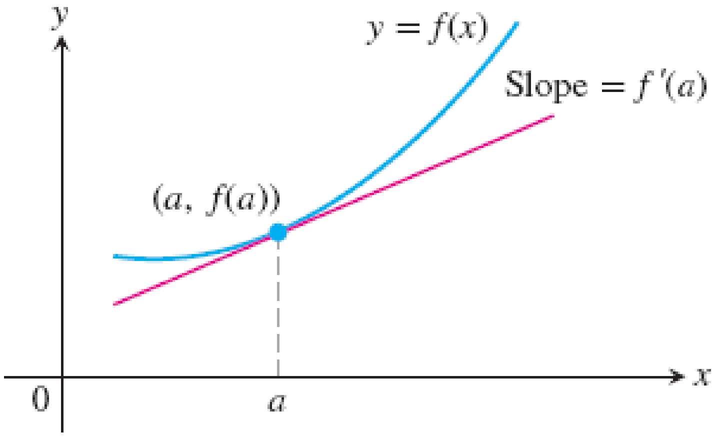
5. Aproximación de funciones: polinomios de Taylor y teorema de Taylor.

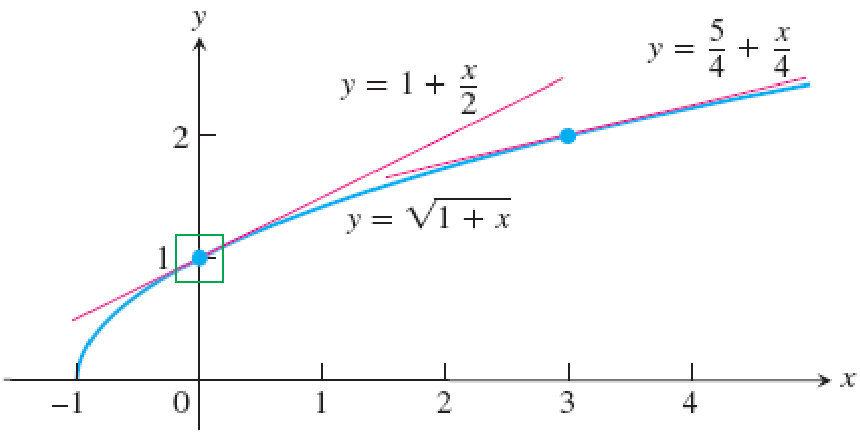
Algunas veces podemos aproximar funciones complicadas mediante otras funciones más simples (con las que es más simple trabajar) que dan la exactitud adecuada en ciertas aplicaciones. Comenzaremos estudiando el proceso de *linealización* que ofrece la derivada y continuaremos estudiando *polinomios de Taylor*.

Como sabemos, la tangente a $y = f(x)$ en un punto $x = a$, donde la función f es derivable, pasa por el punto $\left(a, f(a)\right)$ con pendiente $f'(a)$ y tiene por ecuación $y = f(a) + f'(a)(x-a)$.



Entonces, la recta tangente es la gráfica de la función lineal $L(x) := f(a) + f'(a)(x-a)$. Observa que, donde esta recta permanezca *cerca* de la gráfica de f, $L(x)$ ofrecerá una *buena* aproximación de $f(x)$. A la función $L(x)$ se le llama *linealización* de la función f en el punto a. La aproximación $f(x) \approx L(x)$ se llama *aproximación lineal* de f en el punto a. Observa que $L(a) = f(a)$ y que $L'(a) = f'(a)$.

