\left(\frac{1}{16}\right) = -2$	
$\log_8\left(\frac{1}{8}\right) = -1$		$\log_4\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$	
	$8^{-2} = \frac{1}{64}$		$4^{-5/2} = \frac{1}{32}$

Ejercicio 16. Resuelva las siguientes expresiones, sin usar calculadora

a. $\log_3 \frac{1}{27} =$ *b.* $\log_{16} \sqrt{2} =$ *c.* $\log_4 \sqrt{2} =$

d. $\log_8 0.25 =$ *e.* $\log_{10} \sqrt{10} =$ *f.* $\log_{49} 7 =$

Ejemplo 3:

Determinar el valor de x, siendo $x = \log_{\frac{1}{8}} 16$

Solución

$$\log_{\frac{1}{8}} 16 = x \;\Rightarrow\; \left(\frac{1}{8}\right)^x = 16 \;\Rightarrow\; \left(\frac{1}{2^3}\right)^x = 2^4 \;\Rightarrow\; (2^{-3})^x = 2^4 \;\Rightarrow\; 2^{-3x} = 2^4 \;\Rightarrow$$

$$-3x = 4 \;\Rightarrow\; 3x = -4 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{x = -\frac{4}{3}}$$

TRABAJO PRÁCTICO N° 5

Ejercicio 17. Encuentre el valor de x, sin usar calculadora.

a) $x = \log_{25} \sqrt[3]{5}$ b) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4} = x$ c) $\log_{\sqrt{2}}(2\sqrt{2}) = x$

Ejemplo 4

Determinar x en los siguientes casos:

a) $8 = 3$ b) $5 = \frac{1}{2}$ c) $2 = \frac{3}{5}$ d) $5 = -2$

Observe que, en este ejemplo, x es la base

Solución

a) $8 = 3 \;\Rightarrow\; x^3 = 8 \Rightarrow\; x = \sqrt[3]{8} \;\Rightarrow\; x = 2$

b) $5 = \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; x^{\frac{1}{2}} = 5 \Rightarrow\; \sqrt{x} = 5 \;\Rightarrow\; (\sqrt{x})^2 = 5^2 \;\Rightarrow\; x = 25$

c) $2 = \frac{3}{5} \;\Rightarrow\; x^{\frac{3}{5}} = 2 \;\Rightarrow\; \sqrt[5]{x^3} = 2 \;\Rightarrow\; x^3 = 2^5 \;\Rightarrow\; x = \sqrt[3]{25}$

d) $5 = -2 \;\Rightarrow\; x^{-2} = 5 \;\Rightarrow\; \frac{1}{x^2} = 5 \;\Rightarrow\; x^2 = \frac{1}{5} \;\Rightarrow\; x \underbrace{=}_{(*)} \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

$(*)$ En este caso, si $x^2 = \frac{1}{5}$ entonces $|x| = \sqrt{\frac{1}{5}}$, es decir $x = -\sqrt{\frac{1}{5}}$ y $x = \sqrt{\frac{1}{5}}$ pero como $x \in R_+^* - \{1\}$, la opción $x = -\sqrt{\frac{1}{5}}$ se descarta.

TRABAJO PRÁCTICO N° 5

Ejercicio 18. Utilizando la definición de logaritmos, encuentre el valor de x en los casos siguientes:

a) $\log_x 10 = 5$ b) $\log_x \sqrt{2} = \frac{1}{2}$ c) $\log_x \frac{3}{4} = \frac{1}{3}$ d) $\log_x 10 = -\frac{1}{2}$

e) $\log_x 0{,}5 = -2$ f) $\log_x 5 = \frac{1}{3}$ g) $\log_x 0{,}001 = 0{,}1$ h) $\log_x 0{,}2 = 2$

Ejemplo 5

Determinar x en los siguientes casos:

a) $x = 4$ b) $x = \frac{1}{8}$ c) $x = \frac{1}{4}$ d) $x = -3$

Solución

a) $x = 4 \quad \Rightarrow \quad x = 5^4 \Rightarrow \quad x = 625$

b) $x = \frac{1}{8} \quad \Rightarrow x = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{8}} \Rightarrow x = \sqrt[8]{\frac{1}{4}} \quad \Rightarrow x = \sqrt[8]{\left(\frac{1}{2}\right)^4} \quad \Rightarrow x = \sqrt{\frac{1}{2}}$

c) $x = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad x = \left(\sqrt{3}\right)^{\frac{1}{4}} \quad \Rightarrow \quad x = \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{4}} \quad \Rightarrow \quad x = 3^{\frac{1}{8}} \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt[8]{3}$

d) $x = -3 \quad \Rightarrow \quad x = \left(\sqrt{2}\right)^{-3} \quad \Rightarrow \quad x = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{-3} \quad \Rightarrow \quad x = 2^{-\frac{3}{2}} \quad \Rightarrow \quad x = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}} \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad x = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^3} \Rightarrow \quad x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}$

TRABAJO PRÁCTICO N° 5

Ejercicio 19.

Utilizando la definición de logaritmos, encuentre el valor de x en los casos siguientes:

a) $\log_5 x = 5$ b) $\log_{10} x = 0$ c) $\log_5 x = -3$ d) $\log_2(x^2 - 2) = -1$

e) $\log_{\sqrt{5}} x = \frac{2}{3}$ f) $\log_{\sqrt{3}}(2x) = -4$ g) $\log_{0,1} \frac{x}{4} = -1$ h) $\log_2(x^2 + 2) = -1$

La idea del siguiente ejemplo es usar sólo los conceptos de logaritmos, pues aún no hemos visto a la *función logarítmica*.

Es un **desafío** algebraico, para los que están acostumbrados a usar propiedades de funciones inversas, resolver los problemas que se presentan ahora y que **no** envuelven funciones en este momento.

Después definiremos la función logarítmica; pero por ahora, sólo trabajamos el concepto de logaritmo como **operación aritmética**.

¿Qué significa esto de ser operación aritmética?

Dados dos números reales, puedo **sumarlos**, **restarlos**, **multiplicarlos**, **dividirlos**, calcular la **potencia** de uno respecto del otro (multiplicación abreviada), o **logaritmar** uno en la base del otro (con las restricciones apropiadas de la base y del logaritmando)

Hay que dejar claro también que, suma, resta, multiplicación, división, potenciación y logaritmación son también funciones que, en conjuntos numéricos específicos y con las operaciones elegidas, cumpliendo algunas propiedades, constituyen Estructuras Algebraicas. Estos temas serán tratados en Introducción al Álgebra Lineal, Álgebra y Estructuras Algebraicas, entre otras disciplinas dictadas en esta Facultad.

La potenciación y la logaritmación se verán en su forma funcional en los diferentes Cálculos, dictados también en esta Facultad. En el Ingreso, veremos estas dos operaciones aritméticas también como funciones. Ya vimos la función exponencial, después de recordar las propiedades de la potenciación como operación aritmética. Haremos lo mismo con la función logarítmica, recordaremos las propiedades de los logaritmos, para luego verlos como función.

Ejemplo 6

Siendo $a, b, c \in \mathbb{R}^*_+$, con $a \neq 1$ y $b \neq 1$, determinar x, mediante la definición de logaritmo.

a) $x = a^{\log_a b}$

b) $x = a^{2 \cdot \log_a b}$

c) $x = a^{1+\log_a b}$

d) $x = a^{\log_a b \cdot \log_b c}$

Solución

a) $x = a^{\log_a b}$ **(1)**

Llamaremos "y" al exponente de la base a : $y = \log_a b$ **(2).**

De esta forma, podemos expresar **(1)**, como $x = a^{\log_a b} \underbrace{=}_{(2)} a^y$ **(3)**

Apliquemos a **(2)**, la definición de logaritmo. Resulta que $\log_a b \underbrace{=}_{(2)} y \underset{df}{\Leftrightarrow} a^y = b$

Indiquemos como **(4)** a la igualdad anterior $a^y = b$ **(4)**

Por **(3)** y **(4)** tenemos: $x \underbrace{=}_{(3)} a^y$ y $a^y \underbrace{=}_{(4)} b$ Por la propiedad transitiva de la igualdad en **(3)** y **(4)**, resulta que $x = b$, pues: $x \underbrace{=}_{(3)} a^y \wedge a^y \underbrace{=}_{(4)} b \Rightarrow x = b$ (propiedad transitiva de la igualdad)

Concluimos que:

$$\boxed{x = b}$$

b) $x = a^{2 \cdot \log_a b}$ **(1)**

Llamaremos "y" a <u>uno</u> de los factores del exponente de la base a : $y = \log_a b$ **(2).**

De esta forma, podemos expresar **(1)**, como $x = a^{2 \cdot \log_a b} \underbrace{=}_{(2)} a^{2 \cdot y} \underbrace{=}_{(*)} (a^y)^2$ **(3)**

(∗) Propiedad Potencia de una potencia.

