Sucesiones y Series

June Amillo

1 Límite de Sucesiones

1.1 Sucesiones. Definición y Representación.

Una sucesión es un tipo particular de función. En concreto,

Definición 1 *Una **sucesión** es una función f cuyo dominio es el conjunto de los enteros positivos. Haciendo $a_n = f(n)$ para cada $n = 1, 2, 3, \ldots$ la sucesión se denota por*

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots.$$

*Los elementos a_n se conocen como **términos** de la sucesión, pudiendo coincidir sus valores entre sí.*

Las sucesiones pueden tomar valores en cualquier conjunto. No obstante al hablar de sucesiones entenderemos sucesiones reales, i.e. sucesiones cuyos términos son números reales.

Como cualquier función las sucesiones pueden ser representadas mediante una expresión, un algoritmo, una lista o una gráfica.

Cuando se utiliza una expresión para representar el término general de una sucesión es costumbre utilizar la letra n— o alternativamente letras como m, i, j o k— para designar la variable independiente. Ello nos servirá para recordar que se trata de una variable discreta que toma solo valores enteros. Por ejemplo, la sucesión $a_n = 1/n$ es la sucesión

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$$

Muchas sucesiones están definidas en forma recursiva como la sucesión de Fibonacci

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, a_1 = 1, a_2 = 1$$

y otras se definen de forma diferente para diferentes tipos de enteros como la sucesión $a_n = 0$ si n es par y $a_n = 1$ si n es impar. Todas ellas se representan mediante algoritmos.

Una lista finita que incluya suficientes términos como para poder predecir el resto es utilizada en algunos casos. Por ejemplo,

$$1, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \ldots$$

es la sucesión formada por todos los números primos.

Puesto que el dominio de una sucesión son los enteros positivos su gráfica es un conjunto de puntos en el plano en vez de una curva continua.

1.2 Definición de Límite

La idea de límite de una sucesión es paralela a la de límite de una función en el infinito. Intuitívamente se dice que una sucesión tiene límite L si los términos de la sucesión se aproximan tanto como queramos a L tomando n suficientemente grande. Formalmente,

Definición 2 *Una sucesión (a_n) tiene* ***límite*** *L si para cada $\epsilon > 0$ existe un número $N > 0$ tal que para todo índice $n > N$ se verifica*

$$|a_n - L| < \epsilon.$$

En este caso se escribe

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = L.$$

Las sucesiones que poseen límite (finito) se dicen ***convergentes*** *y el resto* ***divergentes***

En lo que concierne a la convergencia o divergencia de una sucesión los primeros términos no tienen importancia. Lo que cuenta es el comportamiento de las colas de una sucesión. Por **cola** de una sucesión se designa a todos los términos de la misma cuyos índices son mayores que un número entero $N > 0$, i.e. el conjunto $a_n / n > N$. Otra forma de expresar que una sucesión (a_n) converge a L es decir que para cada $\epsilon > 0$ el intervalo $(L - \epsilon, L + \epsilon)$ contiene todos los términos de la sucesión salvo un número finito de ellos.

2 Propiedades de los Límites

Como en el caso general de funciones el límite de una sucesión si existe es único.

Teorema 3 (Unicidad del Límite) *Si una sucesión es convergente, su límite es único.*

Las reglas usuales del cálculo de límites son válidas para sucesiones.

Teorema 4 (Algebra de Límites) *Sean (a_n) y (b_n) dos sucesiones tales que*

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = A \text{ y } \lim_{n\to+\infty} b_n = B$$

y α y β números reales cualesquiera. Entonces,

1. *Linealidad*
$$\lim_{n\to+\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha A + \beta B.$$
2. *Regla del producto*
$$\lim_{n\to+\infty} (a_n b_n) = AB.$$
3. *Regla del producto*
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$$
siempre que $B \neq 0$.

Teorema 5 (Regla del Sandwich) *Sean (a_n), (b_n) y (c_n) tres sucesiones tales que $a_n \leq c_n \leq b_n$ para todo n (o para todo $n > N$ siendo N un entero positivo cualquiera) y*

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = L.$$

Entonces,

$$\lim_{n\to+\infty} c_n = L.$$

Teorema 6 (Funciones Continuas y Sucesiones) *Sea (a_n) una sucesión con límite L y f una función real continua en L y cuyo dominio contiene los valores de la sucesión. Entonces,*

$$\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = f(L).$$

Teorema 7 (Variable Discreta vs Variable Continua) *Sea (a_n) una sucesión y f una función definida en un intervalo de la forma $(b, +\infty)$ tal que $a_n = f(n)$. Si*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$$

la sucesión (a_n) converge a L, i.e.

$$\lim_{n\to+\infty} f(n) = L.$$

El resultado anterior permite utilizar la regla de L´Hôpital para sucesiones. No obstante, el recíproco no es cierto como lo muestra la sucesión $a_n = \sin 2\pi n$. Dicha sucesión es constantemente cero y por tanto converge a cero. En cambio la función $f(x) = \sin 2\pi x$ no posee límite cuando x tiende a $+\infty$.