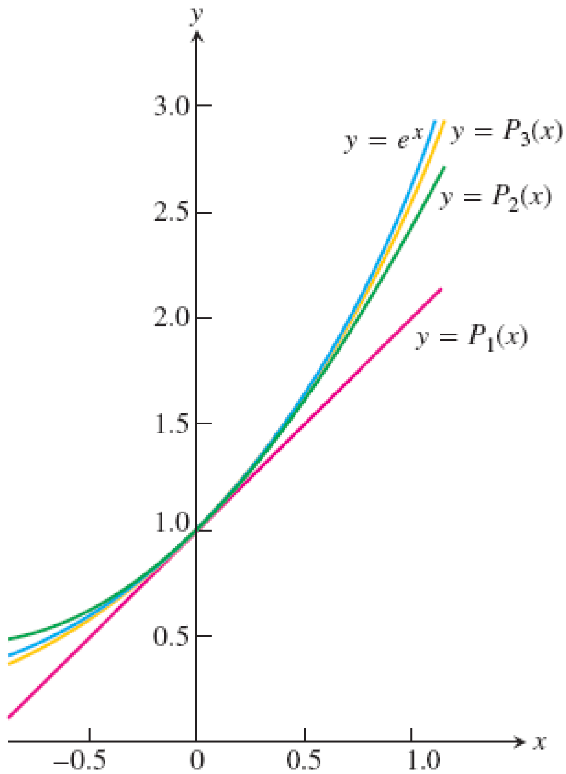
EJEMPLO. Un cálculo sencillo muestra que la aproximación lineal de la función $f(x) = \sqrt{x+1}$ en el punto $a = 0$ viene dada por $y = 1 + \frac{x}{2}$. De forma similar se puede obtener que la aproximación lineal de la función $f(x) = \sqrt{x+1}$ en el punto $a = 3$ viene dada por $y = \frac{5}{4} + \frac{x}{4}$.



Entonces $\sqrt{x+1} \approx 1+\frac{x}{2}$ si x está *cerca* de $a=0$. Por ejemplo, si usamos esta aproximación obtenemos que $\sqrt{1.2} \approx 1.10$. Observa que $\sqrt{1.2} = 1.095445$, con lo cual el error es menor que 10^{-2}. Sin embargo, si nos alejamos de $a=0$ esta aproximación pierde precisión y no es esperable que produzca buenos resultados, por ejemplo, cerca de $a=3$. Aquí debemos usar la otra linealización es decir, $\sqrt{x+1} \approx \frac{5}{4}+\frac{x}{4}$. Observa que si usamos la primera obtenemos $\sqrt{3.2} \approx 2.10$, mientras que con la segunda aproximación obtenemos $\sqrt{3.2} \approx \frac{5}{4}+\frac{2.2}{4} = 1.8$. Recuerda que $\sqrt{3.2} = 1.78885$.

Este proceso de aproximación se puede generalizar, siempre que la función f tenga suficientes derivadas, usando polinomios en lugar de la aproximación lineal $L(x) := f(a) + f'(a)(x-a)$.

EJEMPLO. Consideremos la función exponencial $f(x) = e^x$ y el punto $a=0$. Entonces la aproximación lineal en $a=0$ es, $L(x) = 1+x$, puesto que $f(0)=1$ y $f'(0)=1$. Por comodidad denotaremos, en adelante a la función $L(x)$ por $P_1(x)$, puesto que se trata de un polinomio de grado 1. Observa que $P_1(0)=1$ y $P_1'(0)=1$. Buscamos ahora un polinomio de grado dos $P_2(x)$, de forma que $P_2(0)=1$, $P_2'(0)=1$ y $P_2''(0) = f''(0) = 1$. No es difícil comprobar que $P_2(x) = 1+x+\frac{x^2}{2}$. Continuando este proceso, buscamos ahora un polinomio de grado tres $P_3(x)$, de forma que $P_3(0)=1$, $P_3'(0)=1$, $P_3''(0)=1$ y $P_3'''(0) = f'''(0) = 1$. No es difícil comprobar que $P_3(x) = 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}$.



Cada una de estas funciones: $y = P_1(x)$, $y = P_2(x)$, e $y = P_3(x)$ *mejora* la aproximación de la función exponencial $f(x) = e^x$. De hecho, si aproximamos el valor de $e \approx 2.71828$, que se obtiene para $x = 1$, obtenemos los siguientes resultados:

$$e \approx P_1(1) = 2, \quad e \approx P_2(1) = 2.5, \quad e \approx P_3(1) = 2.66667.$$

Los polinomios $P_1(x)$, $P_2(x)$ y $P_3(x)$ se llaman *polinomios de Taylor* de la función exponencial de ordenes 1, 2 y 3, respectivamente. En general tenemos la siguiente definición.