Apliquemos a **(2)**, la definición de logaritmo. Resulta que $\log_a b \underbrace{=}_{(2)} y \underset{df}{\Leftrightarrow} a^y = b$

Indiquemos como **(4)** a la igualdad anterior $a^y = b$ **(4)**

Por **(3)** y **(4)** tenemos: $x \underbrace{=}_{(3)} (a^y)^2$ y $(a^y)^2 \underbrace{=}_{(4)} b^2$ Por la propiedad transitiva de la igualdad en **(3)** y **(4)**, resulta que $x = b^2$, pues: $x \underbrace{=}_{(3)} (a^y)^2 \wedge (a^y)^2 \underbrace{=}_{(4)} b \Rightarrow x = b^2$ (propiedad transitiva de la igualdad)

Concluimos que:

$$\boxed{x = b^2}$$

c) $x = a^{1+\log_a b}$ **(1)**

Llamaremos "y" a <u>uno</u> de los términos del exponente de la base a : $y = \log_a b$ **(2).**

De esta forma, podemos expresar **(1),** como $x = a^{1+\log_a b} \underbrace{=}_{(*)} a^1 \cdot a^{\log_a b} \underbrace{=}_{(2)} a^1 \cdot a^y$ **(3)**

($*$) Propiedad del producto de potencias de la misma base.

Apliquemos a **(2),** la definición de logaritmo. Resulta que $\log_a b \underbrace{=}_{(2)} y \underset{df}{\Leftrightarrow} \boldsymbol{a^y = b}$

Indiquemos como **(4)** a la igualdad anterior $\boldsymbol{a^y = b}$ **(4)**

Por **(3)** y **(4)** tenemos: $x \underbrace{=}_{(3)} a^1 a^y$ y $a^1 a^y \underbrace{=}_{(4)} a^1 b = ab$.

Por la propiedad transitiva de la igualdad en **(3)** y **(4),** resulta que $x = a \cdot b$, pues: $x \underbrace{=}_{(3)} a^1 a^y$

y $a^1 a^y \underbrace{=}_{(4)} a^1 b = ab \Rightarrow \boldsymbol{x = a \cdot b}$ (propiedad transitiva de la igualdad)

Concluimos que:

$$\boxed{\boldsymbol{x = a \cdot b}}$$

d) $x = a^{\log_a b \cdot \log_b c}$ **(1)**

Llamaremos con y y z a los exponentes de a: $y = \log_a b$ **(2)**
$z = \log_b c$ **(3)**

De esta forma, podemos expresar **(1),** como $x = a^{\log_a b \cdot \log_b c} \underbrace{=}_{(2)y\,(3)} a^{y \cdot z}$ **(4)**

Apliquemos a **(2)** y a **(3)** la definición de logaritmo. Resulta que $\log_a b \underbrace{=}_{(2)} y \underset{df}{\Leftrightarrow} \boldsymbol{a^y = b}$ **(5)** y

también $\log_b c \underbrace{=}_{(3)} z \underset{df}{\Leftrightarrow} \boldsymbol{b^z = c}$ **(6)**

Por **(4); (5)** y **(6)** $x \underbrace{=}_{(4)} a^{y \cdot z} \underset{(*)}{\Rightarrow} x = (a^y)^z \underset{(5)}{\Rightarrow} x = b^z \underset{(6)}{\Rightarrow} \boldsymbol{x = c}$

$$\boxed{\boldsymbol{x = c}}$$

TRABAJO PRÁCTICO N° 5

Hay que recordar que: La idea es resolver estos ejercicios sólo con los conceptos de logaritmos, pues aún no hemos visto a la función logaritmo y su inversa.

Ejercicio 20.

Determine x:

a) $x = 5^{\log_5 2}$ b) $x = 3^{\log_3 10}$ c) $x = 10^{3 \cdot \log_{10} 10}$ d) $x = 2^{5+\log_2 5}$

Propiedades y Leyes de los Logaritmos.

Usando la definición de logaritmos podemos resumir las siguientes propiedades:

Propiedad	Razón
1. $\log_a 1 = 0$	Se debe elevar a a la potencia 0 para obtener 1.
2. $\log_a a = 1$	Se debe elevar a a la potencia 1 para obtener a.
3. $\log_a a^x = x$	Se debe elevar a a la potencia x para obtener a^x
4. $a^{\log_a x} = x$	$\log_a x$ es la potencia a la cual se debe elevar a para obtener x.

Veremos ahora otras propiedades de los logaritmos en la misma base.
Puesto que los logaritmos son exponentes, las leyes de los exponentes dan lugar a las **leyes de los logaritmos.**

i. Logaritmo de un producto

Sea a un número positivo, con $a \neq 1$. Sean b y c números reales cualesquiera con $b > 0$ y $c > 0$. Se verifica la siguiente igualdad.

$$\log_a(b \cdot c) = \log_a(b) + \log_a(c)$$

Esto es:

El logaritmo de un producto de números es la suma de los logaritmos de los números.

Ejemplo 1

Aplicar la propiedad del logaritmo de un producto en los siguientes casos. (Esto se conoce como **expansión** de expresiones logarítmicas)

a) $\log_3\left(0{,}2 \cdot \frac{1}{3}\right)$ b) $\log_3(5 \cdot 2)$ c) $\log_5(a \cdot b \cdot c)$

Solución

a) $\log_3\left(0{,}2 \cdot \frac{1}{3}\right) = \log_3(0{,}2) + \log_3\left(\frac{1}{3}\right)$

b) $\log_3(5 \cdot 2) = \log_3(5) + \log_3(2)$

c) $\log_5(a \cdot b \cdot c) = \log_5(a) + \log_5(b) + \log_5(c)$

Ejemplo 2

Aplicar la propiedad del logaritmo de un producto en los siguientes casos. (Esto se conoce como **combinación** de expresiones logarítmicas)

a) $\log_3 2 + \log_3 7$ b) $\log_2 3 + \log_2 5 + \log_2 10$ c) $\log_5 2 + \log_5 \left(\frac{1}{2}\right)$

Solución

a) $\log_3 2 + \log_3 7 = \log_3(2 \cdot 7) = \log_3(14)$
b) $\log_2 3 + \log_2 5 + \log_2 10 = \log_2(3 \cdot 5 \cdot 10) = \log_2(150)$
c) $\log_5 2 + \log_5 \left(\frac{1}{2}\right) = \log_5 \left(2 \cdot \frac{1}{2}\right) = \log_5 1 = 0$

ii. Logaritmo de un cociente

Sea a un número positivo, con $a \neq 1$. Sean b y c números reales cualesquiera con $b > 0$ y $c > 0$. Se verifica la siguiente igualdad.

$$\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a(b) - \log_a(c)$$

Esto es:

El logaritmo de un cociente de números es la diferencia de los logaritmos de los números.