Ejemplo 8 (Límites Importantes) *Los límites siguientes aparecen con gran frecuencia*

1. *Si* $|x| < 1$
$$\lim_{n\to+\infty} x^n = 0.$$
2. *Para todo* x
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x^n}{n!} = 0.$$
3.
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n} = 0.$$
4. *Para todo* x
$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x.$$
5. *Para todo* $x > 0$
$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x} = 1.$$
6.
$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Cálculo de los límites anteriores:

1. Supongamos en primer lugar que $0 < x < 1$. Tomando logaritmos resulta
$$\lim_{n\to+\infty} (\ln x^n) = \lim_{n\to+\infty} (n \ln x) = -\infty.$$

Por tanto, y teniendo en cuenta que la exponencial es una función continua se tiene

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} x^n &= \lim_{n\to+\infty} e^{\ln x^n} \\
&= e^{\lim_{n\to+\infty}(\ln x^n)} \\
&= e^{-\infty} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Para $-1 < x < 0$ podemos escribir $x = -|x|$, y por ser $|x| > 0$ se tiene

$$\lim_{n\to+\infty} |x|^n = 0$$

y por consiguiente

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} x^n &= \lim_{n\to+\infty} (-|x|)^n \\
&= (-1)^n \lim_{n\to+\infty} |x|^n \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Por último el límite es obvio para $x = 0$.

2. En primer lugar supongamos que $x > 0$ y sea k un entero tal que $k - 1 < x \leq k$. Entonces,

$$\begin{aligned}
0 < \frac{x^n}{n!} &= \frac{x}{n} \cdots \frac{x}{k+1} \frac{x}{k} \cdots \frac{x}{1} \\
&\leq \frac{x}{k+1} \cdots \frac{x}{k+1} \frac{x}{1} \cdots \frac{x}{1} \\
&= \left(\frac{x}{k+1}\right)^{n-k} x^k \\
&= \left(\frac{x}{k+1}\right)^{n} (k+1)^k.
\end{aligned}$$

Como

$$0 < \frac{x}{k+1} < 1$$

según el límite del ejemplo anterior se tiene

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{x}{k+1}\right)^n = 0$$

y aplicando la regla del sandwich se concluye que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x^n}{n!} = 0.$$

El caso de $x < 0$ se reduce al anterior escribiendo $x = -|x|$ y procediendo como en el primer ejemplo. El caso $x = 0$ es también obvio.

3. Se trata de un límite de la forma ∞/∞.Substituimos n por una variable continua x y aplicamos L´Hôpital resultando

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{1/x}{1} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \\ &= 0. \end{aligned}$$

4. Sea
$$L = \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n.$$

Tomando logaritmos resulta Aplicando L´Hopital tras hacer un cambio a variable continua resulta

$$\begin{aligned} \ln L &= \lim_{n\to+\infty} \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \\ &= \lim_{n\to+\infty} n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) \\ &= x \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}} \\ &= x\lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t)}{t} \\ &= x\lim_{t\to 0} \frac{1}{1+t} \\ &= x. \end{aligned}$$

Por consiguiente,
$$L = e^x.$$

■

2.1 Convergencia , Acotación y Sucesiones Monótonas

La propiedad de acotación de una sucesión tiene el mismo significado que para una función real cualquiera.

Definición 9 *Una sucesión* (a_n) *es* ***acotada superiormente*** *si existe un* B *tal que* $a_n \leq B$ *para todo* $n = 1, 2, 3, \ldots$. *Dicha sucesión está* ***acotada inferiormente*** *si existe un* b *tal que* $a_n \geq b$ *para todo* $n = 1, 2, 3, \ldots$. *Una sucesión es* ***acotada*** *si está acotada superiormente e inferiormente a la vez.*

El siguiente resultado establece la relación entre convergencia y acotación de una sucesión.

Teorema 10 (Condición Necesaria de Convergencia) *Toda sucesión convergente es acotada. O lo que es equivalente, toda sucesión no acotada es divergente.*

Por ejemplo la sucesión natural $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ no está acotada por lo que es divergente. El recíproco es falso, la sucesión $0, 1, 0, 1, \ldots$ esta acotada pero no es convergente.

Definición 11 *Una sucesión* (a_n) *es* ***monótona creciente*** *si* $a_n \leq a_{n+1}$ *para todo* $n = 1, 2, 3, \ldots$. *Dicha sucesión es* ***monótona decreciente*** *si* $a_n \geq a_{n+1}$ *para todo* $n = 1, 2, 3, \ldots$. *Una sucesión* ***monótona*** *es aquella que es creciente o decreciente. La sucesión se dice* ***estríctamente creciente*** *o* ***estríctamente decreciente*** *si en las deficiones anteriores se substituyen las desigualdades* $\leq$ *y* $\geq$ *por las de* $<$ *y* $>$ *respectívamente.*

Para las sucesiones monótonas la acotación basta para asegurar su convergencia.

