Capítulo 6

El teorema de Taylor

El cálculo del valor de un polinomio en un punto cualquiera es una operación algebraica elemental, ya que se reduce a un número finito de sumas y productos. No ocurre lo mismo, en general, con una función no polinómica, ni siquiera para funciones elementales sencillas; por ejemplo, ¿cómo se calcula $\operatorname{sen} 1$, ó $e^{\sqrt{2}}$? Resulta por ello de gran importancia práctica el poder aproximar una función cualquiera (suficientemente regular) en las proximidades de un punto por un polinomio adecuado. En este capítulo estudiaremos esta cuestión, prestando especial atención a obtener estimaciones del error cometido al reemplazar una función por su aproximación polinómica.

Un polinomio P de grado $\leq n$ está unívocamente determinado por el valor de sus derivadas $P^{(k)}(a)$ de orden $k \leq n$ en un punto cualquiera a. En efecto, si

$$P^{(k)}(a) = c_k, \qquad 0 \leq k \leq n$$

(donde hemos utilizado la notación $P^{(0)} \equiv P$), entonces es fácil probar que

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{c_k}{k!}(x-a)^k.$$

En particular, si P y Q son dos polinomios de grado $\leq n$, y $P^{(k)}(a) = Q^{(k)}(a)$ para $k = 0, 1, \ldots, n$, entonces $P = Q$.

Sea $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una función n veces derivable en un punto $a \in \mathbf{R}$; en particular, obsérvese que las derivadas de orden $\leq n-1$ de f están definidas en un intervalo abierto centrado en a. Llamaremos **polinomio de Taylor de orden n de f en a** al polinomio $P_{n,a,f}$ de grado $\leq n$ cuyas derivadas de orden $\leq n$ en el punto a coinciden con las de f. Por la observación del apartado anterior,

$$P_{n,a,f}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Frecuentemente escribiremos $P_{n,a}$, o incluso P_n, cuando la función f y el punto a queden claros por el contexto. Para muchas funciones elementales sencillas, el cálculo de $P_{n,a,f}$ no ofrece ninguna dificultad. Por ejemplo,

$$\begin{aligned}
P_{2m,0,\cos}(x) &= \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = P_{2m+1,0,\cos}(x) \\
P_{2m+1,0,\mathrm{sen}}(x) &= \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = P_{2m+2,0,\mathrm{sen}}(x) \\
P_{n,0,\exp}(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \\
P_{n,1,\log}(x) &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{(x-1)^k}{k}.
\end{aligned}$$

Sin embargo, para otras funciones elementales también muy sencillas el cálculo de $P_{n,a,f}$ a partir de su definición puede ser más complicado; por ejemplo, considérese la función $f(x) = \arctan x$ en $a = 0$.

Una primera propiedad interesante del polinomio de Taylor de orden n de una función en un punto es la siguiente:

Proposición 6.1. *Si $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ es n veces derivable en $a \in \mathbf{R}$, entonces*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - P_{n,a,f}(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

(En otras palabras, el error cometido reemplazando $f(x)$ por $P_{n,a,f}(x)$ tiende a cero cuando $x \to a$ más rápido que $(x-a)^n$.)

Demostración. Si

$$Q(x) = P_{n-1,a,f}(x) = P_{n,a,f}(x) - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k,$$

hay que probar que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - Q(x)}{(x-a)^n} = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

Aplicando la regla de L'Hospital $n-1$ veces (téngase en cuenta que $f^{(k)}(a) = Q^{(k)}(a)$ para $k \leq n-1$, por definición de $P_{n,a,f}$) se obtiene

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to a} \frac{f(x) - Q(x)}{(x-a)^n} &= \lim_{x \to a} \frac{f'(x) - Q'(x)}{n(x-a)^{n-1}} = \cdots = \lim_{x \to a} \frac{f^{(n-1)}(x) - Q^{(n-1)}(x)}{n!(x-a)} \\
&= \lim_{x \to a} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a)}{n!(x-a)} = \frac{f^{(n)}(a)}{n!},
\end{aligned}$$

por definición de $f^{(n)}(a)$. *Q.E.D.*

Diremos que dos funciones f y g son **iguales hasta orden n en a** si están definidas en un intervalo abierto centrado en a, y se cumple

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-g(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

En particular, hemos probado que una función derivable n veces en un punto a y su polinomio de Taylor de orden n en a son iguales hasta orden n en a. Es muy fácil ver (aplíquese, por ejemplo, la regla de L'Hospital), que dos polinomios de grado $\leq n$ son iguales hasta orden n en a si y sólo si son iguales. De esto se deduce la siguiente propiedad característica del polinomio de Taylor de una función en un punto:

Corolario 6.2. *Sea $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una función n veces derivable en a, y sea P un polinomio de grado $\leq n$. Si f y P son iguales hasta orden n en a, entonces $P = P_{n,a,f}$.*

Demostración. Basta observar que P y $P_{n,a,f}$ son dos polinomios de grado $\leq n$ iguales hasta orden n en a, ya que

$$\lim_{x\to a} \frac{P(x)-P_{n,a,f}(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a} \frac{P(x)-f(x)}{(x-a)^n} + \lim_{x\to a} \frac{f(x)-P_{n,a,f}(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Q.E.D.

Si f es n veces derivable en a, definimos el **resto de orden n en a** mediante

$$R_{n,a,f}(x) = f(x) - P_{n,a,f}(x).$$

Por lo visto anteriormente, $R_{n,a,f}(x)$ se hace muy pequeño cuando $x \to a$; en efecto, $R_{n,a,f}(x)$ tiende a cero más rápido que $(x-a)^n$ cuando $x \to a$. El siguiente resultado nos proporciona estimaciones mucho más precisas (y muy útiles en la práctica) de este resto:

Teorema de Taylor. *Si $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ es $n+1$ veces derivable en el intervalo $[a,x]$ (con $x > a$), entonces existen $t_1, t_2 \in (a,x)$ tales que*

i) $R_{n,a,f}(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(t_1)}{n!}(x-t_1)^n(x-a)$ (resto de Cauchy)

ii) $R_{n,a,f}(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(t_2)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ (resto de Lagrange)

iii) *Además, si $f^{(n+1)}$ es integrable en $[a,x]$ entonces se verifica*

$$R_{n,a,f}(x) = \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}\,(x-t)^n\,dt \qquad \text{(forma integral del resto)}$$

Si $x < a$, el mismo resultado es válido reemplazando los intervalos (a, x) y $[a, x]$ por (x, a) y $[x, a]$, respectivamente.

Demostración. Supongamos, para fijar ideas, que $x > a$. Si $t \in [a, x]$, definimos

$$S(t) = R_{n,t,f}(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k;$$

obsérvese que x es un número real *fijo,* mientras que t es una variable real que recorre el intervalo $[a, x]$. Por definición, $S(x) = 0$, y $S(a) = R_{n,a,f}(x)$ es el número que queremos estimar. Por las hipótesis sobre f, S es derivable en $[a, x]$, y se cumple:

$$S'(t) = -\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x-t)^{k-1} = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n.$$

Si $f^{(n+1)}$ es integrable en $[a, x]$, lo mismo ocurrirá con S' (puede probarse que el producto de funciones integrables es integrable), y por tanto

$$S(x) - S(a) = 0 - R_{n,a,f}(x) = \int_a^x S'(t)\,dt = -\int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\,dt,$$

lo cual demuestra la fórmula integral del resto.

Para obtener la forma de Cauchy del resto aplicamos el teorema del valor medio a S en el intervalo $[a, x]$, obteniendo que

$$S(x) - S(a) = -R_{n,a,f}(x) = S'(t_1)(x-a) = -\frac{f^{(n+1)}(t_1)}{n!}(x-t_1)^n(x-a)$$

para algún $t_1 \in (a, x)$. Finalmente, aplicando el teorema del valor medio de Cauchy a las funciones $S(t)$ y $g(t) = (x-t)^{n+1}$ en el intervalo $[a, x]$ obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{S(x) - S(a)}{0 - (x-a)^{n+1}} = \frac{R_{n,a,f}(x)}{(x-a)^{n+1}} &= \frac{S'(t_2)}{-(n+1)(x-t_2)^n} \\ &= \frac{-f^{(n+1)}(t_2)(x-t_2)^n/n!}{-(n+1)(x-t_2)^n} = \frac{f^{(n+1)}(t_2)}{(n+1)!}\end{aligned}$$

para algún $t_2 \in (a, x)$, lo que conduce a la forma de Lagrange del resto. *Q.E.D.*

Nota. Para $n = 0$ el teorema de Taylor proporciona el teorema del valor medio de Lagrange y la regla de Barrow.