Ejemplo 1

Aplicar la propiedad del logaritmo de un cociente en los siguientes casos. (Esto se conoce como **expansión** de expresiones logarítmicas)

a) $\log_8 \left(\frac{5}{2}\right)$ b) $\log_{10}(0{,}2)$

Solución

a) $\log_8 \left(\frac{5}{2}\right) = \log_8 5 - \log_8 2$
b) $\log\ (0{,}2) = \log \left(\frac{2}{10}\right) = \log 2 - \log 10 = \log 2 - 1$

Ejemplo 2

Aplicar la propiedad del logaritmo de un cociente en los siguientes casos. (Esto se conoce como **combinación** de expresiones logarítmicas)

a) $\log_3 2 - \log_3 7$ b) $\log_2 10 - \log_2 5$ c) $\log_3(2{,}5) - \log_3(10)$

Solución

a) $\log_3 2 - \log_3 7 = \log_3\left(\frac{2}{7}\right)$

b) $\log_2 10 - \log_2 5 = \log_2\left(\frac{10}{5}\right) = \log_2 2 = 1$

c) $\log_3(2{,}5) - \log_3(10) = \log_3\left(\frac{2{,}5}{10}\right) = \log_3(0{,}25)$

Ejemplo 3

Aplicar la propiedad del logaritmo, vistas hasta ahora, en los siguientes casos:

a) $\log_d\left(\frac{a\cdot b}{c}\right)$ b) $\log_3\left(\frac{3a}{b}\right)$

Solución

a) $\log_d\left(\frac{a\cdot b}{c}\right) = \log_d(a\cdot b) - \log_d(c) = \log_d(a) + \log_d(b) - \log_d(c)$

b) $\log_3\left(\frac{3a}{b}\right) = \log_3(3a) - \log_3 b = \log_3(3) + \log_3 a - \log_3 b = 1 + \log_3 a - \log_3 b$

iii. Logaritmo de una potencia

Calculemos ahora el valor de $\log_a(b^m)$, conociendo los valores de $\log_a(b)$ el valor de m , donde $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, con $a \neq 1$

Solución

Sea $x = \log_a b$ e $y = \log_a c$
Por la definición de logaritmos

$$x = \log_a b^m \Rightarrow b^m = a^x \qquad (1)$$
$$y = \log_a b \Rightarrow b = a^y \qquad (2)$$

Elevando (2) a la m, obtenemos:

$$b^m = (a^y)^m \ \Rightarrow \ b^m = a^{ym} \qquad (3)$$

Comparando (1) y (3) tenemos
$a^x = a^{ym}$, resolviendo esta ecuación exponencial de la misma base, tenemos: $x = m\cdot y$
Sustituyen en esta última igualdad (1) y (2):

$$x = m\cdot y \underset{(1)}{\Rightarrow} \log_a b^m = m\cdot y \underset{(2)}{\Rightarrow} \mathbf{\log_a b^m = m\cdot \log_a b}$$

Podemos concluir entonces que:

El logaritmo de la potencia de un número es el exponente multiplicado por el logaritmo del número.

Ejemplo 1

Aplicar la propiedad del logaritmo de una potencia en los siguientes casos. (Esto se conoce como **expansión** de expresiones logarítmicas)

a) $\log_{15}(3^2)$ b) $\log_3(10^{-4})$ c) $\log \sqrt[3]{2}$

Solución

a) $\log_{15}(3^2) = 3 \cdot \log_{15}(3)$
b) $\log_3(10^{-4}) = (-4) \cdot \log_3(10)$
c) $\log \sqrt[3]{2} = \log\left(2^{\frac{1}{3}}\right) = \frac{1}{3} \cdot \log 2$

Ejemplo2

Aplicar la propiedad del logaritmo de una potencia en los siguientes casos. (Esto se conoce como **combinación** de expresiones logarítmicas)

a) $5 \cdot \log_6 2$ b) $(-10) \cdot \log_2 5$

Solución

a) $5 \cdot \log_6 2 = \log_6 2^5$
b) $(-10) \cdot \log_2 5 = \log_2 5^{-10}$

Podemos resumir estas Leyes en el siguiente cuadro:

Leyes de los Logaritmos	
Sea a un número positivo, con $a \neq 1$. Sean A, B y C números reales cualesquiera con $A > 0$ y $B > 0$	
1. $\log_a(A \cdot B) = \log_a(A) + \log_a(B)$	El logaritmo de un producto de números es la suma de los logaritmos de los números.
2. $\log_a\left(\frac{A}{B}\right) = \log_a(A) - \log_a(B)$	El logaritmo de un cociente de números es la diferencia de los logaritmos de los números.
3. $\log_a(A^C) = \mathrm{C} \cdot \log_a(A)$	El logaritmo de la potencia de un número es el exponente multiplicado por el logaritmo del número.

TRABAJO PRÁCTICO N° 5

Ejercicio 21.

Use la Ley de Logaritmos para expandir las expresiones

a. $\log_3(5y)$

b. $\log_2\big(x(x-1)\big)$

c. $\log_6 \sqrt[4]{17}$

d. $\log_5 \sqrt[3]{x^2 + 1}$

e. $\ln\sqrt{ab}$

f. $\ln\sqrt[3]{3r^2s}$

g. $\log_2\left(\frac{x(x^2+1)}{\sqrt{x^2-1}}\right)$

h. $\log\sqrt{\frac{x^2+4}{(x^2+1)(x^3+7)^2}}$

i. $\log\sqrt{x\sqrt{y\sqrt{z}}}$

Ejercicio 22.

Use las Leyes de Logaritmos para combinar cada expresión

a. $\log_2 A + \log_2 B + 2\log_2 C$

b. $4\log x - \frac{1}{3}\log(x^2+1) + 2\log(x-1)$

c. $\ln 5 + 2\ln x + 3\ln(x^{2+5})$

d. $2(\log_5 x + 2\log_5 y - 3\log_5 z)$

e. $\frac{1}{3}\log(x+2)^3 + \frac{1}{2}[\log x^4 - \log(x^2 - x - 6)^2]$

f. $\log_a b + c\log_a d - r\log_a s$

4. Cambio de base

En algunos casos, es útil cambiar de logaritmos de una base a logaritmos de otra base. Suponga que se da $\log_a x$ y se quiere hallar $\log_b x$. Sea

$$y = \log_b x \qquad (1)$$

Podemos escribir esto en forma exponencial y se toma el logaritmo, con base a, de cada lado.

$b^y = x$		Forma exponencial
$\log_a b^y = \log_a x$		Tomando log_a de cada lado
$y \cdot \log_a b = \log_a x$		Ley del logaritmo de una potencia
$y = \frac{\log_a x}{\log_a b}$	**(2)**	Dividiendo por $\log_a b$

$$y \underbrace{=}_{(1)} \log_b x \underbrace{=}_{(2)} \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

Obtenemos la siguiente fórmula para el cambio de base

Fórmula de cambio de base
$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$

Ejemplo 1

Pasar a la base 5:

a) $\log_3 2$ b) $\log_7 \sqrt{2}$ c) $\log_2 5$ d) $\log_3 \left(\frac{1}{5}\right)$

Solución

a) $\log_3 2 = \frac{\log_5 2}{\log_5 3}$

b) $\log_7 \sqrt{2} = \frac{\log_5 \sqrt{2}}{\log_5 7} = \frac{\log_5 2^{\frac{1}{2}}}{\log_5 7} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\log_5 2}{\log_5 7} = \frac{\log_5 2}{2\cdot\log_5 7}$

c) $\log_2 5 = \frac{\log_5 5}{\log_5 2} = \frac{1}{\log_5 2}$

d) $\log_3 \left(\frac{1}{5}\right) = \frac{\log_5\left(\frac{1}{5}\right)}{\log_5 3} = \frac{\log_5\left(\frac{1}{5}\right)}{\log_5 3} = \frac{\log_5 1 - \log_5 5}{\log_5 3} = \frac{-\log_5 5}{\log_5 3} = \frac{-1}{\log_5 3}$

Ejemplo 2

Encontrar el valor de N sabiendo que $\log_2 N = \log_5 3$.

Solución

$\log_2 N = \frac{\log_5 N}{\log_5 2} = \log_5 3$ **(1)**

$\underset{de\ (1)}{\Longrightarrow} \frac{\log_5 N}{\log_5 2} = \log_5 3 \underset{(2)}{\Rightarrow} \log_5 N = \log_5 2 \cdot \log_5 3 \underset{(3)}{\Rightarrow} \log_5 N = \log_5 3^{\log_5 2} \underset{(4)}{\Rightarrow} N = 3^{\log_5 2}$

(1) Expresamos el primer miembro, donde está la incógnita N, en base 5, la base en la cual está el dato

(2) Multiplicamos ambos miembros por $\log_5 2$

(3) Ley del logaritmo de una potencia

(4) Despejamos N usando la definición de logaritmos $5^{\log_5 N} = 5^{\log_5 3^{\log_5 2}}$

TRABAJO PRÁCTICO N° 5

Ejercicio 23.

Use la regla para cambio de base y calculadora para resolver (redondear a seis lugares decimales)

a. $\log_2 5$=

b. $\log_5 2$=

c. $\log_3 16$=

d. $\log_6 92$=

e. $\log_7 2.61$=

f. $\log_6 532$=

g. $\log_4 125$=

h. $\log_{12} 2.5$=

Ejercicio 24.