Teorema 12 *Toda sucesión monótona creciente y acotada superiormente es convergente. De forma similar toda sucesión monótona decreciente y acotada inferiormente es convergente.*

Ejemplo 13 *Estudiar la convergencia de la sucesión recurrente*

$$\begin{aligned} a_0 &= 0, \\ a_n &= 2 + \sqrt{a_{n-1}}, \qquad n = 1, 2, 3, \cdots \end{aligned}$$

Si la sucesión fuera convergente el límite L habría de verificar la relación de recurrencia, es decir
$$L = 2 + \sqrt{L}.$$
Haciendo $x = \sqrt{L}$ y pasando todo al lado izquierdo obtenemos la ecuación
$$x^2 - x - 2 = 0$$
cuyas soluciones son
$$x = -1 \text{ o } 2.$$
Descartando el valor negativo obtenemos $L = 4$.Para que podamos asegurar que éste es el límite de la solución debemos comprobar la convergencia de la misma ya que el proceso utilizado para calcularlo presuponía que la sucesión era convergente. Para ello demostraremos que se trata de una sucesión monótona y acotada lo que según el teorema anterior implica la convergencia.

En primer lugar observamos que $a_0 = 0 < a_1 = 2$. Suponiendo, $a_{n-1} < a_n$ tenemos
$$a_n = 2 + \sqrt{a_{n-1}} < 2 + \sqrt{a_n} = a_{n+1}$$
lo que prueba por inducción que la sucesión es monótona creciente.

Por otra parte observamos que $a_0 < 4$ y suponiendo $a_{n-1} < 4$ se tiene
$$a_n = 2 + \sqrt{a_{n-1}} < 2 + \sqrt{4} = 4$$
lo que prueba tambien por inducción que la sucesión está acotada manteniéndose todos sus t´rminos por debajo de 4.

En consecuencia, la sucesión es convergente y
$$\lim_{n \to +\infty} a_n = 4.$$
■

2.1.1 Subsucesiones

Definición 14 *Sea (a_n) una sucesión cualquiera y n_k una sucesión estríctamente creciente de números enteros positivos. La sucesión $b_k = a_{n_k}$ se dice que es una* ***subsucesión*** *de la sucesión (a_n). Si b_k converge su límite cuando $k \to +\infty$ se llama* ***límite subsecuencial*** *de (a_n).*

Por ejemplo, las sucesiones $(1/k^2)$, $(1/2k)$ y $(1/2^k)$ son subsucesiones de la sucesión $(1/n)$. Es fácil comprobar que tanto la sucesión anterior como las tres subsucesiones mencionadas convergen hacia cero. Esto es cierto en general.

Teorema 15 *Si una sucesión converge a L todas sus subsucesiones convergen también a L.*

Este resultado se puede usar para probar la divergencia de una sucesión. Para ello basta buscar una subsucesión divergente o bien dos subsucesiones convergentes con límite distintos. Por ejemplo la sucesión $0, 1, 0, 1, \ldots$ no es convergente ya que la subsucesión formada por los términos impares converge a 0 y la subsucesión formada por los términos pares converge a 1.

Por otra parte, si se conoce la convergencia de una sucesión es posible determinar o estimar su límite escogiendo una subsucesión que converja rápidamente.

3 Series Numéricas

3.1 Definiciones

La suma de los n primeros términos de la sucesión $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ se puede obtener recursivamente mediante el algoritmo

$S_1 = a_1$
for $k = 1$ **to** n **do** $S_k = S_{k-1} + a_k$.

Para dar sentido a la suma de todos los términos debemos combinar el algoritmo anterior con un proceso de límite.

Definición 16 *Sea $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ una sucesión numérica. Una expresión del tipo*

$$a_1 + \cdots + a_n + \cdots$$

*se llama **serie** y se representa abreviadamente por el símbolo*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

o incluso

$$\sum a_n.$$

Para cada $n \geq 1$ la suma

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + \cdots + a_n$$

se llama ***suma parcial** n**-ésima*** *y la sucesión*

$$S_1, S_2, \cdots, S_n, \cdots$$

sucesión de sumas parciales. *Si la sucesión de sumas parciales converge y su limite es S se dice que la serie* ***converge*** *y que su* ***suma*** *es S. En este caso se escribe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n = S.$$

Si la sucesión de sumas parciales no converge diremos que la serie ***diverge.*** *Cuando una serie sea convergente llamaremos* ***resto de orden*** *n a la diferencia o error*

$$R_n = S - S_n.$$

Ejemplo 17 (Serie Geométrica) *Se llama* ***serie geométrica de razón*** *r a una serie de la forma*

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = 1 + r + r^2 + \cdots + r^n + \cdots.$$

Dichas series son convergentes sí y solo sí $|r| < 1$ en cuyo caso su suma es

$$S = \frac{1}{1-r}.$$

En efecto, para todo entero no negativo n se tiene

$$S_n = 1 + r + r^2 + \cdots + r^n.$$

Multiplicando ambos lados de la ecuación anterior por r resulta

$$rS_n = r + r^2 + \cdots + r^{n+1}$$

y restando ambas ecuaciones obtenemos

$$(1-r)S_n = 1 - r^{n+1}.$$

De esta forma para $r \neq 1$ la suma parcial n-ésima se puede expresar mediante la fórmula

$$S_n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}.$$

Si $|r| < 1$,

$$\lim_{n\to\infty} r^{n+1} = 0$$

por lo que resulta

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-r}.$$

Si $|r| > 1$, conforme $n \to +\infty$ los términos r^{n+1} se hacen cada vez más grandes en valor absoluto por lo que la sucesión S_n diverge. Si $r = -1$

$$S_n = \frac{1-(-1)^{n+1}}{1+1} = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es impar} \\ 0 & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

por lo que la sucesión de sumas parciales oscila alternativamente entre los dos valores 1 y 0 y por consiguiente diverge.