Ejemplo 6.3. Utilizando la forma de Lagrange del resto se obtienen fácilmente las siguientes estimaciones:

$$|R_{n,0,\cos}(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}, \tag{6.1a}$$

$$|R_{n,0,\mathrm{sen}}(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \tag{6.1b}$$

$$|R_{n,0,\exp}(x)| \leq \begin{cases} e^x \dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}, & x > 0 \\ \dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}, & x < 0 \end{cases} \tag{6.1c}$$

$$|R_{n,1,\log}(x)| \leq \frac{|x-1|^{n+1}}{n+1}, \qquad x \geq 1. \tag{6.1d}$$

Si $0 < x \leq 1$, puede probarse que

$$|R_{n,1,\log}(x)| \leq \frac{|x-1|^{n+1}}{x(n+1)}; \tag{6.2}$$

véase el ejercicio al final de este capítulo.

Estas estimaciones permiten calcular el valor de las funciones elementales anteriores en un punto x con la aproximación que se desee si $|R_{n,f,a}(x)| \to 0$ cuando $n \to \infty$ ($a = 0$ ó 1 en este caso).

En primer lugar, obsérvese que si $m \in \mathbf{N}$ y $t > 0$ entonces

$$\lim_{m\to\infty} \frac{t^m}{m!} = 0.$$

En efecto, si $m > N = [t]$ entonces podemos escribir

$$\frac{t^m}{m!} = \frac{t}{m} \cdot \frac{t}{m-1} \cdots \frac{t}{N+1} \cdot \frac{t^N}{N!} \leq \frac{t}{m} \cdot \frac{t^N}{N!},$$

donde el último término es constante (no depende de m) y el primero tiende a cero cuando m tiende a infinito. Por tanto, cualquiera que sea $x \in \mathbf{R}$ para $f = \cos, \mathrm{sen}, \exp$ se cumple que $|R_{n,0,f}(x)|$ tiende a cero cuando n tiende a infinito. Para la función logaritmo, sólo se puede asegurar esto si $|x-1| \leq 1$, es decir si $0 < x \leq 2$ (ya que la estimación del resto que hemos utilizado sólo vale si $x > 0$), pues sólo entonces $|x-1|^{n+1}$ está acotado cuando $n \to \infty$.

Por ejemplo, supongamos que queremos calcular $\mathrm{sen}(1/2)$ (es decir, el seno de un ángulo de $90/\pi \simeq 28{,}65$ grados) con un error menor que 10^{-12}. Teniendo en cuenta que $P_{2n+1,0,\mathrm{sen}} = P_{2n+2,0,\mathrm{sen}}$ y utilizando la fórmula de Cauchy para el resto de orden $2n+2$ obtenemos

$$|\mathrm{sen}\, x - P_{2n+1,0,\mathrm{sen}}(x)| \leq \frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!}$$

Tomando $x = 1/2$ en esta fórmula se deduce que basta con que $2^{2n+3}(2n+3)! > 10^{12}$. Teniendo en cuenta la tabla siguiente de valores de $2^{2n+3}(2n+3)!$:

n	$2^{2n+3}(2n+3)!$
0	48
1	3840
2	645120
3	185794560
4	81749606400
5	51011754393600

se ve que basta tomar $n = 5$, lo que proporciona el valor

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{8\cdot 6} + \frac{1}{32\cdot 120} - \frac{1}{128\cdot 5040} + \frac{1}{512\cdot 362880} - \frac{1}{2048\cdot 39916800}$$
$$= \frac{39192849079}{81749606400} \simeq 0{,}479425538604183,$$

a comparar con el valor exacto con 15 decimales $\operatorname{sen}(1/2) = 0{,}479425538604203$.

Nota. Obsérvese, sin embargo, que para calcular $\log 2$ con la misma precisión que antes ¡necesitaríamos utilizar un polinomio de Taylor de orden 10^{12}!

Ejercicio. Calcular el polinomio de Taylor de orden m de arctan en 0, y estimar el error cometido reemplazando $\arctan(x)$ por $P_{m,0,\arctan}(x)$.

Solución. En primer lugar, nótese que para todo $x \in \mathbf{R}$ podemos escribir

$$\arctan x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}.$$

La fórmula para la suma de una serie geométrica de razón $r = (-t^2)$

$$\sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}, \qquad r \neq 1,$$

proporciona la identidad

$$\frac{1}{1+t^2} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{2k} + (-1)^{n+1} \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}.$$

Integrando esta igualdad entre cero y x (las funciones del miembro derecho son claramente continuas en todo $\mathbf{R}$) se obtiene

$$\arctan x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + Q_{2n+1}(x),$$

siendo

$$Q_{2n+1}(x) = (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\, dt.$$

Por el Corolario 6.2, para probar que el polinomio de Taylor de orden $2n+1$ de arctan en 0 es

$$P_{2n+1,0,\arctan}(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1},$$

basta probar que

$$\lim_{x\to 0} \frac{Q_{2n+1}(x)}{x^{2n+1}} = 0.$$

Pero esto es inmediato, ya que

$$\left| \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\, dt \right| \leq \left| \int_0^x t^{2n+2}\, dt \right| = \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3}.$$

En particular, de esto se sigue que

$$R_{2n+1,0,\arctan}(x) = (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\, dt$$

y que

$$|R_{2n+1,0,\arctan}(x)| \leq \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3}. \tag{6.3}$$

Nótese que, al cumplirse también

$$\lim_{x\to 0} \frac{Q_{2n+1}(x)}{x^{2n+2}} = 0,$$

se verifica

$$P_{2n+2,0,\arctan}(x) = P_{2n+1,0,\arctan}(x),$$

y por tanto

$$\arctan^{(2k)}(0) = 0, \qquad \forall k \in \mathbf{N} \cup \{0\},$$

lo cuál era de esperar al ser arctan una función impar. $\square$

Ejercicio. Si $f(x) = \log(1+x)$, utilizando la identidad

$$\log(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t}$$

y la misma técnica del ejercicio anterior, pruébese que

$$R_{n,0,f}(x) = (-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t}\, dt, \qquad x > -1,$$

y dedúzcase (6.2).

Capítulo 7

Sucesiones y series

7.1. Sucesiones numéricas

Una **sucesión** de números reales es una función $a : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tal que $\operatorname{dom} a = \mathbf{N}$ (ó, a veces, $\operatorname{dom} a = \mathbf{N} \cup \{0\}$). Tradicionalmente, $a(n)$ se denota por a_n, y la sucesión se indica por $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Si $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de números reales, la definición de $\lim_{n\to\infty} a_n$ es un caso particular de la de $\lim_{x\to\infty} f(x)$. Sin embargo, por su importancia merece la pena recordarla explícitamente:

Definición 7.1. Si $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de números reales y $l \in \mathbf{R}$, se dice que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l$$

si para todo $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbf{N}$ tal que

$$n \geq N \Longrightarrow |a_n - l| < \epsilon.$$

Cuando existe (i.e., es un número real) $\lim_{n\to\infty} a_n$, diremos que la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es **convergente**, y **divergente** en caso contrario. Las propiedades del límite de una sucesión se deducen como caso particular de las del límite cuando x tiende a infinito de una función $f(x)$:

Proposición 7.2. *Sean $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ dos sucesiones de números reales.*

I) *Si $\lim_{n\to\infty} a_n$ existe, entonces es único.*

II) *Si existen $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ y $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, entonces las sucesiones $\{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{a_n b_n\}_{n=1}^{\infty}$ son convergentes, y se tiene*

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b, \qquad \lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = ab.$$

III) *Si, además, $b \neq 0$, entonces existe $m \in \mathbf{N}$ tal que $b_n \neq 0$ para todo $n \geq m$, y se tiene*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}.$$

En particular, de la proposición anterior se deduce que si $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ entonces para todo $\lambda \in \mathbf{R}$ se tiene

$$\lim_{n\to\infty} (\lambda a_n) = \lambda a,$$

y si además $\lim_{n\to\infty} b_n = b \neq 0$ entonces la sucesión a_n/b_n está definida para $n \in \mathbf{N}$ suficientemente grande, y se tiene

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}.$$

Ejemplo 7.3.

$$\lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0, & |x| < 1 \\ 1, & x = 1 \\ \infty, & x > 1. \end{cases}$$

Si $x \leq -1$ entonces $\lim_{n\to\infty} x^n$ diverge y no es ni siquiera $\pm\infty$, ya que en este caso x^n tiene signo alternado cuando $n \to \infty$. Todo esto se deduce fácilmente utilizando las fórmulas $x^n = e^{n\log x}$ si $x > 0$ y $x^n = (-1)^n |x|^n$ si $x < 0$.