Transforme para la base solicitada ($a, b, c \in R_+^*$ y diferentes de 1)

a) $\log_c b$ para la base b.
b) $\log_b a$ para la base b^2
c) $\log_b a$ para la base $\frac{1}{a}$

5. La Función Logarítmica.

Sea a un número real, positivo y diferente de 1 (o sea $\mathbb{R}_+^* - \{1\}$. Llamamos función logarítmica de base a a la función:

$$g: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \text{ definida por } g(x) = \log_a x$$

Observe que el dominio de la función es $\mathbb{R}_+^*$, o sea, solamente valores positivos podrán ser atribuidos a la variable x.
Vamos a analizar dos ejemplos. En el primero la base es mayor que 1 y en el segundo, la base está entre 0 y 1.

Ejemplo 1

Consideremos la función definida por

$$y = \log_3 x \qquad \text{o} \qquad f(x) = \log_3 x$$

Atribuiremos valores arbitrarios a x y calculando $f(x)$, vamos a construir una tabla de valores para encontrar los puntos que pertenecen al gráfico de la función $y = \log_3 x$

x	y	Punto (x, y)
$\frac{1}{9}$	-2	$\left(\frac{1}{9}, -2\right)$
$\frac{1}{3}$	-1	$\left(\frac{1}{3}, -1\right)$
1	0	$(1, 0)$
3	1	$(3, 1)$
9	2	$(9, 2)$

$$\log_3 \frac{1}{9} = y \;\Rightarrow\; 3^y = \frac{1}{9} = 3^{-2} \;\Rightarrow\; y = -2$$

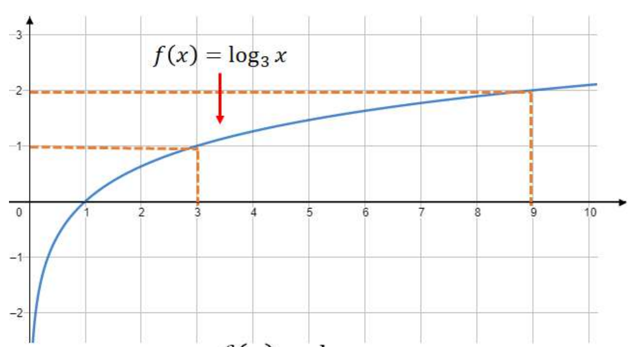
$$\log_3 \frac{1}{3} = y \;\Rightarrow\; 3^y = \frac{1}{3} = 3^{-1} \;\Rightarrow\; y = -1$$

$$\log_3 1 = y \;\Rightarrow\; 3^y = 1 = 3^0 \;\Rightarrow\; y = 0$$

$$\log_3 3 = y \;\Rightarrow\; 3^y = 3 = 3^1 \;\Rightarrow\; y = 1$$

$$\log_3 9 = y \;\Rightarrow\; 3^y = 9 = 3^2 \;\Rightarrow\; y = 2$$

Gráfico:



$y = f(x) = \log_3 x$

Observe que, sólo por conveniencia, atribuimos a x solamente valores que son potencias de exponente entero de la base, pues de ese modo obtenemos valores enteros para el logaritmo.

Observe también que, cuando el valor de x (positivo) "$se\ aproxima\ a\ cero$", más y más los puntos del gráfico "$se\ aproximan\ del\ eje\ y$", sin nunca tocarlo. De este modo el $eje\ y$ es una asíntota a la curva.

Ejemplo 2

Veamos la función definida por $y = \log_{\left(\frac{1}{3}\right)} x$

Procedamos de manera análogo a la del ejemplo 1, una tabla de valores y puntos perteneciente al gráfico de la función $y = \log_{\left(\frac{1}{3}\right)} x$

x	y	Punto (x, y)
$\frac{1}{9}$	2	$\left(\frac{1}{9}, 2\right)$
$\frac{1}{3}$	1	$\left(\frac{1}{3}, 1\right)$
1	0	$(1, 0)$
3	-1	$(3, -1)$
9	-2	$(9, -2)$

$$\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9} = y \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{y} = \frac{1}{9} = \left(\frac{1}{3}\right)^{2} \Rightarrow y = 2$$

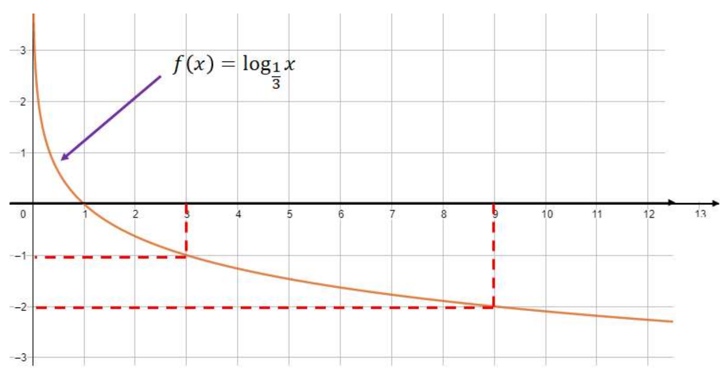
$$\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3} = y \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{y} = \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^{1} \Rightarrow y = 1$$

$$\log_{\frac{1}{3}} 1 = y \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{y} = 1 = \left(\frac{1}{3}\right)^{0} \Rightarrow y = 0$$

$$\log_{\frac{1}{3}} 3 = y \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{y} = 3 = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} \Rightarrow y = -1$$

$$\log_{\frac{1}{3}} 9 = y \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{y} = 9 = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \Rightarrow y = -2$$

Gráfico:



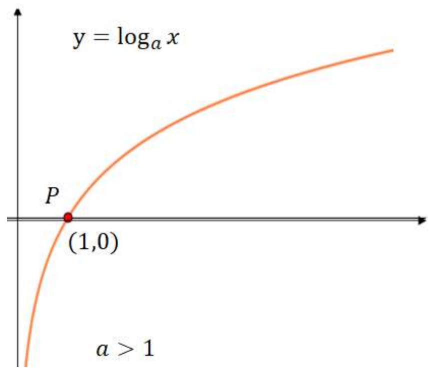
$$y = f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$$

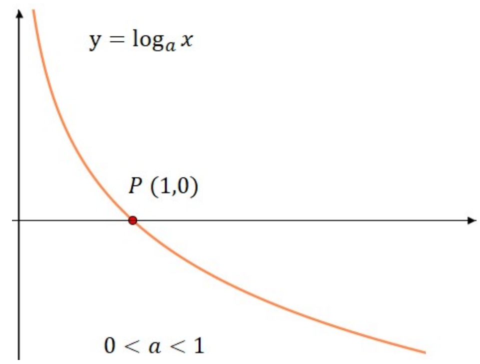
Los ejemplos dados nos llevan a clasificar una función definida por $y = \log_a x$ como:

- Creciente cuando $a > 1$
- Decreciente cuando $0 < x < 1$

Caracterización de una función logarítmica del estilo $f(x) = x$

1- Gráfico de la función:





2- El Dominio de la función es $\mathbb{R}_+^*$, o sea, solamente los números positivos poseen logaritmo.
3- El Conjunto Imagen de la función es $\mathbb{R}$, o sea que, cualquier número real es el logaritmo de algún número real positivo, en alguna base.
4- El gráfico de la función está a la derecha del *eje* y.
5- Si $x = 1 \Rightarrow y = \log_a 1 = 0$ pues $a^0 = 1$. O sea que el punto $P(1,0)$ pertenece al gráfico de la función, es decir, en cualquier base, el logaritmo de 1 es 0.
6- Si $x = a$ es la base, tenemos que $y = \log_a a = 1$, pues $a^1 = a$. O sea que el logaritmo de la base es 1.
7- La función es inyectiva, pues si $x_1 \neq x_2 \Rightarrow \log_a x_1 \neq \log_a x_2$.
8- La función es sobreyectiva pues, para $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}_+^* \mid y = \log_a x$.
9- La función es biyectiva, o uno a uno, pues es inyectiva y sobreyectiva al mismo tiempo.
10- En el caso de que $a > 1$, la función es creciente, pues si $x_1 > x_2 \Rightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2$.
11- En el caso de que $0 < x < 1$, la función es decreciente pues si $x_1 > x_2 \Rightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2$.
12- El *eje* y es una asíntota vertical de la función.
13- Si no se escribe la base, se sobreentiende que la base es 10, o sea, $\log_{10} x = \log x$.