Por último, para $r = 1$ la fórmula anterior no es válida. En este caso,

$$S_n = 1 + 1 + 1^2 \cdots + 1^n = n + 1$$

por lo que la sucesión de sumas parciales S_n también diverge y con ello la serie.■

Recalcamos que la suma de una serie se obtiene como límite de una sucesión y no sumando término a término. Por ello no es de extrañar que las series convergentes se pueden sumar y multiplicar por una constante para obtener nuevas series convergentes.

Teorema 18 (Algebra de Series) *Sean $\sum a_n = A$ y $\sum b_n = B$ dos series convergentes y λ una constante. Entonces,*

1. $\sum(a_n + b_n) = A + B$
2. $\sum \lambda a_n = \lambda A$

Al igual que para las series geométricas es posible obtener la suma de una serie en forma simbólica para algunas clases de series pero en general resulta dificil o imposible. La situación es similar a la integración. Una vez conocida una expresión para la suma parcial n-ésima S_n la fórmula

$$\sum_{i=n+1}^{m} a_i = S_m - S_n$$

sería el análogo discreto de la fórmula de Barrrow y la fórmula

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} a_i = \lim_{m\to\infty} (S_m - S_n)$$

la versión discreta de una integral infinita. De la misma forma que encontrar una primitiva no es posible en muchos casos tampoco es posible en general encontrar una fórmula para la suma parcial n-ésima. En estos casos siempre es posible estimar la suma de la serie obteniendo S_n para un n conveniente utilizando un algoritmo de sumación. Esta aproximación al problema de sumar una serie requiere conocer de antemano la convergencia de la serie y tener una idea del error o resto R_n que se comete al substituir el valor de la suma S por el de una suma parcial S_n.

Existen diferentes criterios que permiten determinar la convergencia de una serie de antemano y algunos proporcionan estimaciones del resto. Al usar estos criterios conviene tener en cuenta que la convergencia de la serie no se ve afectada al suprimir un número finito de términos al principio. Dicho de otro modo, para cualquier $k \geq 1$ las series

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ y } \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n$$

convergen o divergen al mismo tiempo.

Por otra parte si una serie es convergente con suma S se tiene

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

por lo que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0.$$

Teorema 19 (Condición necesaria de convergencia) *Si la serie* $\sum a_n$ *converge, entonces*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Esta condición no es suficiente. Existen series cuyo término general tiende hacia cero pero que divergen como es el caso de la serie armónica.

Ejemplo 20 (Serie Armónica) *Se llama serie armónica a la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots.$$

Dicha serie es divergente.

En efecto, examinemos la subsucesión S_{2^k}, $k = 0, 1, 2, \cdots$ de la sucesión de sumas parciales.

$$\begin{aligned}
S_1 &= 1 \\
S_2 &= 1 + \frac{1}{2} \\
S_4 &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) \\
&> 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\
&= 1 + 1. \\
S_8 &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) \\
&> 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\
&= 1 + \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

En general,

$$\begin{aligned}
S_{2^k} &= 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^{k-1}+1}+\cdots+\frac{1}{2^k}\right) \\
&> 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^k}+\cdots+\frac{1}{2^k}\right) \\
&= 1+\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\cdots+\frac{2^{k-1}}{2^k} \\
&= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2} \\
&= 1+\frac{k}{2}.
\end{aligned}$$

Por tanto los términos S_{2^k} pueden hacerse tan grandes como se quiera escogiendo k suficientemente grande. Por consiguiente, la sucesión de sumas parciales diverge y por ello la serie armónioca diverge.

3.2 Criterios de Convergencia

3.2.1 Series de Términos Positivos

Las series de términos positivos son aquellas en que cada término es mayor que cero, i.e. $a_n \geq 0$ para cada n. En estas condiciones las sumas parciales de la serie $\sum a_n$ forman una sucesión no decreciente.

Teorema 21 *Una serie de términos positivos es convergente sí y solo sí la sucesión de sumas parciales está acotada.*

Teorema 22 (Criterio de Comparación) *Sean a_n y b_n sucesiones tales que $0 \leq a_n \leq b_n$. Entonces,*

1. *Si $\sum b_n$ converge, también $\sum a_n$ converge.*
2. *Si $\sum a_n$ diverge, también $\sum b_n$ diverge.*

Ejemplo 23 *La serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots$$

es convergente.