Ejemplo 7.4. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{2^n + (-1)^n}{2^{n+1} + (-1)^{n+1}} = \dfrac{1}{2}.$

En primer lugar, nótese que el denominador no se anula para ningún $n \in \mathbf{N}$ (es, de hecho, mayor ó igual que 5). Basta entonces tener en cuenta que

$$\frac{2^n + (-1)^n}{2^{n+1} + (-1)^{n+1}} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}}{1 + \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1/2}{1} = \frac{1}{2}.$$

Ejemplo 7.5. Si x es un número real, por lo visto en el capítulo anterior se tiene

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0.$$

Ejemplo 7.6. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n^n} = 0.$

En efecto,

$$\frac{n!}{n^n} = \frac{1}{n}\,\frac{2}{n} \cdots \frac{n-1}{n}\,\frac{n}{n} \leq \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Ejemplo 7.7. $\dfrac{2^{n^2}}{n!}$ diverge a infinito.

En efecto,

$$\frac{2^{n^2}}{n!} = \frac{(2^n)^n}{n!} \geq 2^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty,$$

ya que $2^n > n$ para todo $n \in \mathbf{N}$ (fórmula del binomio de Newton).

Ejemplo 7.8. Supongamos que existe una función $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definida en $[1, \infty)$ tal que $a_n = f(n)$ para todo $n \in \mathbf{N}$. En tal caso, *si* existe $\lim_{x\to\infty} f(x)$ entonces también existe $\lim_{n\to\infty} a_n$, y se tiene

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Por ejemplo, para la sucesión $a_n = \sqrt[n]{n}$ se puede tomar $f(x) = x^{1/x}$. Como (aplicando la regla de L'Hospital)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0,$$

se tiene $\lim_{x\to\infty} x^{1/x} = 1$, y por tanto

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Nótese, sin embargo, que de la no existencia de $\lim_{x\to\infty} f(x)$ *no* se puede deducir la no existencia de $\lim_{n\to\infty} a_n$. Por ejemplo, si $f(x) = \operatorname{sen}(\pi x)$ entonces no existe $\lim_{x\to\infty} f(x)$, mientras que

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{sen}(\pi n) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0.$$

El siguiente resultado caracteriza de forma sencilla la existencia del límite de una función en un punto mediante sucesiones que tienden a dicho punto:

Proposición 7.9. *Sea a un punto de acumulación del dominio de una función $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, y sea $l \in \mathbf{R}$. Entonces $\lim_{x\to a} f(x) = l$ si y sólo si para toda sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ que cumple*

i) $a_n \in \operatorname{dom} f$ *para todo* $n \in \mathbf{N}$

ii) $a_n \neq a$ *para todo* $n \in \mathbf{N}$

iii) $\lim_{n\to\infty} a_n = a$

la sucesión $\{f(a_n)\}_{n=1}^{\infty}$ cumple $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = l$.

7.1.1. Teorema de Bolzano–Weierstrass

Un tipo muy importante de sucesiones de números reales son las sucesiones monótonas. Por definición (que en realidad es un caso particular de la definición análoga para funciones de $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$), una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es **monótona creciente** (resp. **no decreciente**) si $a_m > a_n$ (resp. $a_m \geq a_n$) para todo $m > n$ ($m, n \in \mathbf{N}$). De forma análoga (invirtiendo el sentido de las desigualdades anteriores) se define una sucesión monótona decreciente ó no creciente. Como en el caso de funciones, se dice que una sucesión es **estrictamente monótona** si es monótona creciente ó decreciente. La siguiente propiedad fundamental de las sucesiones monótonas se deduce directamente del axioma del supremo:

Proposición 7.10. *Una sucesión monótona no decreciente (resp. no creciente) es convergente si y sólo si está acotada superiormente (resp. inferiormente).*

Demostración. En primer lugar, podemos restringirnos a sucesiones no decrecientes (el resultado para una sucesión no creciente $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ se obtiene considerando $\{-a_n\}_{n=1}^{\infty}$). En segundo lugar, toda sucesión convergente está acotada, tanto superior como inferiormente (la demostración es casi idéntica a la del resultado análogo para funciones arbitrarias). Por tanto, basta probar que si $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es no decreciente y está acotada superiormente entonces es convergente.

Si $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ está acotada superiormente, el conjunto no vacío

$$A = \{a_n : n \in \mathbf{N}\}$$

está por definición acotado superiormente, y por tanto (axioma del supremo) existe $a = \sup A$. Veamos entonces que $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. En efecto, por definición de supremo para todo $\epsilon > 0$ el conjunto $A \cap (a - \epsilon, a]$ es no vacío. Por tanto, existe $N \in \mathbf{N}$ tal que $a - \epsilon < a_N \leq a$. Por ser la sucesión no decreciente, y ser $a = \sup A$, se cumplirá

$$n \geq N \Longrightarrow a - \epsilon < a_N \leq a_n \leq a,$$

y, en particular,

$$n \geq N \Longrightarrow |a - a_n| < \epsilon.$$

Esto implica nuestra afirmación. *Q.E.D.*

Nota. Es muy fácil probar que una sucesión monótona no decreciente (resp. no creciente) no acotada superiormente (resp. inferiormente) diverge a infinito (resp. menos infinito).

Ejemplo 7.11. Probaremos a continuación que

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e,$$

con $2 < e \leq 3$.

Veamos, en primer lugar, que si $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ entonces la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es monótona creciente. En efecto, utilizando la fórmula del binomio de Newton para $n \geq 2$ obtenemos

$$\begin{aligned}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= 2 + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \\ &= 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) < a_{n+1},\end{aligned}$$

ya que

$$1 - \frac{i}{n} < 1 - \frac{i}{n+1}, \qquad i = 1, \ldots, n-1.$$

Esto también demuestra que $a_n > 2$ para todo entero $n \geq 2$. Por otra parte, al ser $1/k! \leq 1/2^{k-1}$ para todo $k \in \mathbf{N}$ se verifica

$$a_n \leq 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 3 - \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Esto prueba que la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ está acotada superiormente (por 3), por lo que (al ser monótona creciente) es convergente. Además, al ser $2 < a_n < 3$ para todo entero $n \geq 2$ y ser $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ creciente se tiene

$$2 < \lim_{n\to\infty} a_n \equiv e \leq 3.$$

Una **subsucesión** de una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ tal que $b_k = a_{n_k}$ con $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < n_{k+1} < \ldots$.

Lema 7.12. *Toda sucesión contiene una subsucesión que es ó bien no creciente ó bien no decreciente.*

Demostración. Diremos que $m \in \mathbf{N}$ es un *punto cumbre* de una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ si $a_m > a_n$ para todo $n > m$. Si $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ contiene infinitos puntos cumbre $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < n_{k+1} < \ldots$, entonces la subsucesión $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ es monótona decreciente. Supongamos, por el contrario, que el número de puntos cumbre de la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es finito (posiblemente igual a cero). En tal caso, sea n_1 un número natural mayor que todos los puntos cumbre de la sucesión. Como n_1 *no* es un punto cumbre, existirá $n_2 \in \mathbf{N}$ tal que $n_2 > n_1$ y $a_{n_2} \geq a_{n_1}$. Como $n_2 > n_1$ tampoco es un punto cumbre, existirá $n_3 \in \mathbf{N}$ tal que $n_3 > n_2$ y $a_{n_3} \geq a_{n_2}$. Procediendo de esta forma, es claro que obtenemos una subsucesion no decreciente $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$. *Q.E.D.*

El corolario de este lema, que se conoce como Teorema de Bolzano–Weierstrass, es de gran importancia teórica:

Teorema de Bolzano–Weierstrass. *Toda sucesión acotada tiene una subsucesión convergente.*

Demostración. Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión acotada. Por el lema anterior, esta sucesión admite una subsucesión $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ no creciente ó no decreciente. Como esta subsucesión es acotada tanto superior como inferiormente (al serlo la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$), de la Proposición 7.10 se sigue que $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ es convergente. *Q.E.D.*

7.1.2. El criterio de Cauchy

Hasta este punto, el único resultado que permite averiguar si una sucesión es convergente sin necesidad de tener una idea previa acerca del valor de su límite es la Proposición 7.10, que se aplica sólamente a un tipo muy particular de sucesiones (las acotadas). El criterio de Cauchy, que veremos a continuación, caracteriza de forma relativamente sencilla a las sucesiones convergentes sin necesidad de conocer cuál es su límite.