DEFINICIÓN. Sea f una función con derivadas de orden k, para $k = 0,1,\ldots N$, en un intervalo que contiene al punto a en su interior. Para cada $n = 0,1,\ldots N$, el polinomio

$$P_n(x) := f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^{n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

se llama *polinomio de Taylor de f de orden n alrededor de a.*

OBSERVACIÓN. El polinomio de Taylor $P_n(x)$ y todas sus derivadas hasta el orden n coinciden con las de la función $f(x)$ en el punto $x = a$, es decir,

$$P_n(a) = f(a), \quad P_n'(a) = f'(a), \quad P_n''(a) = f''(a), \quad P_n'''(a) = f'''(a), \quad \ldots, \quad P_n^{n)}(a) = f^{n)}(a).$$

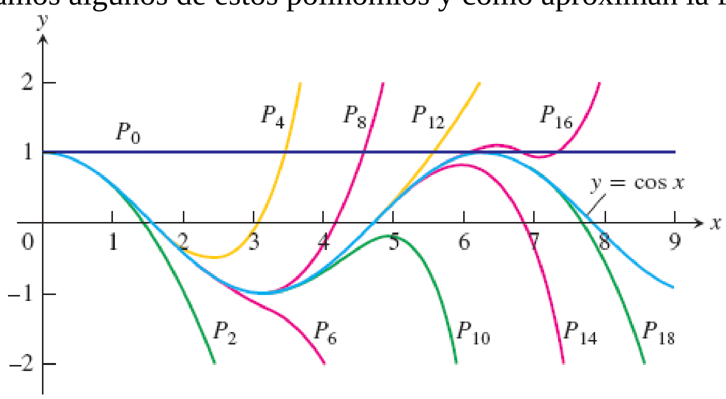
EJEMPLO. Vamos a calcular los diferentes polinomios de Taylor de la función coseno $f(x) := \cos x$, centrados en $a = 0$. Las sucesivas derivadas de la función coseno son

$$\begin{array}{ll} f(x) = \cos x, & f'(x) = -\operatorname{sen} x, \\ f''(x) = -\cos x, & f'''(x) = \operatorname{sen} x, \\ \vdots & \vdots \\ f^{2n)}(x) = (-1)^n \cos x, & f^{2n+1)}(x) = (-1)^n \operatorname{sen} x. \end{array}$$

Como $\cos 0 = 1$ y $\operatorname{sen} 0 = 0$, tenemos que $f^{2n)}(0) = (-1)^n$ y $f^{2n+1)}(0) = 0$. Puesto que $f^{2n+1)}(0) = 0$ los polinomios de órdenes $2n$ y $2n+1$ son idénticos, es decir,

$$P_{2n+1}(x) = P_{2n}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

A continuación dibujamos algunos de estos polinomios y cómo aproximan la función coseno.



Ahora responderemos a la siguiente pregunta: ¿Cómo de buena es la aproximación de una función $f(x)$ por el polinomio de Taylor $P_n(x)$ en un intervalo dado? La respuesta a esta cuestión está en el teorema de Taylor que enunciamos a continuación.

TEOREMA (TAYLOR). Supongamos que la función $f : x \in [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to f(x) \in \mathbb{R}$ tiene derivadas f', $f'', \ldots, f^{n)}$ que son continuas en $[a,b]$ y que $f^{n)}$ es derivable en (a,b). Entonces existe $c \in (a,b)$ tal que $f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \dfrac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \cdots + \dfrac{f^{n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \dfrac{f^{n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$

OBSERVACIÓN. El teorema de Taylor es una generalización del teorema del valor medio de Lagrange. Cuando aplicamos el teorema de Taylor usualmente dejamos fijo el punto a y tratamos b como variable. La fórmula de Taylor es más fácil de escribir en esta situación si cambiamos la variable b por la variable x que usamos normalmente. Con este cambio de notación el teorema de Taylor afirma que si la función f tiene *suficientes derivadas* en un intervalo I que contiene al punto a en su interior y $x \in I$, entonces existe $c \in I(a,x)$ tal que

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x),$$

donde $R_n(x) := \dfrac{f^{n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$. Es importante recalcar que el punto c que aparece en la expresión de $R_n(x)$ depende del punto x. Es decir, para cada $x \in I$, existe $c \in I(a,x)$ que verifica la igualdad anterior, que se le llama *fórmula de Taylor de la función f de orden n alrededor de a.* La expresión $R_n(x)$ se le llama *resto de Taylor de orden n.*

EJEMPLO. Vamos a calcular e con un error menor que 10^{-6}. De la fórmula de Taylor (centrada en $a=0$) de la función exponencial

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}, \quad c \in I(0,x)$$

obtenemos, para $x=1$, que $e = 1 + 1 + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + \dfrac{1}{4!} + \cdots + \dfrac{1}{n!} + R_n(1)$, con $R_n(1) = \dfrac{e^c}{(n+1)!}$ y $c \in (0,1)$.