En efecto, observamos que para todo $n \geq 2$ se verifica

$$0 < \frac{1}{n!} = \frac{1}{n(n-1)\cdots 2} \leq \frac{1}{2 \cdot 2 \cdots 2} = \frac{1}{2^{n-1}}$$

por tanto se trata de una serie de términos positivos acotados uno a uno por los de la serie

$$1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} + \cdots = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}.$$

Esta última serie es una serie geométrica de razón $1/2 < 1$ que es convergente. En consecuencia, la serie inicial es convergente.■

Teorema 24 (Criterio de Comparación por Límite) *Sean $a_n \geq 0$ y $b_n > 0$ para todo $n > N$ y*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = L.$$

Entonces,

1. *Si $0 < L < \infty$ las series $\sum a_n$ y $\sum b_n$ son ambas convergentes o ambas divergentes.*
2. *Si $L = 0$ y $\sum b_n$ converge, la serie $\sum a_n$ también converge.*
3. *Si $L = \infty$ y $\sum b_n$ diverge, la serie $\sum a_n$ también diverge.*

Teorema 25 (Criterio de la Integral) *Sea $f(x)$ una función continua, positiva y decreciente para todo $x \geq 1$. La serie $\sum a_n$, con $a_n = f(n)$ para todo $n \geq 1$, es convergente sí y solo sí la integral*

$$\int_1^{\infty} f(x)\, dx$$

es convergente, en cuyo caso se tienen las siguientes estimaciones:

1. *Estimación del resto*

$$\int_{n+1}^{\infty} f(x)\, dx \leq R_n \leq \int_n^{\infty} f(x)\, dx.$$

2. *Estimación de la suma parcial n-ésima*

$$\int_1^{n+1} f(x)\,dx \leq S_n \leq a_1 + \int_1^n f(x)\,dx.$$

3. *Estimación de la suma infinita S*

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx \leq S \leq a_1 + \int_1^{\infty} f(x)\,dx.$$

Ejemplo 26 (p-Series) *La serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

converge para $p > 1$ y diverge para $p \leq 1$.

En efecto, para $p \leq 0$ el término general de la serie no tiende a 0 por lo que la serie diverge. Si $p > 0$ la función $f(x) = 1/x^p$ es continua, positiva y decreciente para todo $x \geq 1$. Entonces la serie converge sí solo sí la integral

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}$$

converge. Ahora bien, para $p \neq 1$

$$\begin{aligned}
\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} &= \int_1^{\infty} x^{-p}\,dx \\
&= \lim_{b\to\infty} \int_1^b x^{-p}\,dx \\
&= \lim_{b\to\infty} \frac{b^{-p+1}-1}{-p+1} = \begin{cases} \frac{1}{p-1} & \text{si } p > 1 \\ \infty & \text{si } p < 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

por lo que la serie solo converge para $p > 1$.

3.2.2 Series Alternadas

Se conocen como series alternadas aquellas cuyos términos son positivos y negativos de forma alterna.

Teorema 27 (Criterio de Leibnitz) *Supongamos*

1. $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \geq \cdots \geq 0.$
2. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$
   Entonces, la serie alternada

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots$$

converge y

$$|R_n| \leq a_{n+1}.$$

Ejemplo 28 (Serie Armónica Alternada) *La serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n} + \cdots$$

es convergente.

En efecto, la sucesión formada por los valores absolutos de los términos de la serie cumple las dos condiciones del Criterio de Leibnitz:

1. Es una sucesión decreciente y positiva ya que

$$1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \cdots > \frac{1}{n} > \cdots > 0$$

2. Tiende hacia cero ya que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0.$$

En consecuencia la serie es convergente.■

3.2.3 Series de Términos Cualesquiera

Existen series con términos positivos y negativos que no son alternadas. Los siguientes criterios son aplicables a cualquier serie sea cual sea el signo de sus términos.

Teorema 29 (Criterio del Cociente) *Sea $\sum a_n$ una serie de términos cualesquiera y sea*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = L.$$

1. *Si $L < 1$ la serie converge.*

2. *Si $L > 1$ o infinito la serie diverge.*

3. *Si $L = 1$ el criterio no da información.*

Teorema 30 (Criterio de la Raíz) *Sea $\sum a_n$ una serie de términos positivos y sea*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L.$$

1. *Si $L < 1$ la serie converge.*

2. *Si $L > 1$ o infinito la serie diverge.*

3. *Si $L = 1$ el criterio no da información.*

3.3 Convergencia Absoluta

Una serie $\sum a_n$ se dice que es **absolutamente convergente** si la serie de los valores absolutos $\sum |a_n|$ converge. En este caso, y dado que

$$0 \leq a_n + |a_n| \leq 2|a_n|$$

del criterio de comparación se sigue que la serie $\sum(a_n + |a_n|)$ converge y en consecuencia también lo hace la serie

$$\sum a_n = \sum[(a_n + |a_n|) - |a_n|]$$

por ser suma de dos series convergentes.