Definición 7.13. Una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una **sucesión de Cauchy** si para todo $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbf{N}$ tal que

$$n, m \geq N \Longrightarrow |a_n - a_m| < \epsilon.$$

Toda sucesión convergente es claramente de Cauchy. En efecto, si $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ entonces para todo $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbf{N}$ tal que

$$n \geq N \Longrightarrow |a_n - a| < \frac{\epsilon}{2}.$$

De esto se deduce que

$$n, m \geq N \Longrightarrow |a_n - a_m| \leq |a_n - a| + |a_m - a| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

El axioma del supremo de los números reales (a través del teorema de Bolzano–Weierstrass) garantiza que, recíprocamente, toda sucesión de Cauchy es convergente:

Teorema 7.14. *Una sucesión de números reales es convergente si y sólo si es una sucesión de Cauchy.*

Demostración. Basta probar que una sucesión de Cauchy es convergente. Veamos, en primer lugar, que si $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy entonces $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ está acotada. En efecto, existe $N \in \mathbf{N}$ tal que (por ejemplo)

$$m, n \geq N \Rightarrow |a_m - a_n| < 1.$$

En particular,

$$n \geq N \Longrightarrow |a_n| \leq |a_n - a_N| + |a_N| < 1 + |a_N|.$$

Entonces $\{a_n : n \in \mathbf{N}\}$ está acotado por $\max(1 + |a_N|, |a_1|, \ldots, |a_{N-1}|)$.

Por el teorema de Bolzano–Weierstrass, toda sucesión de Cauchy $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ posee una subsucesión convergente $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$. Veamos, para finalizar la demostración, que esto implica que $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente. En efecto, para todo $\epsilon > 0$ existe $M \in \mathbf{N}$ tal que

$$m, n \geq M \Longrightarrow |a_m - a_n| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Por otra parte, si $a = \lim_{k\to\infty} a_{n_k}$ existe $K \in \mathbf{N}$ tal que

$$k \geq K \Longrightarrow |a_{n_k} - a| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Como (por definición de subsucesión) la sucesión de números naturales $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ es monótona creciente, existe $m \geq K$ tal que $n_m \geq M$. Si tomamos $N = n_m (\geq M)$ entonces se cumple

$$n \geq N = n_m \Longrightarrow |a_n - a| \leq |a_n - a_{n_m}| + |a_{n_m} - a| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Q.E.D.

7.2. Series numéricas

Por definición, la **serie** $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es igual a la sucesión $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ definida por

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

El número s_n se denomina la n-ésima **suma parcial** de la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Diremos que dicha serie es **convergente** si y sólo si la sucesión de sumas parciales $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente. Si $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es convergente y $s = \lim_{n\to\infty} s_n$, diremos que s es la **suma** de la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, y escribiremos

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s,$$

es decir

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

De las propiedades elementales de las sucesiones se deducen propiedades análogas para las series. En primer lugar, *si una serie es convergente su suma es única.* En segundo lugar, si $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s_1$ y $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = s_2$ son dos series convergentes y $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$, entonces la serie $\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda\, a_k + \mu\, b_k)$ es convergente, y se tiene

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda\, a_k + \mu\, b_k) = \lambda\, s_1 + \mu\, s_2.$$

El producto de dos series $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ y $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ es, sin embargo, una operación mucho más delicada, ya que, en principio, dicho producto es una *serie doble* $\sum_{n,m=1}^{\infty} a_n b_m$ que puede ser escrita como serie ordinaria de infinitas formas distintas y en general no equivalentes. (Véase Spivak, p. 663.)

El criterio de Cauchy para sucesiones proporciona el siguiente **criterio de Cauchy para series:**

Proposición 7.15. *La serie* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *es convergente si y sólo si para todo* $\epsilon > 0$ *existe* $N \in \mathbf{N}$ *tal que*

$$m > n \geq N \Longrightarrow \left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right| < \epsilon.$$

Tomando $m = n + 1$ en el criterio de Cauchy obtenemos la siguiente condición *necesaria* para que una serie sea convergente:

Corolario 7.16. *Si* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *es convergente, entonces* $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$.

Ejemplo 7.17. Consideremos la **serie geométrica** $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$, siendo la **razón** x un número real arbitrario. Por el corolario anterior, esta serie es divergente si $|x| \geq 1$. Recíprocamente, veamos a continuación que si $|x| < 1$ la serie es convergente. En efecto, si $x \neq 1$

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

Como $|x| < 1$, $\left|x^{n+1}\right| = |x|^{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Por tanto, la serie $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ es convergente en este caso, y su suma es

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}, \qquad |x| < 1.$$

Ejemplo 7.18. Veamos que la **serie armónica** $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$ es divergente (aunque su término general tiende a cero). En efecto, basta tener en cuenta que si $n > 1$

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} > \frac{n}{n+n} = \frac{1}{2}.$$

Al no cumplirse la condición de Cauchy para $\epsilon = 1/2$ (y $m = 2n$), la serie es divergente.

7.2.1. Criterios de convergencia

Un tipo muy importante de series son las series de números no negativos, es decir las series $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ tales que $a_k \geq 0$ para todo $k \in \mathbf{N}$. En tal caso, la sucesión de sumas parciales es monótona no decreciente, y por tanto *una serie de números no negativos es convergente si y sólo si la sucesión de sus sumas parciales está acotada* (en caso contrario, la serie diverge a infinito). Evidentemente, consideraciones análogas pueden hacerse para series de números no positivos.

Una ventaja de las series de término general no negativo (ó, en algunos casos, positivo) es que para este tipo de series se dispone de criterios sencillos para establecer su convergencia. Empecemos por el siguiente criterio elemental, consecuencia directa de la Proposición 7.10 aplicada a las sumas parciales de la serie:

Teorema (criterio de comparación). *Si* $0 \leq a_n \leq b_n$ *para todo número natural* $n \geq M$ *y* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *es convergente, entonces* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *es convergente.*

Demostración. Al ser $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ convergente, para todo $n \geq M$ la suma parcial $\sum_{k=1}^{n} a_k$ está acotada por $\sum_{k=1}^{M-1}(a_k - b_k) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k$. *Q.E.D.*

Corolario 7.19. *Si* $b_n \leq a_n \leq c_n$ *para todo número natural* $n \geq M$*, y las series* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *y* $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ *son convergentes, entonces* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *es convergente.*

Demostración. En efecto, si $n \geq M$ se tiene

$$0 \leq a_n - b_n \leq c_n - b_n .$$

Por el criterio de comparación, $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k - b_k)$ es convergente, de donde se deduce la tesis al ser $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ convergente. *Q.E.D.*

Si $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es una serie arbitraria, $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ es una serie de términos no negativos. Se dice que $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es **condicionalmente convergente** si $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge pero $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ diverge, y **absolutamente convergente** si $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ es convergente. Como indica la notación, no es difícil ver que una serie absolutamente convergente es automáticamente convergente:

Proposición 7.20. *Si* $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ *es convergente entonces* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *es también convergente.*

Demostración. Esto se sigue inmediatamente del criterio de comparación, ya que para todo $n \in \mathbf{N}$ se tiene

$$-|a_n| \leq a_n \leq |a_n| .$$

Q.E.D.

Hay muchas series condicionalmente convergentes. Por ejemplo, veremos más adelante que la serie $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}/k$ es convergente, mientras que $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$ es divergente (es la serie armónica). En general, las series absolutamente convergentes tienen mejores propiedades que las condicionalmente convergentes; por ejemplo, el producto de dos series absolutamente convergentes $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ y $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ se puede escribir de infinitas formas como una serie absolutamente convergente al producto $\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k\right)$. Una serie absolutamente convergente tiene también la propiedad de que su carácter convergente ó divergente y el valor de su suma no cambian si se reordenan los términos de dicha serie, cosa que no ocurre en general con las series condicionalmente convergentes (véase Spivak, pp. 658–663). Además, establecer la convergencia de una serie condicionalmente convergente suele ser difícil, ya que no pueden usarse los criterios elementales de convergencia válidos para series de números no negativos que veremos a continuación.

Ejemplo 7.21. Cualquiera que sea el número real θ, la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(k\theta)}{k^2}$$

es absolutamente convergente. En efecto, para todo $k \in \mathbf{N}$ se tiene

$$\frac{|\operatorname{sen}(k\theta)|}{k^2} \leq \frac{1}{k^2},$$

y la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ es convergentes (lo probaremos en breve, utilizando el criterio de la integral).

