# Cálculo II

1. Series de Potencias. Serie de Taylor.
Serie de Fourier.

En los ejercicios donde aparece se debe utilizar un software para calcular, graficar, etc. según corresponda.

## 1 Repaso de Cálculo 1

Utilizando los Criterios de convergencia, determine si las siguientes series numéricas convergen o divergen. Si converge, indique si es absoluta o condicionalmente.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^3}+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}+\left(\frac{5}{7}\right)^n\right)$
(d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(2n+1)^2}$ (e) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,\frac{20^n}{n+1}$

## 2 Serie de potencias.

1. Defina Serie de potencia e intervalo de convergencia.

2. Analice el intervalo de convergencia de cada una de las siguientes series de potencia. Para ello, utilice los siguientes límites especiales

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{p} = 1,\ p>0 \text{ constante} \qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}=\infty$$
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$$

Ayuda: calcule el intervalo abierto en donde converge la serie y luego analice la convergencia en los extremos de dicho intervalo.

(a) $\sum_{n=0}^{\infty}(x-2)^n$
(b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+4)^n}{n}$
(c) $\sum_{n=1}^{\infty}n^p\,(x-3)^n$. (Ayuda: determine para qué valores de $p$ converge y para cuales diverge)
(d) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,\frac{y^n}{n!}$.
(e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)!}t^{2n-1}$.(Ayuda: tenga en cuenta que es una serie lagunar, analice en detalle que métodos son posibles aplicar y cuales no)

3. Defina Polinomio de Taylor y Serie de Taylor. Utilice dichos conceptos en lo que sigue:

(a) Halle el polinomio de Taylor de grado 1, 2 y $n$ para las funciones $e^x$ y $sen\,(x)$ en $x=0$. Grafíque distintos grados de los polinomios y la función, simultáneamente, y analice gráficamente la convergencia.

(b) Calcule el valor de $e^{0.1}$ con una aproximación de tercer orden. Acote el error que se comete. Grafique el polinomio $p_3$ y $e^x$ simultáneamente, interprete graficamente el resultado obtenido.

4. Verifique los siguientes desarrollos en series de Taylor. Es decir, compruebe la expresión general del coeficiente del desarrollo de Taylor y el intervalo de convergencia

(a) $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $|x| < 1$.

(b) $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$, $x \in \mathbb{R}$

(c) $senx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}, x \in \mathbb{R}$

(d) $\cos x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}, x \in \mathbb{R}$

(e) $(1+x)^a = \sum_{n=1}^{\infty} \binom{a}{n} x^n$, $|x| < 1$, donde $a$ es constante y el coeficiente binomial está definido por

$$\binom{a}{0} = 1, \qquad \binom{a}{n} = \frac{a\,(a-1)\,(a-2)\ldots(a-n+1)}{n!}, n \geq 1$$

## 3 Serie de Fourier

1. Sabiendo que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función periódica integrable de período $T$, los coeficientes de Fourier de $f$ en el intervalo $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ están definidos por:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{T/2} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \,.\cos(n\omega_0 x)\, dx, \qquad n \in \mathbb{N}_0 \\ b_n &= \frac{1}{T/2} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \,.sen(n\omega_0 x)\, dx, \qquad n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

donde $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$, deduzca que:

(a) Si $f(x)$ es una función par de período $T$, entonces

$$a_n = \frac{2}{T/2} \int_{0}^{T/2} f(x)\,.\cos(n\omega_0 x)\, dx, \text{ para } n \in \mathbb{N}_0 \qquad \text{y} \qquad b_n = 0, \text{ para } n \in \mathbb{N}$$

(b) Si $f(x)$ es una función impar de período $T$, entonces

$$a_n = 0, \text{ para } n \in \mathbb{N}_0 \qquad \text{y} \qquad b_n = \frac{2}{T/2} \int_{0}^{T/2} f(x)\,.sen(n\omega_0 x)\, dx, \text{ para } n \in \mathbb{N}$$

2. Para cada una de las siguientes funciones:

$f_1(x) = x$, $-\pi \leq x < \pi$, $T = 2\pi$

$f_2(x) = |x|$, $-2 \leq x < 2$, $T = 4$

$f_3(x) = \begin{cases} 1 & si \quad |x| < a/2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$, $0 < a < T$.

$f_4(x) = \begin{cases} 0 & si \quad -1/3 \leq x < 0 \\ sen(3\pi x) & si \quad 0 \leq x < 1/3 \end{cases}$, $T = 2/3$.

$f_5(x) = |sen(\pi x)|$, $T = 2$, $-1 \leq x < 1$.

(a) Halle la serie de Fourier en el intervalo dado, para el período $T$ indicado.

(b) Grafique simultáneamente los polinomios trigonométricos de grado $N$, para distintos valores de $N$, y la extensión periódica de $f$ .