Teorema 31 (Convergencia Absoluta) *Si la serie* $\sum |a_n|$ *converge, la serie* $\sum a_n$ *también converge.*

Según ésto las series absolutamente convergentes son convergentes. No obstante, existen series convergentes para las que la serie de los valores absolutos correspondiente diverge (ver ejercicio OJO). Para series de términos positivos la convergencia y la convergencia absoluta coinciden. Los criterios del cociente y de la raíz son criterios de convergencia absoluta y no proporcionan ninguna información sobre series no absolutamente convergentes. Se demuestra en la teoría de series que las series absolutamente convergentes se pueden multiplicar término a término y reordenar como si fueran sumas finitas. Esto no es cierto en general.

4 Series de Potencias

4.1 Introducción

Las series de potencias son la extensión natural de los polinomios.

Definición 32 *Una* ***serie de potencias*** *es una serie del tipo*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots$$

o más generalmente de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n + \cdots$$

donde c_0, c_1,..., c_n, ...*son números fijos llamados* ***coeficientes****, a otra constante llamada* ***centro*** *y* x *un número variable.*

Las sumas parciales de una serie de potencias son polinomios en x o en $x - a$. La convergencia de una serie de potencias depende del valor de x y su suma es una función $f(x)$.

Ejemplo 33 *La serie geométrica de razón* x *convergente sí y solo sí* $x \in (-1, 1)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1-x}.$$

4.2 Radio de Convergencia

Supongamos que la serie $\sum c_n x^n$ converge para $x = b$. Entonces la sucesión $c_n b^n$ tiende hacia cero por lo que resulta estar acotada, i.e. existe B tal que $|c_n b^n| < B$ para todo n. En consecuencia,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} |c_n x^n| &= \sum_{n=0}^{\infty} |c_n||x|^n \\
&\leq \sum_{n=0}^{\infty} |c_n||b|^n \left(\frac{|x|}{|b|}\right)^n \\
&\leq B \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{|x|}{|b|}\right)^n .
\end{aligned}$$

La última serie es una serie geométrica de razón $r = |x|/|b|$. Si $|x| < |b|$ la razón es menor que uno y la serie converge. Por comparación concluimos que la serie de potencias $\sum c_n x^n$ converge absolutamente en el intervalo $(-|b|, |b|)$. En consecuencia podemos enunciar la siguiente propiedad:

Teorema 34 *Si la serie de potencias*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

converge para un valor $x = b$ la serie converge absolutamente en el intervalo $|x| < |b|$.

De acuerdo con esta propiedad el conjunto de valores de x para los que una serie de potencias converge no puede tener lagunas pudiendo presentarse tres posibilidades:

1. Existe un $R > 0$ tal que la serie converge absolutamente para $|x| < R$ y diverge si $|x| > R$. Pudiendo converger en los extremos $x = R$, $x = -R$.

2. La serie converge para todo x.

3. La serie solo converge en $x = 0$.

En el primer caso diremos que la serie posee un *radio de convergencia* $R > 0$, independientemente de lo que ocurra en los extremos. En el segundo caso diremos que posee un radio de convergencia $R = \infty$ y en el tercero un radio de convergencia $R = 0$. El intervalo $(-R, R)$ se llama *intervalo de convergencia* y en él la serie converge absolutamente. En el caso de una serie de potencias con centro en a, análogas consideraciones conducen a un intervalo de convergencia de la forma $(a - R, a + R)$. Utilizando el criterio de la raíz se obtiene la siguiente expresión analítica del radio de convergencia:

Corolario 35 *Sea*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

una serie de potencias y

$$L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}.$$

Entonces, si $0 < L < \infty$, el radio de convergencia de la serie es $R = 1/L$. Si $L = 0$, el radio de convergencia es $R = \infty$ y si $L = \infty$, $R = 0$.

Analogamente, utilizando el criterio del cociente se obtiene:

Corolario 36 *Sea*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

una serie de potencias y

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|}.$$

Entonces, si $0 < L < \infty$, el radio de convergencia de la serie es $R = 1/L$. Si $L = 0$, el radio de convergencia es $R = \infty$ y si $L = \infty$, $R = 0$.

Ejemplo 37 *Determinar el radio de convergencia de la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n.$$

Utilizando la fórmula del cociente se tiene

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1}{n+1}}{\dfrac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

por lo que el radio de convergencia es $R = 1/L = 1$.Por consiguiente la serie converge en el intervalo $(-1, 1)$ y posiblemente en sus extremos. En $x = 1$ se tiene la serie armónica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

que es divergente. En cambio, en $x = -1$ resulta la serie armónica alternada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$$

que sí es convergente. En consecuencia la serie de potencias converge en el intervalo $[-1, 1)$.■

Ejemplo 38 *Determinar el radio de convergencia de la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n.$$

Utilizando la fórmula del cociente se tiene

$$\begin{aligned}
L &= \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\dfrac{n!}{n^n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)n!}{n!} \frac{n^n}{(n+1)(n+1)^n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\dfrac{(n+1)^n}{n^n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n} \\
&= \frac{1}{e}.
\end{aligned}$$

Por tanto, $R = 1/L = e$.En consecuencia podemos afirmar que la serie converge en el intervalo $(-e, e)$. Además es posible que converja en los extremos del intervalo. Para $x = -e$ se tiene la serie alternada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n!}{n^n} e^n$$

y para $x = e$ la serie de términos positivos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} e^n.$$