Un corolario sencillo pero útil del criterio de comparación es el siguiente:

Proposición 7.22. *Sea $b_n > 0$ para $n \geq M$, y supongamos que existe $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n \equiv c$ (donde admitimos que $c = \pm\infty$). Se tiene:*

i) *Si $c \in \mathbf{R}$ y $c \neq 0$, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es convergente si y sólo si $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ lo es.*

ii) *Si $c = 0$ y $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ es convergente, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es convergente.*

iii) *Si $c = \pm\infty$ y $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ es divergente, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es divergente.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad, podemos tomar $c > 0$ ó $c = \infty$ (si $c < 0$ ó $c = -\infty$, bastaría aplicar el razonamiento que sigue a la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-a_n)$).
i) Al ser $c > 0$ existe $N \in \mathbf{N}$, que podemos tomar $\geq M$ sin pérdida de generalidad, tal que

$$n \geq N \Longrightarrow \frac{c}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3c}{2},$$

de donde se sigue (multiplicando por $b_n > 0$)

$$n \geq N \Longrightarrow 0 < \frac{c}{2} \cdot b_n < a_n < \frac{3c}{2} \cdot b_n.$$

Si $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ es convergente, la última desigualdad y el criterio de comparación implican que $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es convergente. Por último, si $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ es divergente entonces de la segunda desigualdad y el criterio de comparación se sigue que $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es también divergente.
ii) Si $c = 0$, existe $N \geq M$ tal que

$$n \geq N \Longrightarrow -1 < \frac{a_n}{b_n} < 1.$$

Multiplicando por $b_n > 0$ y aplicando el Corolario 7.19 se deduce que $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es convergente.
iii) Si $c = \infty$, existe $N \geq M$ tal que

$$n \geq N \Longrightarrow \frac{a_n}{b_n} > 1.$$

Multiplicando por $b_n > 0$ se obtiene, por el criterio de comparación, que $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es divergente. *Q.E.D.*

El criterio anterior permite deducir el siguiente resultado, que es sumamente útil a la hora de estudiar la convergencia de una serie de números positivos:

Teorema (criterio del cociente). *Sea* $a_n \neq 0$ *para todo número natural* $n \geq M$*, y supóngase que existe el límite* $\lim_{n\to\infty} |a_{n+1}| / |a_n| = r$ *(donde admitimos que* $r = \infty$*). Entonces* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *es absolutamente convergente si* $r < 1$*, y divergente si* $r > 1$ *ó* $r = \infty$*.*

(Si $r = 1$, el criterio del cociente no decide: hay series tanto convergentes como divergentes de términos positivos con $r = 1$.)

Demostración. Supongamos, en primer lugar, que $r < 1$. En tal caso, para todo $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbf{N}$, que podemos tomar $\geq M$, tal que

$$n \geq N \Longrightarrow r_n \equiv \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < r + \epsilon.$$

Como $r < 1$, podemos tomar $\epsilon < 1 - r$, en cuyo caso $s = r + \epsilon$ está en $(0, 1)$. Además, para $n \geq N$ se tiene

$$0 < |a_{n+1}| = r_n \, r_{n-1} \, \ldots \, r_N \, |a_N| < s^{n-N+1} \, |a_N| = \frac{|a_N|}{s^N} s^{n+1}.$$

Como $s < 1$, la serie geométrica $\sum_{k=0}^{\infty} s^k$ es convergente; por el criterio de comparación (nótese que $|a_N| / s^N$ es una constante), también lo será $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Supongamos, por último, que fuera $r > 1$ ó $r = \infty$. Si $r = \infty$ y tomamos $s > 1$ arbitrario, existe un número natural $N \geq M$ tal que

$$n \geq N \Longrightarrow s < r_n. \tag{7.1}$$

Si $r > 1$ es finito, tomando $0 < \epsilon < r - 1$ y llamando $s = r - \epsilon > 1$ deducimos de nuevo que existe un número natural $N \geq M$ tal que se cumple (7.1). Por tanto, para todo $n \geq N$ se tiene ahora

$$|a_{n+1}| > s^{n-N+1} \, |a_N| > |a_N| > 0,$$

lo cual implica que el término general de la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ no tiende a cero cuando $k \to \infty$, de donde se deduce que $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es divergente. *Q.E.D.*

Ejemplo 7.23. La serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

converge absolutamente para todo $x \in \mathbf{R}$. En efecto, si $x = 0$ el resultado es trivial, y si $x \neq 0$ basta observar que

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|x|^{n+1} / (n+1)!}{|x|^n / n!} = \frac{|x|}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Ejercicio. Estudiar la convergencia de la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{c^k\, k!}{k^k}$, siendo c un número real.

Solución. Si $c = 0$, la serie converge trivialmente (su sucesión de sumas parciales es constante). Si $c \neq 0$, aplicando el criterio del cociente se obtiene

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|c|^{n+1}\,(n+1)!/(n+1)^{n+1}}{|c|^n\, n!/n^n} = |c| \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{|c|}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{|c|}{e}.$$

Por tanto, la serie dada es absolutamente convergente para $|c| < e$, y divergente para $|c| > e$. Para $c = \pm e$, el criterio del cociente no decide. Sin embargo (véase Spivak, problema 21-13), al ser

$$\frac{e^n n!}{n^n} > e, \qquad \forall n \in \mathbf{N},\ n > 1,$$

el término general de las series $\sum_{k=1}^{\infty} (\pm e)^k\, k!/k^k$ no tiende a cero cuando $k \to \infty$, por lo que dichas series son divergentes. □

Citaremos sin demostración el siguiente criterio análogo al del cociente (aunque ligeramente más fuerte que éste; cf. Spivak, problema 21-18):

Teorema (criterio de la raíz). *Si* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = r$ *(donde admitimos que* $r = \infty$*), entonces* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *es absolutamente convergente si* $r < 1$*, y divergente si* $r > 1$ *ó* $r = \infty$*.*

Para muchas series importantes (como, por ejemplo, $\sum_{n=1}^{\infty} 1/(n^p)$), el criterio del cociente (y, en este y en otros muchos casos, también el de la raíz) no decide, porque $\lim_{n\to\infty} |a_{n+1}| / |a_n|$ es exactamente igual a 1. En algunos de estos ejemplos en que fallan los criterios del cociente y de la raíz se puede aplicar con éxito el siguiente criterio:

Teorema (criterio de la integral). *Sea* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *una función positiva y no creciente en* $[1, \infty)$*, y supongamos que* f *es integrable en* $[1, x]$ *para todo* $x \geq 1$*. Si* $a_k = f(k)$ *para todo* $k \in \mathbf{N}$*, entonces la serie* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *converge si y sólo si la integral impropia* $\int_1^{\infty} f$ *es convergente.*

Demostración. En primer lugar, nótese que al ser f positiva la integral impropia $\int_1^{\infty} f$ es convergente si y sólo si el conjunto $\left\{\int_1^x f : x \geq 1\right\}$ es acotado, o equivalentemente si y sólo si existe $\lim_{n\to\infty} \int_1^n f$. Si $P = \{1, 2, \dots, n\}$, al ser f no creciente se tiene

$$L(f, P) = \sum_{k=2}^{n} f(k) = \sum_{k=2}^{n} a_k \leq \int_1^n f \leq U(f, P) = \sum_{k=1}^{n-1} f(k) = \sum_{k=1}^{n-1} a_k.$$

Como $a_k = f(k) > 0$ para todo $k \in \mathbf{N}$, de estas desigualdades se deduce fácilmente la tesis aplicando la Proposición 7.10. *Q.E.D.*

Ejemplo 7.24. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$ converge si y sólo si $p > 1$. En efecto, si $p \leq 0$ la serie es divergente porque su término general no tiende a cero, y si $p > 0$ basta aplicar el criterio de la integral (con $f(x) = x^{-p}$).

Prácticamente todos los criterios de convergencia de series vistos anteriormente son aplicables sólo a series de números no negativos. El criterio que veremos a continuación, sin embargo, es uno de los más importantes y sencillos que son válidos para series cuyo término general no tiene signo constante:

Teorema (criterio de Leibniz)**.** *Si $a_n \geq a_{n+1} > 0$ para todo $n \in \mathbf{N}$, y $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ es convergente.*

Demostración. Spivak, p. 656. *Q.E.D.*

Ejercicio. Probar que si $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ cumple las condiciones del criterio de Leibniz entonces para todo $m \in \mathbf{N}$ se tiene

$$0 \leq (-1)^m \left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n - \sum_{n=1}^{m}(-1)^{n+1}a_n\right) \leq a_{m+1},$$

siendo estas desigualdades estrictas si $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es estrictamente decreciente. En tal caso, el error cometido truncando la serie tiene el mismo signo que el primer término despreciado ($(-1)^{m+2}a_{m+1}$), y valor absoluto menor que el valor absoluto de dicho término.