TRABAJO PRÁCTICO N° 5

Ejercicio 25.

Construya el gráfico de las funciones siguientes:

a) $y = \log_2 x$ b) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ c) $y = \log_{2,5} x$

Ejercicio 26.

Calcule el valor de x

a) $\log_2 1 = x$ b) $\log_{\sqrt{2}} \sqrt{2} = x$ c) $\log_{10}(\log_2 2) = x$

Ejercicio 27.

Verifique cuáles funciones son crecientes y cuáles son decrecientes

a) $y = \log_5 x$ b) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ c) $y = \log_{0,6} x$ d) $f(x) = \log_{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} x$

Ejercicio 28.

Grafique la función, no localizando puntos sino empezando desde las gráficas modelos. (Gráficas de función logarítmica y exponencial).

a) $f(x) = \log_2(x - 4)$

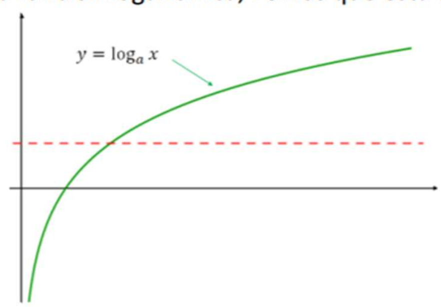
b) $g(x) = 2 + \log_3 x$

c) $h(x) = 1 - \log_{10} x$

5. La Función Logarítmica como Función Inversa.

Cuando estudiamos la función exponencial, vimos que era biyectiva. Por esta razón. Admitía inversa.

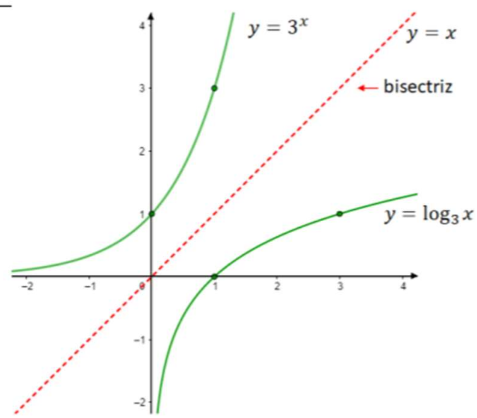
Si observamos la gráfica de la función logarítmica, vemos que ésta también es biyectiva.



Por otro lado, el logaritmo está definido en función de una potencia, la cual podemos asociarla a la función exponencial.

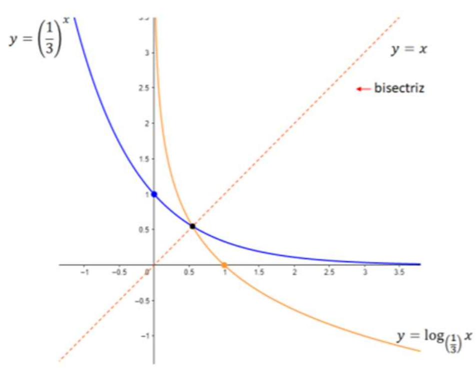
Sería natural, suponer que la función exponencial es la inversa de la función logarítmica y viceversa.

Hagamos en un mismo sistema de ejes cartesianos las funciones $y = \log_3 x$ y la función $y = 3^x$.



Ambas gráficas son simétricas respecto de la recta bisectriz del primero y tercer cuadrante, $y = x$. Este hecho es característico de las funciones inversas, como ya fue visto.

Del mismo modo, analicemos las funciones $y = \log_{\left(\frac{1}{3}\right)} x$ y $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ construyéndolas en el mismo sistema de ejes cartesianos.



Ambas gráficas son simétricas respecto de la recta bisectriz del primero y tercer cuadrante, $y = x$.
Recordemos que si f y g son funciones inversas, se cumple que: $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = id(x) = x$
Verifiquemos que esto se cumple en los ejemplos dados.

(a) $f(x) = \log_3 x$ y $g(x) = 3^x$.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3^x) = \log_3(3^x) \underbrace{=}_{(*)} x \cdot \log_3 3 \underbrace{=}_{(**)} x \cdot 1 = x$$

$(*)$ Ley del logaritmo de una potencia.
$(**)$ El logaritmo de la base es 1

(b) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\log_3 x) = 3^{\log_3 x} \underbrace{=}_{(***)} x$

$(***)$ Definición de logaritmo. Recordemos que el $\log_3 x$, es el **exponente** al que hay que elevar la base 3, para obtener x.

Por **(a)** y **(b)** las funciones $f(x) = \log_3 x$ y $g(x) = 3^x$ son inversas entre si.

6.Dominio de la función logarítmica

Recordemos que en la función logarítmica el logaritmando debe ser real y positivo, la base debe ser real, positiva y diferente de 1. Analicemos algunos ejemplos de determinación de dominio:

Ejemplo 1

Determinar el dominio de las siguientes funciones logarítmicas:

a) $y = \log_5(3x + 10)$ b) $f(x) = \log_4(5 - 12x)$

Solución

a) $y = \log_5(3x + 10)$

Debemos tener $\boxed{3x + 10 > 0}$
Entonces $3x > -10 \Rightarrow x > -\frac{10}{3}$.
Por lo tanto, el dominio es: $\boldsymbol{D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > -\frac{10}{3}\right\}}$

b) $f(x) = \log_4(5 - 12x)$

Debemos tener $\boxed{5 - 12x > 0}$
Entonces $5 > 12x \Rightarrow 12x < 5 \Rightarrow x < \frac{5}{12}$.
Por lo tanto, el dominio es: $\boldsymbol{D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{5}{12}\right\}}$

Ejemplo 2

Determinar el dominio de las siguientes funciones logarítmicas:

a) $y = \log_{10}(x^2 + 8x + 15)$ b) $f(x) = \log_4(x^2 + 3x + 5)$

Solución

a) $y = \log_{10}(x^2 + 8x + 15)$

Debemos tener $\boxed{x^2 + 8x + 15 > 0}$

$x^2 + 8x + 15 = 0$ tiene raíces $x_1 = -5$ y $x_2 = -3$

Por lo tanto $x^2 + 8x + 15 = (x + 5) \cdot (x + 3)$.

Analizamos el signo de la función cuadrática $y = x^2 + 8x + 15$ en los intervalos $(-\infty, -5)$, en $(-5, -3)$ y en $(-3, \infty)$, determinados por sus raíces.

	$(-\infty, -5)$	$(-5, -3)$	$(-3, \infty)$
$(x + 5)$	$-$	$+$	$+$
$(x + 3)$	$-$	$-$	$+$
$(x + 5) \cdot (x + 3)$	$+$	$-$	$+$

Por lo tanto $x^2 + 8x + 15 > 0$ en $(-\infty, -5) \cup (-3, \infty)$

Por lo tanto, el dominio es: $\boldsymbol{D = \{x \in \mathbb{R} \mid \ x < -5 \ o \ x > -3\} = (-\infty, -5) \cup (-3, \infty)}$

El apartado b) se deja como ejercicio

Ejemplo 3

Determinar el dominio de la función $y = \log_{(5x-12)}(5)$

Solución

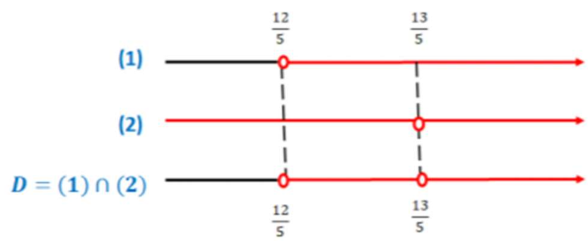
Se debe cumplir simultáneamente:

$$5x - 12 > 0 \quad \textbf{(1)} \quad \text{y} \quad 5x - 12 \neq 1 \quad \textbf{(2)}$$

(1) $5x - 12 > 0 \;\Rightarrow\; 5x > 12 \;\Rightarrow x > \frac{12}{5}$

(2) $5x - 12 \neq 1 \;\Rightarrow 5x \neq 13 \;\Rightarrow x \neq \frac{13}{5}$

Resumiendo, tenemos:



El dominio es la intersección de **(1)** y **(2)**, o sea $D = (1) \cap (2)$. Entonces,

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R} \middle| \; \frac{12}{5} < x < \frac{13}{5} \; o \; x > \frac{13}{5} \right\}$$