Utilizando la fórmula de la aproximación de Stirling $n! \simeq \sqrt{\pi n} n^n e^{-n}$ válida para valores grandes de n resulta

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} e^n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{\pi n} n^n e^{-n}}{n^n} e^n = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\pi n} = +\infty$$

lo que nos indica que el término general de las series anteriores no tiende a cero por lo que ninguna de ellas es convergente. En consecuencia, la serie de potencias no converge en ninguno de los extremos de su intervalo de convergencia.■

4.3 Operaciones con Series de Potencias

Como si se tratara de polinomios las series de potencias se pueden sumar, restar, multiplicar, dividir, e incluso derivar e integrar para obtener nuevas series de potencias.

Teorema 39 (Algebra de Series de Potencias) *Sean* $f(x) = \sum a_n x^n$ *y* $g(x) = \sum b_n x^n$ *en el intervalo* $|x| < R$*. Entonces, para* $|x| < R$ *se verifica*

1. $f(x) + g(x) = \sum (a_n + b_n) x^n$.
2. $f(x) - g(x) = \sum (a_n - b_n) x^n$.
3. $f(x)g(x) = \sum c_n x^n$ *con*

$$c_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}.$$

4. Si $g(x) \neq 0$ en $|x| < R$, $f(x)/g(x) = \sum c_n x^n$ donde los coeficientes resultan de resolver de forma iterada las ecuaciones

$$\begin{aligned} b_0 c_0 &= a_0 \\ b_0 c_1 + b_1 c_0 &= a_1 \\ &\cdots\cdots \\ b_0 c_n + b_1 c_{n-1} + \cdots + b_n c_0 &= a_n \\ &\cdots\cdots \end{aligned}$$

Observamos que las fórmulas para multiplicar series de potencias muestran que éstas se multiplican como polinomios, término a término empezando con las constantes y continuando con las demás potencias en orden creciente. La división se efectúa como en el caso de dos polinomios pero ordenando estos en sentido creciente de sus potencias. En cualquier caso todas estas operaciones se pueden efectuar de forma automática mediante un CAS.

Teorema 40 (Diferenciación e Integracion) *Sea $f(x) = \sum a_n x^n$ en el intervalo $|x| < R$. Entonces, para $|x| < R$ se verifica:*

1. *f es diferenciable, la serie que se obtiene derivando término a término converge y se cumple*

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots$$

2. *f es integrable, la serie que se obtiene integrando término a término converge y se cumple*

$$\int_0^x f(t)\,dt = a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \frac{a_2}{3} x^3 + \cdots$$

4.4 Series de Taylor

Una serie de potencias $\sum c_n (x-a)^n$ define una función

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$$

cuyo dominio es el intervalo $|x-a| < R$ de convergencia de la serie. Haciendo $x = a$ en la igualdad anterior resulta

$$f(a) = c_0.$$

Si derivamos y hacemos $x = a$ resulta

$$f'(a) = c_1.$$

En general, derivando n veces y haciendo $x = a$ resulta

$$f^{(n)}(a) = n!c_n.$$

Esto muestra que los coeficientes de una serie de potencias pueden ser expresados en función de las derivadas n-ésimas de la función suma $f(x)$ de la serie.

Teorema 41 *Sea $f(x)$ una función definida por una serie de potencias $\sum c_n(x-a)^n$ en un intervalo de la forma $|x-a| < R$. Entonces,*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Definición 42 *Sea f una función con derivadas de todos los órdenes en un intervalo centrado en a. Se llama* ***serie de Taylor*** *de f en a a la serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\cdots.$$

Si $a = 0$ la serie se conoce como ***serie de MacLaurin*** *de f*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots.$$

Ahora nos plantearemos el problema recíproco. Dada una función f que posea derivadas de todos los órdenes en un intervalo centrado en a, ¿podemos afirmar que la serie de Taylor asociada converge en algún $x \neq a$? Y si es así, ¿convergerá a la propia función f? La primera pregunta se puede responder estudiando el radio de convergencia. Para responder a la segunda estudiaremos la diferencia entre $f(x)$ y las sumas parciales de la serie de Taylor.

Definición 43 *Sea f una función con derivadas hasta el orden n en un intervalo centrado en a. Se llama* ***polinomio de Taylor*** *de orden n de f en a al polinomio*

$$P_n(x,a) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

La diferencia

$$R_n(x,a) = f(x) - P_n(x,a)$$

se llama ***Resto de Taylor*** *de orden n de f en a.*

Los polinomios de Taylor asociados a una función son por tanto las sumas parciales de la serie de Taylor correspondiente. El polinomio de Taylor de orden uno es la linealización de f en a, i.e. la tangente a la gráfica de f en $(a, f(a))$. Es una buena aproximación local de f en a. Además su valor y el de su derivada en a coinciden con $f(a)$ y $f'(a)$ respectivamente. En general el valor de polinomio de Taylor de orden n en a y el de sus n derivadas consecutivas coinciden con $f(a)$, $f'(a)$, $\ldots$, $f^{(n)}(a)$ respectivamente. El Resto de Taylor es el error que se comete al aproximar la función f por el polinomio de Taylor. El siguiente teorema proporciona una expresión de dicho error.