Ejemplo 7.25. La serie alternada $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$ es condicionalmente convergente.

7.3. Sucesiones y series de funciones

Sea $\{f_n : n \in \mathbf{N}\}$ una colección de funciones definidas en un dominio común D. Diremos que la **sucesión de funciones** $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ **converge puntualmente** en $x \in D$ si la sucesión $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente. Sea $A \subset D$ el conjunto de todos los puntos x en que $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge puntualmente. El **límite puntual** de la sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es la función $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definida por

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x), \qquad \forall x \in A.$$

Diremos entonces que la sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ **converge puntualmente a** f **en** A, y escribiremos

$$f = \lim_{n\to\infty} f_n.$$

Obviamente (ya que las series son un caso particular de las sucesiones) definiciones análogas son válidas para una **serie de funciones.**

Ejemplo 7.26. Para todo $x \in \mathbf{R}$ la sucesión de funciones $\{P_{n,0,\exp}\}_{n=0}^{\infty}$ converge puntualmente a exp en $\mathbf{R}$. En efecto, hay que probar que para todo $x \in \mathbf{R}$ se tiene

$$\lim_{n\to\infty} P_{n,0,\exp}(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = e^x.$$

Y, efectivamente (véase (6.1c)), se verifica

$$|e^x - P_{n,0,\exp}(x)| = |R_{n,0,\exp}(x)| \leq \max(1, e^x)\, \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

En otras palabras, hemos probado que

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \qquad \forall x \in \mathbf{R}.$$

De forma análoga (utilizando las estimaciones (6.1) y (6.3)) se prueban las fórmulas

$$\begin{aligned}
\cos x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad \forall x \in \mathbf{R} \\
\operatorname{sen} x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \forall x \in \mathbf{R} \\
\log(1+x) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}, \quad -1 < x \leq 1 \\
\arctan x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad -1 \leq x \leq 1.
\end{aligned}$$

En particular, esto demuestra las siguientes igualdades interesantes:

$$\begin{aligned}
e &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \\
\log 2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \\
\pi &= 4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.
\end{aligned}$$

El problema fundamental que afecta al concepto de convergencia puntual de una sucesión (ó una serie) de funciones es que *el límite puntual de una sucesión de funciones* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *no hereda en general las buenas propiedades* (*por ejemplo, la continuidad ó la diferenciabilidad*) *que puedan tener las funciones* f_n. Esto es precisamente lo que ocurre en el siguiente ejemplo:

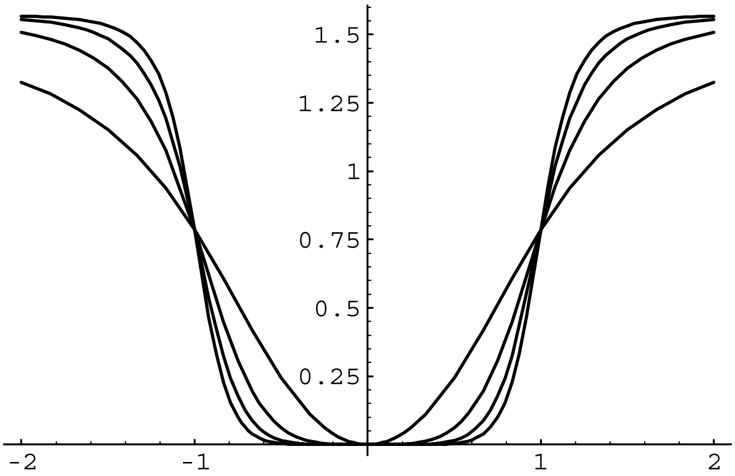

Figura 7.1: Gráfica de $\arctan(x^{2n})$ para $n = 1, \ldots, 4$

Ejemplo 7.27. Consideremos la sucesión de funciones $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ en que f_n está definida por

$$f_n(x) = \arctan(x^{2n}), \qquad \forall n \in \mathbf{N}.$$

Las funciones f_n están definidas y son diferenciables (de hecho, infinitas veces) en toda la recta real (fig. 7.1). El límite puntual f de la sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ existe para todo $x \in \mathbf{R}$, y está dado por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & |x| < 1 \\ \frac{\pi}{4}, & x = \pm 1 \\ \frac{\pi}{2}, & |x| > 1. \end{cases}$$

A pesar de que las funciones f_n son diferenciables en todo $\mathbf{R}$, el límite puntual $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ no es ni siquiera continua en los puntos $x = \pm 1$.

Pueden construirse también ejemplos (véase Spivak, p. 683) de sucesiones de funciones $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ integrables en un intervalo $[a, b]$, que convergen puntualmente a una función f integrable en $[a, b]$, pero tales que

$$\int_a^b f = \int_a^b \left(\lim_{n\to\infty} f_n\right) \neq \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n.$$

7.3.1. Convergencia uniforme

En vista de ejemplos como los anteriores, es claro que es necesario definir un concepto de convergencia de una sucesión de funciones más fuerte que la convergencia puntual, de forma que el límite de una sucesión convergente de funciones tenga propiedades análogas a las de las funciones de la sucesión.

Para llegar a este nuevo concepto de convergencia, examinemos en detalle lo que significa que la sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converja puntualmente a f en A. Esto quiere decir que, dado $\epsilon > 0$, *para todo* $x \in A$ *existe* $N \in \mathbf{N}$, *que en general dependerá de* ϵ y de x, *de forma que si* $n \geq N$ *entonces* $|f(x) - f_n(x)| < \epsilon$. El problema de los ejemplos anteriores es que, fijado $\epsilon > 0$, el N de la definición anterior puede depender de x. Si pedimos que esto no ocurra llegamos al importante concepto de convergencia uniforme:

Definición 7.28. Se dice que la sucesión de funciones $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ **converge uniformemente** a la función f en el conjunto $A \subset \mathbf{R}$ si para todo $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbf{N}$ tal que

$$n \geq N \Longrightarrow |f(x) - f_n(x)| < \epsilon, \textit{ para todo } x \in A.$$

La interpretación gráfica de la convergencia uniforme es muy clara: se pide que para todo $\epsilon > 0$ *toda la gráfica* de la función f_n en A esté comprendida en una franja abierta de anchura 2ϵ centrada en la gráfica de f en A, para n suficientemente grande (fig.7.2).

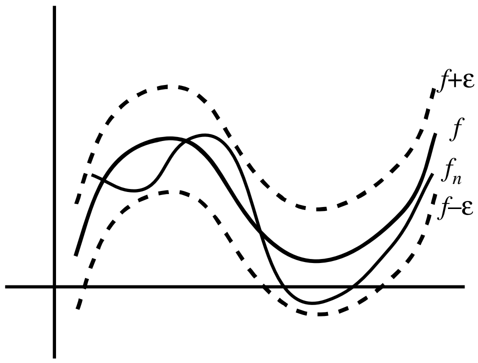

Figura 7.2: Convergencia uniforme de una sucesión de funciones

Es evidente de la definición que si $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente a f en A entonces $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge puntualmente a f en dicho conjunto, pero el recíproco no es cierto en general (por ejemplo, puede verse que falla en el Ejemplo 7.27).

Los siguientes teoremas afirman que, en líneas generales, el límite de una sucesión de funciones uniformemente convergente goza de propiedades análogas a las de las funciones de la sucesión:

Teorema 7.29. *Sea* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión de funciones uniformemente convergente a* f *en* $[a, b]$.