También podemos escribir el dominio de la siguiente manera

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R} \middle| \; x < \frac{12}{5} \;\; y \;\; x \neq \frac{13}{5} \right\}$$

O sino:

$$D = \left(\frac{12}{5}; \frac{13}{5} \right) \cup \left(\frac{13}{5}; \infty \right)$$

Ejemplo 4

Determinar el dominio de la función $y = \log_{(x-3)}(15 - 2x)$

Solución

Se debe cumplir simultáneamente:

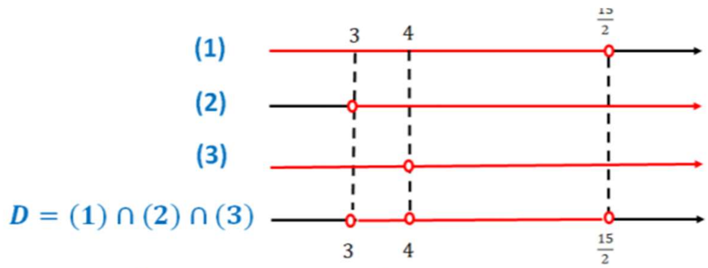
$$15 - 2x > 0 \quad \textbf{(1)}\,; \quad x - 3 > 0 \quad \textbf{(2)} \quad \text{y} \quad \textbf{(3)}$$

(1) $15 - 2x > 0 \;\Rightarrow\; 15 > 2x \;\Rightarrow\; 2x < 15 \;\Rightarrow x < \frac{15}{2}$

(2) $x - 3 > 0 \;\Rightarrow x > 3$

(3) $x - 3 \neq 1 \;\Rightarrow x \neq 4$

Resumiendo, tenemos:



El dominio es la intersección de (1) ; (2) y (3). Por lo tanto:

$$D = \left\{x \in \mathbb{R} |\ 3 < x < 4\ \ o\ \ 4 < x < \frac{15}{2}\right\}$$

Ejemplo 5

Determinar el dominio de la función $y = \log_{(x^2-9)}(-x^2 - 3x + 4)$

Solución

Se debe cumplir simultáneamente:

$$-x^2 - 3x + 4 > 0 \quad \textbf{(1)}; \quad x^2 - 9 > 0 \quad \textbf{(2)} \quad \text{y } x^2 - 9 \neq 1 \quad \textbf{(3)}$$

(1) La condición $-x^2 - 3x + 4 > 0$ es equivalente a $x^2 + 3x - 4 < 0$

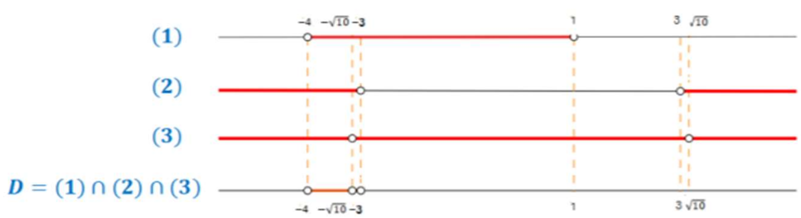
Estudiemos el signo de la función $f(x) = x^2 + 3x - 4$
Las raíces de la ecuación $x^2 + 3x - 4 = 0$ son $x_1 = -4$ y $x_2 = 1$
El signo de f varía según la siguiente gráfica:

(2) $x^2 - 9 > 0$

Estudiemos el signo de la función $g(x) = x^2 - 9$
Las raíces de la ecuación $x^2 - 9 = 0$ son $x_1 = -3$ y $x_2 = 3$
El signo de g varía según la siguiente gráfica:

(3) $x^2 - 9 \neq 1 \quad \Rightarrow \quad x^2 \neq 10 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{10}$

Por lo tanto:



El dominio es la intersección de (1) ; (2) y (3). Por lo tanto:

$$D = \left\{x \in \mathbb{R} |\ -4 < x < -\sqrt{10}\ \ o\ \ -\sqrt{10} < x < -3\right\}$$

Podemos escribirlo también

$$D = \left\{x \in \mathbb{R} |\ -4 < x < -3\ \ y\ \ x \neq -\sqrt{10}\right\}$$

Ejercicio 29

Determinar el dominio de las siguientes funciones logarítmicas:

a) $y = \log_{12}(5x+1)$

b) $f(x) = \log_4\left(3 - \frac{x}{4}\right)$

c) $y = \log_2(x^2 - 15x)$

d) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x^2+9)$

7. Ecuaciones logarítmicas.

Son ecuaciones que presentan logaritmos con la incógnita figurando en el logaritmo (resultado), en el logaritmando o en la base.

Son ejemplos de ecuaciones logarítmicas:

$a)\ \log_2(3x+1) = 3$

$b)\ \log_x 5 = 12$

$c)\ \log_5 12 = x$

$d)\ \log_2(x-1) + \log_7 2x = 1$

$e)\ \log x + \log(x-1) = 1$

Algunos de estos ejemplos pueden ser resueltos sólo con la definición de logaritmo. Ya, el ejemplo (d) necesita de más elaboración.

Observación: Cuando resolvemos una ecuación logarítmica, debemos tener en cuenta las restricciones a que deben estar sujetos los logaritmos, las bases y, consecuentemente la incógnita:

¿Cómo determinamos estas restricciones?

Debemos asegurarnos de que:

1) El logaritmando sea positivo.
   $\log_2(3x+1) = 3 \quad \textit{restricción}\ 3x+1>0$
2) La base sea positiva y distinta de 1.
   $\log_a(30) = 2 \quad \textit{restricción}\ a>0\ y\ a \neq 1$

A las restricciones se les suele llamar también "condiciones de existencia" o "dominio de definición", siendo estas designaciones, todas, equivalentes.

El "Conjunto Universo", (U) del cual obtenemos nuestras soluciones, es el conjunto de los números reales que cumplen con las dos restricciones mencionadas anteriormente.

El "Conjunto Solución" (S), es un subconjunto de U en el cual sus elementos verifican la igualdad planteada. ($S \subseteq U$)

En el ejemplo dado, $\log_2(3x+1) = 3$, $\mathcal{U} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > -\frac{1}{3}\right\}$, mientras que $S = \left\{\frac{7}{3}\right\} \subseteq \mathcal{U}$

Ejemplo 1

Resuelva la ecuación $\log_4(5x-1)=2$

Solución

$$\log_4(5x-1)=2$$
$$4^2=5x-1 \quad \textit{(por definición de logaritmos)}$$
$$16+1=5x$$
$$\frac{17}{5}=x$$

Como el logaritmando debe ser positivo, debemos **verificar** que $(5x-1)>0$ cuando $x=\frac{17}{5}$:

$5.\frac{17}{5}-1=16>0$.

Por lo tanto, el conjunto solución es: $S=\left\{\frac{17}{5}\right\}$

> ***Compruebe su respuesta:***
>
> Para $x=\frac{17}{5}$
>
> $\log_4\left(5\frac{17}{5}-1\right)=\log_4(17-1)=\log_4(16)=2$ ✅

Ejemplo 2

Resolver las ecuaciones siguientes:

a) $\log_8(x)=\frac{2}{3}$ b) $\log_4(x-1)=\frac{1}{2}$ c) $\log_2(2-x)=-1$

Solución

a) $\log_8(x)=\frac{2}{3}$

$$8^{\frac{2}{3}}=x \quad \textit{(por definición de logaritmos)}$$
$$\sqrt[3]{8^2}=x$$
$$x=4$$

> ***Compruebe su respuesta:***
>
> Para $x=4$
>
> $\log_8(4)=\frac{\log_2 4}{\log_2 8}=\frac{2}{3}$ ✅

Los apartados b) y c) se dejan como ejercicio

Ejemplo 3

Resuelva la ecuación $\log_2(x^2 - 2x - 16) = 3$

Solución

$\log_2(x^2 - 2x - 16) = 3$

$2^3 = x^2 - 2x - 16$ *(por definición de logaritmos)*

$x^2 - 2x - 24 = 0$ *(resolución de ec. cuadrática)*

$x_1 = -4 \ y \ x_2 = 6$

Compruebe su respuesta:

Para $x = -4$

$\log_2((-4)^2 - 2.(-4) - 16) = \log_2 8 = 3$ ✅

Para $x = 6$

$\log_2(6^2 - 2.6 - 16) = \log_2 8 = 3$ ✅

Como el logaritmando debe ser positivo, debemos **verificar** que $x^2 - 2x - 16 > 0$, para cada solución encontrada:

- $(-4)^2 - 2(-4) - 16 = 8 > 0$, entonces (-4) pertenece al conjunto solución.
- $(6)^2 - 2(6) - 16 = 8 > 0$, entonces (6) pertenece al conjunto solución.