Teorema 44 (Fórmula de Lagrange del Resto) *Sea f una función con derivadas continuas hasta el orden $n+1$ en un intervalo centrado en a. Entonces para cada x en dicho intervalo existe un c entre a y x tal que*

$$R_n(x,a) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

La serie de Taylor de una función $f(x)$ converge a dicha función sí y solo sí el resto de Taylor converge hacia cero. La región de convergencia de una serie de Taylor viene determinada por el radio de convergencia de dicha serie, no obstante la serie convergerá a la propia función que la origina para aquellos valores de x tales que el resto de Taylor tienda hacia cero. Al analizar el resto de Taylor mediante la fórmula de Lagrange se presenta la dificultad de que el punto c no es conocido. No obstante solo necesitamos estimar el valor del resto y no su valor exacto. Para ello basta con encontrar una cota de la derivada $n+1$-ésima. En particular si existen constantes M y r tales que

$$|f^{(n+1)}(t)| \leq M r^{n+1}$$

para todo t entre a y x, se tiene

$$|R_n(x,a)| \leq M\frac{r^{n+1}|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Si estas condiciones se satisfacen para todo n, entonces la serie de Taylor converge a $f(x)$.

Ejemplo 45 *Desarrollo en serie de Taylor de algunas funciones básicas*

1. *Para todo $x \in (-\infty, +\infty)$*

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

2. *Para todo $x \in (-\infty, +\infty)$*

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

3. *Para todo $x \in (-\infty, +\infty)$*

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

4. *Para todo $x \in (-1, +1]$*

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

5. *Para todo $x \in [-1, +1]$*

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Obtención de los desarrollos:

1. Sea $f(x) = e^x$.Entonces,

$$f(x) = f'(x) = f''(x) = \cdots = e^x$$

por lo que

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = \cdots = 1.$$

El desarrollo de McLaurin correspondiente es

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 1 + x + \frac{1}{2!} x + \cdots + \frac{1}{n!} x^n + \cdots.$$

Dicha serie converge para todo $x \in (-\infty, +\infty)$ ya que

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n\to\infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Para probar que converge a la función exponencial debemos comprobar que el resto de Taylor correspondiente

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1} = \frac{e^c}{(n+1)!} x^{n+1}$$

tiende hacia cero. Puesto que c está comprendido entre 0 y x, para $x > 0$ se tiene

$$e^c < e^x = e^{|x|}$$

y para $x < 0$

$$e^c < e^0 < e^{|x|}.$$

Por consiguiente, para todo x

$$|R_n(x)| \leq \frac{e^{|x|}}{(n+1)!} |x|^{n+1}.$$

Puesto que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

concluimos que $R_n(x) \to 0$.

2. Sea $f(x) = \sin x$. Entonces,

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & \sin x; \\ f'(x) & = & \cos x; \\ f''(x) & = & -\sin x; \\ f'''(x) & = & -\cos x; \\ f^{(4)}(x) & = & \sin x; \\ & & \cdots \end{array}$$

por lo que

$$f(0) = 0; \quad f'(0) = 1; \quad f''(0) = 0; \quad f'''(0) = -1; f^{(4)}(x) = 0; \quad \cdots$$

obteniéndose el desarrollo de McLaurin

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1} + \cdots.$$

De la misma forma que en el caso anterior se comprueba fácilmente que la serie anterior converge para todo x.Por otra parte, para todo n y x se tiene $\left|f^{(n+1)}(x)\right| \leq 1$ por lo que el resto de Taylor de orden n verifica

$$|R_n(x)| = \frac{\left|f^{(n+1)}(c)\right|}{(n+1)!} |x|^{n+1} \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Puesto que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

concluimos que $R_n(x) \to 0$.

3. El desarrollo del coseno se obtiene directamente por diferenciación del desarrollo del seno.

4. Se verifica que
$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t}.$$
Ahora bien, substituyendo $x = -t$ en la serie geométrica de razón x se obtiene el desarrollo
$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n, \qquad -1 < t < 1.$$
Integrando miembro a miembro resulta
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}, \qquad -1 < t < 1.$$
Es claro que la serie resultante al hacer $x = 1$ es convergente ya que se trata de la serie armónica alternada. Más dificil es demostrar que converge a $\ln 2$, ésto es consecuencia del Teorema de Abel que se puede encontrar en textos avanzados.

5. Se verifica que
$$\arctan x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}.$$
Por lo que substituyendo $x = -t^2$ en la serie geométrica de razón x se obtiene el desarrollo
$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n}, \qquad -1 < t < 1.$$
Integrando miembro a miembro resulta
$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \qquad -1 < t < 1.$$
Las series resultantes para $x = 1$ y $x = -1$ son convergentes por satisfacer el criterio de las series alternadas. Además como en el caso anterior el Teorema de Abel permite asegurar que convergen a $\arctan 1$ y $\arctan(-1)$ respectivamente.