I) *Si* f_n *es integrable en* $[a, b]$ *para todo* $n \in \mathbf{N}$, *entonces* f *es integrable en* $[a, b]$ *y se cumple*

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n$$

II) *Si f_n es continua en $c \in [a,b]$ para todo $n \in \mathbf{N}$, entonces f es continua en c*

Demostración. Obsérvese, antes que nada, que si se cumplen las hipótesis de este teorema entonces se tiene

$$\int_a^b \left(\lim_{n\to\infty} f_n\right) = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n$$

y

$$\lim_{x\to c} \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\lim_{x\to c} f_n(x)\right).$$

Demostremos, por ejemplo, el segundo apartado (la demostración del primero, bajo condiciones algo más restrictivas, puede verse en Spivak, p. 687[1]). Sea $\epsilon > 0$ arbitrario. Por la convergencia uniforme de f_n a f, existe $N \in \mathbf{N}$ tal que

$$n \geq N \Longrightarrow |f(t) - f_n(t)| < \epsilon/3, \qquad \forall t \in [a,b].$$

Además, al ser f_N continua en c existe $\delta > 0$ tal que

$$|x - c| < \delta \Longrightarrow |f_N(x) - f_N(c)| < \epsilon/3$$

(suponiendo, por sencillez, que $c \in (a,b)$). Si $|x - c| < \delta$ se cumple entonces:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(c)| &\leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(c)| + |f_N(c) - f(c)| \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon. \end{aligned}$$

Q.E.D.

Si $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente a f en (a,b), y las funciones f_n son derivables en (a,b) para todo $n \in \mathbf{N}$, no siempre es cierto que el límite f sea derivable en (a,b), o que si f es derivable f' coincida con $\lim_{n\to\infty} f_n'$ (para convencerse de esto último tómese, por ejemplo, $f_n(x) = \operatorname{sen}(nx)/\sqrt{n}$). Sin embargo, se verifica el siguiente resultado más débil:

[1]Si admitimos sin demostración que f es integrable en $[a,b]$, entonces dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbf{N}$ tal que

$$n \geq N \Longrightarrow |f(x) - f_n(x)| < \frac{\epsilon}{2(b-a)}, \qquad \forall x \in [a,b].$$

Por tanto,

$$\left|\int_a^b f - \int_a^b f_n\right| = \left|\int_a^b (f - f_n)\right| \leq \int_a^b |f - f_n| \leq \frac{\epsilon}{2(b-a)} \cdot (b-a) < \epsilon.$$

Teorema 7.30. *Supongamos que, para todo $n \in \mathbf{N}$, $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ es derivable en (a,b), siendo además f_n' integrable en $[a,b]$. Si $\{f_n'\}_{n=1}^{\infty}$ es uniformemente convergente a una función g en (a,b), y existe $c \in (a,b)$ tal que la sucesión $\{f_n(c)\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente, entonces:*

i) *$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es uniformemente convergente a una función f en (a,b)*

ii) *f es derivable en (a,b), y $f' = g$ en (a,b).*

En otras palabras, si se cumplen las condiciones del teorema anterior entonces

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n\right)' = \lim_{n\to\infty} f_n'.$$

Demostración. Vamos a suponer, para simplificar la demostración, que g es *continua* en (a,b) (por ejemplo, esto ocurrirá automáticamente si todas las funciones f_n' son continuas en (a,b)). En primer lugar, las hipótesis hechas sobre f_n' justifican la aplicación de la regla de Barrow, que conduce a la identidad

$$f_n(x) = f_n(c) + \int_c^x f_n', \quad \forall x \in (a,b)\,.$$

La convergencia *uniforme* de f_n' a g en (a,b) implica, por el Teorema 7.29, que para todo $x \in (a,b)$ la integral del miembro derecho converge a $\int_c^x g$. Al ser $f_n(c)$ convergente a $f(c)$ se sigue que f_n converge puntualmente en (a,b), siendo

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) \equiv f(x) = f(c) + \int_c^x g, \qquad \forall x \in [a,b]\,. \tag{7.2}$$

La convergencia es uniforme en (a,b), ya que

$$\begin{aligned} |f(x) - f_n(x)| &= \left| f(c) - f_n(c) - \int_c^x (f_n' - g) \right| \leq |f(c) - f_n(c)| + \left| \int_c^x \left| f_n' - g \right| \right| \\ &\leq |f(c) - f_n(c)| + (b-a) \sup_{x \in (a,b)} \left| f_n'(x) - g(x) \right| \,. \end{aligned}$$

Por último, si g es continua en (a,b) de (7.2) y el Teorema Fundamental del Cálculo se sigue que $f'(x) = g(x)$ para todo $x \in (a,b)$. *Q.E.D.*

7.3.2. Series de funciones

Una serie de funciones $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ es uniformemente convergente en un conjunto A si lo es la sucesión de sumas parciales $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$, siendo $s_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$. Al ser las series un caso particular de las sucesiones, los resultados sobre sucesiones de funciones uniformemente convergentes que acabamos de ver se aplican con modificaciones obvias a las series de funciones uniformemente convergentes.

Supongamos que $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ es una serie de funciones uniformemente convergente a una función f en un intervalo $[a, b]$. En primer lugar, si las funciones f_k son integrables en $[a, b]$ para todo $k \in \mathbf{N}$ lo mismo ocurre con la función f, y se cumple

$$\int_a^b f = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b f_k,$$

es decir

$$\int_a^b \sum_{k=1}^{\infty} f_k = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b f_k.$$

Si las funciones f_k son además continuas en $c \in [a, b]$ para todo $k \in \mathbf{N}$ entonces f es continua en c, y por tanto

$$\lim_{x \to c} \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{x \to c} f_k(x).$$

Finalmente, si f_n cumple las hipótesis del Teorema 7.30 para todo $n \in \mathbf{N}$, $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ converge en algún $c \in (a, b)$ y $\sum_{k=1}^{\infty} f'_k$ es uniformemente convergente en (a, b) entonces

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k \right)' = \sum_{k=1}^{\infty} f'_k \qquad \text{en } (a, b)\,.$$

En el caso de series de funciones hay un criterio muy sencillo que garantiza la convergencia uniforme:

Teorema (criterio M de Weierstrass)**.** *Sea $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ una serie de funciones definidas en un conjunto A, y supóngase que para todo $n \in \mathbf{N}$ existe $M_n \in \mathbf{R}$ tal que*

$$|f_n(x)| \leq M_n, \qquad \forall x \in A.$$

Si la serie $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ es convergente, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ converge absoluta y uniformemente en A.

Demostración. En primer lugar, por el criterio de comparación la serie $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ converge absolutamente para todo $x \in A$. En segundo lugar, si para $x \in A$ definimos $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ entonces para todo $n \in \mathbf{N}$ y para todo $x \in A$ se verifica

$$\begin{aligned} \left| f(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \right| &= \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k \equiv \left| \sum_{k=1}^{\infty} M_k - \sum_{k=1}^{n} M_k \right|, \qquad \forall x \in A. \end{aligned}$$

Como el miembro derecho puede hacerse más pequeño que cualquier $\epsilon > 0$ tomando n suficientemente grande (al ser $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ convergente), la serie dada converge uniformemente en A. *Q.E.D.*

7.4. Series de Taylor y series de potencias

Dada una función f infinitas veces diferenciable en un punto $c \in \mathbf{R}$, es natural considerar la **serie de Taylor** de f centrada en c, definida por

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k.$$

Escribiremos simbólicamente

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k \tag{7.3}$$

para denotar que el miembro derecho es la serie de Taylor centrada en c del miembro izquierdo. Nótese que la serie de Taylor no es más que una serie de *funciones* $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ en la que las funciones f_k son particularmente sencillas:

$$f_k(x) = \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k.$$

En general, una serie de funciones de la forma

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k\,(x-c)^k$$

se denominará **serie de potencias** centrada en c.

La pregunta fundamental que nos hacemos es la siguiente: ¿bajo qué condiciones (es decir, para qué funciones f y con qué restricciones sobre x) podemos reemplazar $\sim$ por $=$ en (7.3)? Antes de continuar, obsérvese que la serie de Taylor de f centrada en c puede ser convergente en algún punto x a un número *distinto* de $f(x)$. Por ejemplo, puede probarse que si f está definida por $f(0) = 0$ y $f(x) = e^{-1/x^2}$ para todo $x \neq 0$, entonces f es infinitamente diferenciable en $\mathbf{R}$ y se cumple

$$f^{(k)}(0) = 0, \qquad \forall k = 0, 1, \ldots.$$

Por tanto, para todo $x \neq 0$ la serie de Taylor de f centrada en 0 converge a $0 \neq f(x)$.

Definición 7.31. Sea f una función infinitamente diferenciable en un intervalo (a, b) (diremos en tal caso que f es **de clase infinito** en (a, b) y escribiremos $f \in C^{\infty}(a, b)$). Se dirá que f es **analítica** en $c \in (a, b)$ si la serie de Taylor de f centrada en c converge a $f(x)$ para todo x en un cierto intervalo abierto centrado en c.