Entonces tenemos que $\left| e - \left(1 + 1 + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + \dfrac{1}{4!} + \cdots + \dfrac{1}{n!}\right)\right| = |R_n(1)| = \dfrac{e^c}{(n+1)!} < \dfrac{3}{(n+1)!}$. Suponemos que nosotros conocemos que $e < 3$, con lo cual $e^c < 3$ porque $c < 1$. Ahora es fácil comprobar que $\dfrac{3}{10!} < 10^{-6}$. Entonces, basta tomar $n = 9$ en la fórmula anterior para obtener

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} + \frac{1}{9!} = 2.718282$$

Con un error menor que 10^{-6}.

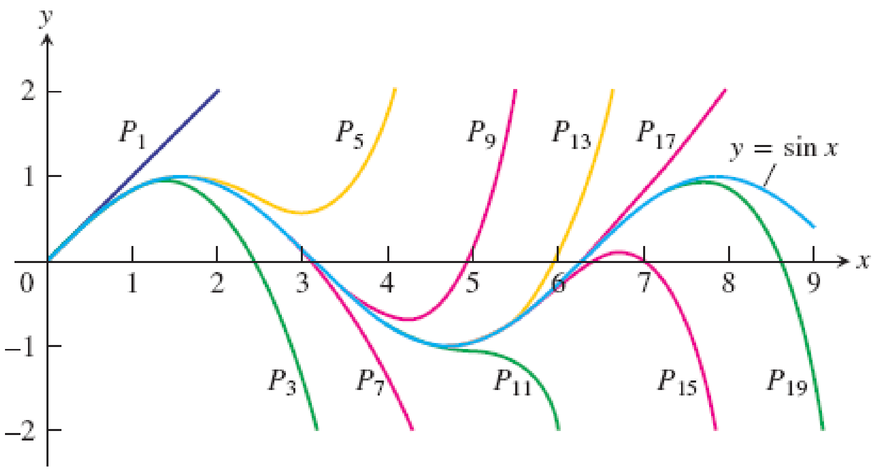
EJEMPLO. Para la función seno $f(x) := \text{sen}\, x,$ tenemos que las sucesivas derivadas son

$$\begin{array}{ll} f(x) = \text{sen}\, x, & f'(x) = \cos x, \\ f''(x) = -\text{sen}\, x, & f'''(x) = -\cos x, \\ \vdots & \vdots \\ f^{2n)}(x) = (-1)^n \text{sen}\, x, & f^{2n+1)}(x) = (-1)^n \cos x. \end{array}$$

Como $\cos 0 = 1$ y $\text{sen}\, 0 = 0$ tenemos que $f^{2n)}(0) = 0$ y $f^{2n+1)}(0) = (-1)^n$. Puesto que $f^{2n)}(0) = 0$ los polinomios de órdenes $2n+1$ y $2n+2$ son idénticos, es decir,

$$P_{2n+2}(x) = P_{2n+1}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

A continuación dibujamos algunos de estos polinomios y cómo aproximan la función seno.



Entonces, la fórmula de Taylor para la función seno es

$$\text{sen}\, x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} - (-1)^n \frac{\cos c}{(2n+3)!} x^{2n+3}, \quad c \in I(0,x).$$

En particular tenemos que $\text{sen}\, x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{\cos c}{5!} x^5$, con $c \in I(0,x)$. El error que se comete al aproximar $\text{sen}\, x$ por $x - \frac{x^3}{3!}$ está acotado por $\left|\text{sen}\, x - \left(x - \frac{x^3}{3!}\right)\right| = \left|\frac{\cos c}{5!} x^5\right| \le \frac{|x|^5}{5!}$ puesto que $|\cos c| \le 1$ para cualquier valor de c. Entonces, el error será menor que $3 \cdot 10^{-4}$ si se verifica que $\frac{|x|^5}{5!} < 3 \cdot 10^{-4}$, lo que significa que $|x| < \sqrt[5]{360 \cdot 10^{-4}} \approx 0.514$.