Por lo tanto, el conjunto solución de la ecuación logarítmica es: $\boldsymbol{S = \{-4, 6\}}$

Ejemplo 4

Resolver las ecuaciones siguientes:

a) $\log_{(x-2)} 4 = 2$ b) $\log_x 10 = 3$

Solución

a) $\log_{(x-2)} 4 = 2$

$(x-2)^2 = 4$ *(por definición de logaritmos)*

$x^2 - 4x + 4 = 4$ *(cuadrado de un binomio)*

$x^2 - 4x = 0$ *(resolución de ec. cuadrática)*

$x_1 = 0 \ y \ x_2 = 4$

Compruebe su respuesta:

Para $x = 0$

$\log_{(0-2)}(4) = \log_{-2}(4)$ ❌

Para $x = 4$

$\log_{(4-2)}(4) = \log_2 4 = 2$ ✅

Como la base del logaritmo debe ser positiva y distinta de 1, se descarta la opción de $x = 0$, pero aún debemos **verificar** que $x - 2 > 0$ y $x - 2 \neq 1$ para la solución que queda:

- $4 - 2 = 2 > 0$ y $4 - 2 \neq 1$, entonces (4) pertenece al conjunto solución.

Por lo tanto, el conjunto solución de la ecuación logarítmica es: $\boldsymbol{S = \{4\}}$

b) $\log_x 10 = 3$

$x^3 = 10$ *(por definición de logaritmos)*

$x = \sqrt[3]{10}$

Compruebe su respuesta:

Para $x = \sqrt[3]{10}$

$\log_{\sqrt[3]{10}}(10) = \frac{\log 10}{\log \sqrt[3]{10}} = 3$ ✅

Como la base del logaritmo debe ser positiva y distinta de 1, debemos **verificar** que se cumplen ambas restricciones: $\sqrt[3]{10} > 0$ y $\sqrt[3]{10} \neq 1$ entonces el conjunto solución de la ecuación logarítmica es: $\boldsymbol{S = \{\sqrt[3]{10}\}}$

Ejemplo 5

Resolver la ecuación: $\log_{(x-3)}(x - 1) = 2$

Solución

$\log_{(x-3)}(x - 1) = 2$

$(x - 3)^2 = (x - 1)$ *(por definición de logaritmos)*

$x^2 - 6x + 9 = x - 1$ *(cuadrado de un binomio)*

$x^2 - 7x + 10 = 0$ *(resolución de ec. cuadrática)*

$x_1 = 2$ y $x_2 = 5$

Compruebe su respuesta:

Para $x = 2$

$\log_{(2-3)}(2 - 1) = \log_{-1}(1)$ ❌

Para $x = 5$

$\log_{(5-3)}(5 - 1) = \log_2 4 = 2$ ✅

Como la incógnita está en la base debe satisfacer que $x - 3 > 0$ y $x - 3 \neq 1$. Además, la incógnita está en el logaritmando entonces también deben verificar que $x - 1 > 0$, en este caso vemos que $x = 2$ no cumple con la primera condición, por lo que se descarta, pero aún debemos **verificar** que se cumplen las tres restricciones para la única solución que nos queda:

- $5 - 2 = 3 > 0$; $3 \neq 1$; $5 - 1 = 4 > 0$ entonces (5) pertenece al conjunto solución.

Por lo tanto, el conjunto solución de la ecuación logarítmica es: $\boldsymbol{S = \{5\}}$

Ejemplo 6

Resolver la ecuación: $\log_2(3x + 1) + \log_2(9 - x) = 2$

Solución

$\log_2(3x + 1) + \log_2(9 - x) = 5$

$$\log_2[(3x+1)(9-x)] = 5 \quad \textit{(logaritmo de un producto)}$$
$$\log_2[27x - 3x^2 + 9 - x] = 5$$
$$\log_2[-3x^2 + 26x + 9] = 5 \quad \textit{(suma de términos semejantes)}$$
$$2^5 = -3x^2 + 26x + 9 \quad \textit{(por definición de logaritmos)}$$
$$-3x^2 + 26x - 23 = 0 \quad \textit{(resolución de ec. cuadrática)}$$
$$x_1 = 1 \ y \ x_2 = \frac{23}{3}$$

Compruebe su respuesta:

Para $x = 1$

$\log_2(3.1+1) + \log_2(9-1) = 2 + 3 = 5$ ✅

Para $x = \frac{23}{3}$

$\log_2\left(3.\frac{23}{3} + 1\right) + \log_2\left(9 - \frac{23}{3}\right) = \log_2\left(24.\frac{4}{3}\right) = 5$ ✅

Como la incógnita está sólo en el logaritmando entonces debemos **verificar** que $3x + 1 > 0$ y $9 - x > 0$ para cada solución encontrada (ya que son soluciones de una ecuación cuadrática no sabemos si serán solución de la ecuación original que es una ecuación logarítmica):

- $3.1 + 1 = 4 > 0 \ \wedge 9 - 1 = 8 > 0$, entonces (1) pertenece al conjunto solución.
- $3.23/3 + 1 = 24 > 0 \ \wedge 9 - 23/3 = 4/3 > 0$entonces $\left(\frac{23}{3}\right)$ pertenece al conjunto solución.

Por lo tanto, el conjunto solución de la ecuación logarítmica es: $\boldsymbol{S = \left\{1, \frac{23}{3}\right\}}$

Ejemplo 7

Resolver la ecuación: $\log_6(2x+5) - \log_6(32x+20) = -1$

Solución

$$\log_6(2x+5) - \log_6(32x+20) = -1$$
$$\log_6\left[\frac{(2x+5)}{32x+20}\right] = -1 \quad \textit{(cociente de un logaritmo)}$$
$$6^{-1} = \frac{2x+5}{32x+20} \quad \textit{(por definición de logaritmo)}$$
$$\frac{1}{6}(32x+20) = 2x + 5 \quad \textit{(exp. negativo y operaciones)}$$
$$\frac{16}{3}x + \frac{10}{3} = 2x + 5 \quad \textit{(prop. distributiva)}$$
$$\left(\frac{16}{3} - 2\right)x = 5 - \frac{10}{3} \quad \textit{(agrupación de términos semejantes)}$$
$$x = \frac{1}{2}$$

<u>*Compruebe su respuesta:*</u>

Para $x = \frac{1}{2}$

$\log_6\left(2\frac{1}{2} + 5\right) - \log_6\left(32.\frac{1}{2} + 20\right) = \log_6 6 - \log_6 36 = 1 - 2 = -1$ ✅

Como la incógnita está sólo en el logaritmando entonces debemos verificar que $2x + 5 > 0$ y $32x + 20 > 0$ para la solución encontrada:

- $\frac{2.1}{2} + 5 = 6 > 0 \wedge 32\left(\frac{1}{2}\right) + 20 = 36 > 0$, entonces $(1/2)$ pertenece al conjunto solución.

Por lo tanto, el conjunto solución de la ecuación logarítmica es: $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$

Ejemplo 8

Resolver la ecuación: $2 \cdot \log_3(x - 1) = 1 + \log_3(7 - x)$

Solución

$$2\log_3(x-1) = 1 + \log_3(7-x)$$

$$\log_3(x-1)^2 - \log_3(7-x) = 1 \qquad \textit{(potencia de un logaritmo)}$$

$$\log_3\left[\frac{(x-1)^2}{7-x}\right] = 1 \qquad \textit{(cociente de un logaritmo)}$$

$$3^1 = \frac{(x-1)^2}{7-x} \qquad \textit{(por definición de logaritmos)}$$

$$21 - 3x = x^2 - 2x + 1 \qquad \textit{(cuadrado de un binomio y operaciones)}$$

$$x^2 + x - 20 = 0 \qquad \textit{(resolución de ec. cuadrática)}$$

$$x_1 = -5 \ y \ x_2 = 4$$

<u>*Compruebe su respuesta:*</u>

Para $x = -5$

$PM = 2.\log_3(-5 - 1) = 2.\log_3(-6)$ ❌

Para $x = 4$

$PM = 2.\log_3(4 - 1) = 2.\log_3 3 = 2$

$SM = 1 + \log_3(7 - 4) = 1 + \log_3 3 = 2$ ✅

Como la incógnita está en el logaritmando entonces debemos **<u>verificar</u>** que $x - 1 > 0$ y $7 - x > 0$. Podemos ver que $x = -5$ no cumple con $x - 1 > 0$, por lo que queda descartada, pero aún tenemos que verificar la única solución que nos queda:

- $4 - 1 = 3 > 0 \wedge 7 - 4 = 3 > 0$ entonces (4) pertenece al conjunto solución.