Por ejemplo, por lo visto anteriormente las funciones $\cos x$, $\operatorname{sen} x$, $\log(1+x)$ y $\arctan x$ son analíticas en 0, mientras que la función del ejemplo anterior no lo es.

La convergencia de $\sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(c)(x-c)^k/k!$ a $f(x)$ significa que

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k = \lim_{n\to\infty} P_{n,c,f}(x),$$

o, equivalentemente,

$$\lim_{n\to\infty} R_{n,c,f}(x) = 0. \tag{7.4}$$

Por tanto, f será analítica en c si es de clase $C^{\infty}(c-r, c+r)$ para algún $r > 0$, y para todo $x \in (c-r, c+r)$ se cumple (7.4).

Proposición 7.32. *Sea $f \in C^{\infty}(a,b)$, y supongamos que existe $M > 0$ tal que para todo $k = 0, 1, \ldots$ se cumple*

$$\left| f^{(k)}(x) \right| \le M^k, \qquad \forall x \in (a,b).$$

Entonces f es analítica en c, para todo $c \in (a,b)$.

Demostración. Si $c \in (a,b)$, sea $r = \min(c-a, b-c)$, de forma que $(c-r, c+r) \subset (a,b)$. Si $x \in (c-r, c+r)$ entonces (teorema de Taylor) existe t en el intervalo (c,x) ó (x,c) (nótese que ambos intervalos están contenidos en (a,b)) tal que

$$R_{n,c,f}(x) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}$$

y por tanto

$$|R_{n,c,f}(x)| \le \frac{(M\,|x-c|)^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Q.E.D.

Al ser las series de Taylor un caso particular de las series de potencias, el estudio de las propiedades de las series de potencias tiene un interés indudable. En particular, dicho estudio nos permitirá probar que una serie de potencias convergente en un cierto intervalo abierto no vacío es siempre la serie de Taylor de una función (concretamente, de la función a la cual converge la serie).

Para simplificar (sin pérdida de generalidad), nos restringiremos a considerar series de potencias

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k\, x^k \tag{7.5}$$

centradas en 0. El resultado fundamental es el siguiente:

Teorema 7.33. *Supongamos que la serie de potencias* (7.5) *es convergente en* $x = c \neq 0$. *Entonces se cumple:*

I) *La serie* (7.5) *converge absolutamente para todo* $x \in (-|c|, |c|)$ *a una función* f.

II) *La convergencia de* (7.5) *a* f *es uniforme en todo intervalo* $[-b, b]$ *con* $0 < b < |c|$.

III) *Para todo* $x \in (-|c|, |c|)$ *la función* f *es derivable en* x, *y se verifica*

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k\, a_k\, x^{k-1},$$

siendo esta última serie absoluta y uniformemente convergente a f' *en todo intervalo* $[-b, b]$ *con* $0 < b < |c|$.

Demostración. En primer lugar, al ser la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k\, c^k$ convergente, su término general tiende a cero cuando $k \to \infty$, y por lo tanto está acotado: existe $M \in \mathbf{R}$ tal que

$$\left|a_k c^k\right| < M, \qquad \forall k \in \mathbf{N} \cup \{0\}\,.$$

Si $0 < b < |c|$ y $-b \leq x \leq b$ entonces

$$\left|a_k\, x^k\right| = \left|a_k\, c^k\right| \left|\frac{x}{c}\right|^k \leq M \left(\frac{b}{|c|}\right)^k, \qquad k = 0, 1, \dots .$$

Como $0 < b/|c| < 1$, la serie *numérica* (geométrica) $\sum_{k=0}^{\infty}(b/|c|)^k$ es convergente, y por tanto el segundo apartado se deduce del criterio M de Weierstrass. Al ser $b \in (0, |c|)$ arbitrario, esto prueba también el primer apartado.

Para probar el tercer apartado, nótese que si $x \in [-b, b]$ entonces

$$\left|k\, a_k\, x^{k-1}\right| = k\, \left|a_k\, c^k\right| \frac{|x|^{k-1}}{|c|^k} \leq k\, M\, \frac{b^{k-1}}{|c|^k} = \frac{M}{b} \cdot k \left(\frac{b}{|c|}\right)^k, \qquad \forall k \in \mathbf{N}.$$

Como (al ser de nuevo $0 < b/|c| < 1$) la serie numérica $\sum_{k=1}^{\infty} k\,(b/|c|)^k$ es convergente (criterio del cociente), por el criterio M de Weierstrass la serie $\sum_{k=1}^{\infty} k\, a_k\, x^{k-1}$ converge absoluta y uniformemente en $[-b, b]$, y por el Teorema 7.30 su suma es f'. Como $0 < b < |c|$ es arbitrario, esto prueba el último apartado. *Q.E.D.*

El teorema anterior tiene varias consecuencias importantes que veremos a continuación. En primer lugar, dada una serie de potencias $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ existe un número $R \geq 0$, llamado **radio de convergencia** de la serie, tal que la serie es (absolutamente) convergente para $|x| < R$ y divergente para $|x| > R$ (si la serie converge para todo $x \in \mathbf{R}$, por definición se toma $R = \infty$). En efecto, si la serie no converge en todo $\mathbf{R}$ (en cuyo caso $R = \infty$) por el teorema anterior $R = \sup\left\{|x| : \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k \text{ es convergente}\right\}$. Nótese que R puede ser cero, lo cual significa que la serie sólo converge para $x = 0$; por ejemplo, veremos a continuación que la serie $\sum_{k=0}^{\infty} k!\, x^k$ tiene radio de convergencia 0. Para calcular el radio de convergencia de una serie de potencias $\sum_{k=0}^{\infty} a_k\, x^k$, podemos utilizar el criterio del cociente ó el de la raíz aplicado a la serie de valores absolutos $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|\, |x|^k$. Por ejemplo, para aplicar el criterio del cociente hay que calcular

$$r = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|\, |x|^{n+1}}{|a_n|\, |x|^n} = |x| \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

(donde se supone que $a_n \neq 0$ para todo n suficientemente grande). Si existe

$$q = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|, \tag{7.6}$$

y es distinto de 0, la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k\, x^k$ converge absolutamente si $|x| < 1/q$, y diverge si $|x| > 1/q$. Si $q = 0$, $r = 0$ y la serie converge para todo $x \in \mathbf{R}$, mientras que si $q = \infty$ entonces $r = \infty$ para todo $x \neq 0$ y por tanto la serie diverge para todo $x \neq 0$. Luego si existe el límite (7.6) entonces el radio de convergencia de la serie es $1/q$ (tomando $1/q = \infty$ si $q = 0$, y $1/q = 0$ si $q = \infty$), es decir

$$R = \left(\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)^{-1} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|.$$

De forma análoga aplicando el criterio de la raíz se demuestra que si existe $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ entonces

$$R = \left(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\right)^{-1}.$$

Por ejemplo, para la serie $\sum_{k=0}^{\infty} k!\, x^k$ se tiene $a_k = k!$, y por tanto

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0\,.$$

Supongamos que el radio de convergencia de la serie de potencias $\sum_{k=0}^{\infty} a_k\, x^k$ es $R > 0$, y sea

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, x^k, \qquad |x| < R,$$

su suma. Por el Teorema 7.33 (aplicado a cualquier $c \in (0, R)$), f es derivable en $(-R, R)$ y

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k\, a_k\, x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\, a_{k+1}\, x^k, \qquad |x| < R,$$

siendo la serie del miembro derecho (absolutamente) convergente en $(-R, R)$. Aplicando el Teorema 7.33 a esta última serie deducimos que f' es derivable en $(-R, R)$ y

$$f'' = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)\, a_k\, x^{k-2} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1)\, a_{k+2}\, x^k, \qquad |x| < R,$$

siendo esta última serie absolutamente convergente. Repitiendo este razonamiento las veces que sean necesarias obtenemos que para todo $n \in \mathbf{N}$ la función f es n veces derivable en $(-R, R)$, y $f^{(n)}$ está dada por la serie de potencias

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (n+k)(n+k-1)\dots(k+1)\, a_{n+k}\, x^k \\ &= n! \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} a_{n+k}\, x^k, \qquad |x| < R, \quad n = 0, 1, \dots. \end{aligned}$$

donde la serie del miembro derecho es absolutamente convergente en $(-R, R)$. Por tanto, f es de clase $C^\infty(-R, R)$. Además, de la fórmula anterior se deduce que

$$f^{(n)}(0) = n!\, a_n.$$

Esto significa que *en el interior del intervalo de convergencia* $(-R, R)$ *la serie de potencias* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k\, x^k$ *es la serie de Taylor de su suma* f.