(c) ¿Cuantos términos son necesarios para obtener una aproximación de la función? Para ello grafique la magnitud de los ármonicos, es decir los coeficientes $a_n$ y $b_n$.

(d) Utilice el Teorema de Dirichlet-Riemann para determinar la función a la cual converge el desarrollo de Fourier obtenido en (a).

- Recomendamos ver https://www.geogebra.org/m/t6tuMtrW

3. Compare las formas de las ondas producida por cada instrumento, todas con aproximadamente el mismo instrumento, donde $P$ es la presión y $t$ el tiempo, y sus correspondientes armónicos. ¿Cuantos armónicos son necesarios para obtener una aproximación de la función en cada caso? (Imagenes de R. Serway, Fundamentos de la Física, Vol 1,pag 501)

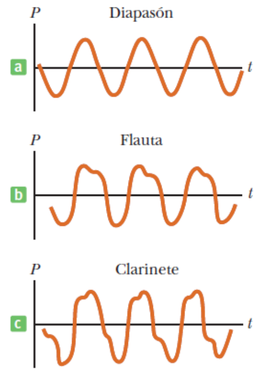


**Figura 14.26** Formas de onda producidas por a) un diapasón, b) una flauta y c) un clarinete; todas con aproximadamente la misma frecuencia. La presión está graficada en el eje vertical y el tiempo en el horizontal.

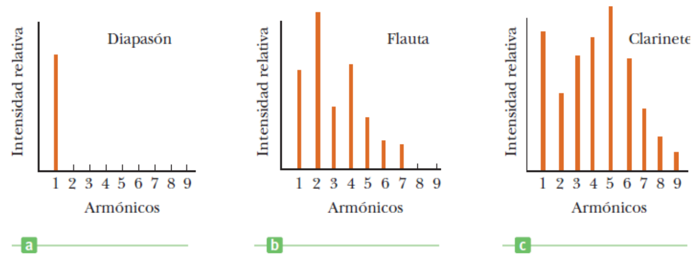


**Figura 14.27** Armónicos de las formas de ondas de la figura 14.26. Observe su variación en intensidad.

4. Obtenga el desarrollo de:

   (a) $f(x) = x(\pi - x)$, en serie de senos para $x \in [0, \pi)$.

   (b) $f(x) = e^x$, en serie de cosenos para $x \in [0, \pi)$.

   Para cada inciso, grafique los polinomios trigonométricos de grado $N = 1, 5, 10$ y la extensión periódica de $f$ , simultáneamente.

5. Sabiendo el

   **Teorema de derivación**: Sea $f(x)$ una función periódica, con período $T$, derivable a trozos y continua en $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$, tal que $f\left(-\frac{T}{2}\right) = f\left(\frac{T}{2}\right)$ y $f'(x)$ derivable a trozos en $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$. Si la serie de Fourier de $f(x)$ es

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n . \cos(n\omega_0 x) + b_n . sen(n\omega_0 x)\right) \tag{1}$$

   entonces la serie de Fourier de $f'(x)$ se obtiene derivando término a término a (1), es decir,

$$f'(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \left(-n\omega_0 . a_n . sen(n\omega_0 x) + n\omega_0 . b_n . \cos(n\omega_0 x)\right)$$

y el

**Teorema de integración**: Sea $f(x)$ una función periódica, con período $T$, derivable a trozos en $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ . Si $a_0 = 0$ entonces la función

$$h(x) = \int_{-T/2}^{x} f(t)\, dt$$

es periódica con período $T$ y si la serie de Fourier de $f$ es (1) entonces la serie de Fourier de $h$ es

$$h(x) \sim A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( -\frac{b_n}{n\omega_0} . \cos(n\omega_0 x) + \frac{a_n}{n\omega_0} . sen(n\omega_0 x) \right), \qquad A_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} h(x)\ dx$$

y los desarrollos obtenidos en el ejercicios 2, obtenga los desarrollos de Fourier de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = 1$, $-\pi \leq x < \pi$, período $2\pi$.

(b) $f(x) = x^2$, $-\pi \leq x < \pi$, período $2\pi$.

(c) $f(x) = \begin{cases} 0 & si \quad -1/3 \leq x < 0 \\ \cos(3\pi x) & si \quad 0 \leq x < 1/3 \end{cases}$, período $2/3$.

Grafique, en cada caso, simultáneamente los polinomios trigonométricos de grado $N$, para distintos valores de $N$, y la extensión periódica de $f$ . Analice cómo se modifica la velocidad de convergencia de una serie de Fourier via derivación y/o integración.

Bibliografía:


- (Series de Fourier) Apuntes de Cálculo Avanzado, Jerónimo Alaminos Prats, Universidad de Granada.
- (Series númericas) Libros de cálculo y apuntes de Cálculo I.


2020, FCEN, UNCuyo