Por lo tanto, el conjunto solución de la ecuación logarítmica es: $S = \{4\}$

Ejemplo 9

Resolver la ecuación: $\log_2[9+\log_5(x-4)]=3$

Solución

$$\log_2[9+\log_5(x-4)]=3$$

$$2^3 = 9+\log_5(x-4) \qquad \textit{(por definición de logaritmo)}$$

$$-1 = \log_5(x-4)$$

$$5^{-1} = x-4 \qquad \textit{(por definición de logaritmo)}$$

$$x=\frac{1}{5}+4$$

$$x=\frac{21}{5}$$

<u>*Compruebe su respuesta:*</u>

Para $x=\frac{21}{5}$

$$\log_2\left[9+\log_5\left(\frac{21}{5}-4\right)\right]=\log_2\left[9+\log_5\left(\frac{1}{5}\right)\right]=\log_2(9-1)=\log_2 8=3$$ ✅

Como la incógnita está sólo en el logaritmando entonces debemos **<u>verificar</u>** que $x-4>0$ para la solución encontrada (ya que es solución de una ecuación lineal no sabemos si serán solución de la ecuación original que es una ecuación logarítmica):

- $\frac{21}{5}-4=\frac{1}{5}>0$, entonces $\frac{21}{5}$ pertenece al conjunto solución.

Por lo tanto, el conjunto solución de la ecuación logarítmica es: $\boldsymbol{S}=\left\{\frac{21}{5}\right\}$

Ejemplo 10

Resolver la ecuación: $\log_2 a=\log_a 16$

$$\log_2 a=\log_a 16$$

$$\frac{\log a}{\log 2}=\frac{\log 16}{\log a} \qquad \textit{(ley de cambio de base)}$$

$$(\log a)^2=\log 2\,.\log 16 \qquad \textit{(producto cruzado)}$$

$$(\log a)^2=\log 2\,.\log 2^4$$

$$(\log a)^2=\log 2\ .4\log 2 \qquad \textit{(potencia de un logaritmo)}$$

$$(\log a)^2=2\log 2\,.2\log 2$$

$$(\log a)^2=(2\log 2)^2$$

$$|\log a|=|2\log 2| \qquad \textit{(raíz cuadrada a ambos miembros)}$$

$$|\log a|=|\log 2^2| \qquad \textit{(potencia de un logaritmo)}$$

$$\log a=\log 4\ \Rightarrow a=4 \qquad \textit{Solución 1}$$

$$\log a=-\log 4\ =\log 4^{-1}\ \Rightarrow a=\frac{1}{4} \qquad \textit{Solución 2}$$

__Compruebe su respuesta:__

Para $a = 4$

$PM = \log_2 4 = 2$

$SM = \log_4 16 = 2$ ✅

Para $a = \frac{1}{4}$

$PM = \log_2 \left(\frac{1}{4}\right) = -2$

$SM = \log_{\frac{1}{4}} 16 = -2$ ✅

Como la incógnita está en la base debe satisfacer que $a > 0$ y $a \neq 1$. Además, la incógnita está en el logaritmando entonces también deben verificar que $a > 0$ (igual a la primera condición de la base), debemos **__verificar__** que se cumplen las tres restricciones (en realidad dos) para las soluciones encontradas:

- $4 > 0$ y $4 \neq 1$; entonces (4) pertenece al conjunto solución.
- $\frac{1}{4} > 0$ y $\frac{1}{4} \neq 1$; entonces $\left(\frac{1}{4}\right)$ pertenece al conjunto solución.

Por lo tanto, el conjunto solución de la ecuación logarítmica es: $S = \left\{\frac{1}{4}; 4\right\}$

TRABAJO PRÁCTICO N° 5

Ejercicio 30.

Resuelva las ecuaciones logarítmicas, y exprese el conjunto solución:

a. $\ln(2 + x) = 1$

b. $\log(3x + 5) = 2$

c. $\log_2(x^2 - x - 2) = 2$

d. $\log_2 3 + \log_2 x = \log_2 5 + \log_2(x - 2)$

e. $\log_5 x + \log_5(x + 1) = \log_5 20$

f. $\log_5(x + 1) - \log_5(x - 1) = 2$

g. $\log_3 x = \log_x 81$

h. $\log x + \log(x - 3) = 1$

i. $\log_2(x) = 4$

j. $\log_x(3x + 5) = 1$

k. $\log_{(x-1)}(x^2 - x - 9) = 1$

l. $\log_2[2 + log_2(x - 1)] = 1$

m. $\log_{(1-x)}(2x^2 + x + 3) = 2$

Ejercicio 31

Encuentre la solución de la ecuación exponencial, redondeando a cuatro lugares decimales

a. $10^{-x} = 4$

b. $3^{2x-1} = 5$

c. $2e^{12x} = 17$

d. $4 + 3^{5x} = 8$

e. $\frac{3^x}{14} = 0.1$

f. $\left(\frac{1}{4}\right)^x = 75$

g. $\frac{50}{1+e^{-x}} = 4$

h. $\frac{10}{1+e^{-x}} = 2$

i. $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$

j. $x^2 10^x - x10^x = 2(10^x)$

Ejercicio 32.

Modelado con funciones exponenciales y logarítmicas

A. El número de bacterias en un cultivo se modela mediante la función

$$n_t = 500\ e^{-0{,}45}$$

donde *t* se mide en horas y n es el número de bacterias en miles .

a. ¿Cuál es el número inicial de bacterias?

b. ¿Cuántas bacterias están en el cultivo después de tres horas?

c. ¿Después de cuántas horas la cantidad de bacterias llega a 10000?

B. En una fiesta se sirve un tazón de sopa caliente. Comienza a enfriarse según la ley de enfriamiento de Newton, de modo que su temperatura en el instante *t* se determina mediante

$$T_t = 65 + 145\ e^{-0{,}05t}$$

donde t representa al tiempo minutos y T la temperatura de la sopa medida en °F.

a. ¿Cuál es la temperatura inicial de la sopa?

b. ¿Cuál es la temperatura de la sopa después de diez minutos?

c. ¿Después de cuánto tiempo la temperatura será de 100°*F*?

C. Un lago pequeño contiene cierta especie de pez. La población de peces se modela mediante la función

$$P = \frac{10}{1 + 4\ e^{-0{,}8t}}$$

donde *P* es el número de peces en miles y *t* se mide en años desde que se aprovisionó el lago.

a. Encuentre la población de peces después de tres años.

b. ¿Después de cuántos años la población de peces llegará a cinco mil?

D. Los médicos emplean el yodo radiactivo como trazador para diagnosticar ciertos trastornos de la glándula tiroides. Este tipo de yodo, se desintegra de tal manera que la masa restante después de t días se determina mediante la función

$$m_t = 6\,e^{-0{,}087t}$$

donde *m* es la masa de yodo en gramos y t es el tiempo en días.

a. Encuentre la masa inicial de yodo.

b. ¿Cuánta masa queda después de veinte días?

c. ¿Cuántos días habrán transcurridos si se sabe que queda una masa de *0,57g*?

E. Un paracaidista salta desde una altura razonable al suelo. La resistencia del aire que experimenta es proporcional a su velocidad, y la constante de proporcionalidad es de 0,2. Se puede demostrar que la velocidad de descenso de paracaidista se expresa como

$$v(t) = 80(\,1 - e^{-0{,}2t})$$

donde *t* se mide en segundos y *v(t)* se mide en pies por segundo

a. Encuentre la velocidad inicial del paracaidista.

b. Calcule la velocidad después de cinco segundos y después de diez segundos.

c. Halle el tiempo que transcurre hasta que alcanza una velocidad de 77 pies/seg