OBSERVACIÓN. En las condiciones del teorema de Taylor, para una función f que tiene suficientes derivadas en un intervalo I que contiene al punto a en su interior y $x \in I$, sabemos que existe

$c \in I(a,x)$ tal que $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dfrac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \dfrac{f^{n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x)$, donde $R_n(x) := \dfrac{f^{n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$. Como antes, si escribimos

$$P_n(x) := f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{n)}(a)}{n!}(x-a)^n,$$

tenemos la igualdad $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$, donde $R_n(x) := \dfrac{f^{n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$. Nos preguntamos ahora qué ocurre en la igualdad $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$, cuando $x \to a$, es decir, cuando x está próximo al valor a (y dejamos fijo el grado n del polinomio). O bien, cuando $n \to \infty$, es decir, cuando aumentamos el grado del polinomio de Taylor, pero dejamos fijo el valor de x. Observa que, de la continuidad de la derivada $f^{n+1)}$ se verifica que $\lim_{x\to a} \dfrac{R_n(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a} \dfrac{f^{n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a) = 0$. Entonces

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - P_n(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a} \frac{R_n(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Es decir, cuando $x \to a$, la diferencia entre el polinomio de Taylor $P_n(x)$ y $f(x)$ converge a cero más rápidamente que la potencia $(x-a)^n$ tiende a 0. Esto significa que $P_n(x)$ está muy próximo a $f(x)$ cuando x está cerca de a.

Si existe una constante positiva M tal que $\left| f^{n+1)}(z) \right| \le M$ para todo $z \in [a,x]$, entonces el resto de Taylor está acotado por $|R_n(x)| = \left| \dfrac{f^{n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \right| \le M \dfrac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$. Se puede probar que

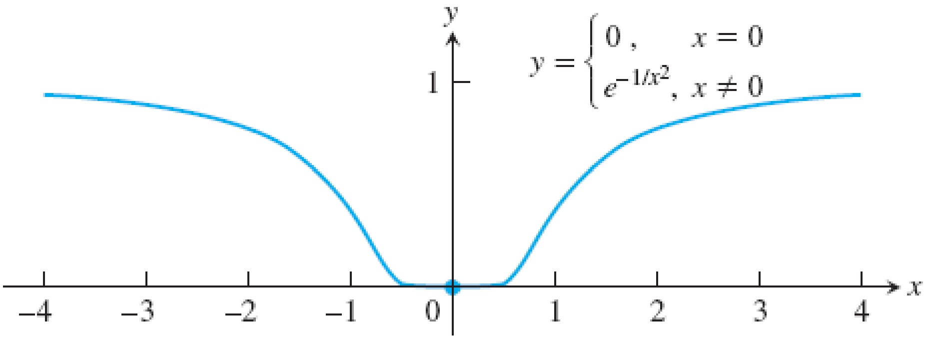
$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} = 0,$$

independientemente del valor $|x-a|$. Con estas hipótesis de acotación para las derivadas de la función f se verifica que $\lim_{n\to\infty} P_n(x) = f(x)$, esto es,

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{n\to\infty} \left(f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{n)}(a)}{n!}(x-a)^n \right) \\ &:= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots \\ &:= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{k)}(a)}{k!}(x-a)^k. \end{aligned}$$

En este caso decimos que *la serie de potencias* $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{k)}(a)}{k!}(x-a)^k$, que se llama *serie de Taylor de la función* f *alrededor del punto* a, es convergente a la función o que la función f coincide con la suma de su serie de Taylor.

EJEMPLO. Existen funciones para las que su serie de Taylor no converge a la función. Por ejemplo, consideremos la función de Cauchy $f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$



Es posible comprobar que $f^{n)}(0) = 0$, para todo $n = 0,1,\ldots$ Esto significa que su serie de Taylor de f centrada en $a = 0$ es

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{n)}(0)}{n!}x^n + \cdots = 0 + 0\cdot x + 0\cdot x^2 + \cdots + 0\cdot x^n + \cdots = 0.$$

Esta serie converge para todo x, (su suma vale siempre 0) pero converge a $f(x)$ sólo para $x = 0$.

EJERCICIO 1. Calcula los polinomios de Taylor de orden 1, 2 y 3 alrededor del punto a para las siguientes funciones f.

1. $f(x) = \log(x+1), \quad a = 0.$
2. $f(x) = \frac{1}{x+1}, \quad a = 0.$
3. $f(x) = \frac{1}{x}, \quad a = 2.$
4. $f(x) = \operatorname{sen} x, \quad a = \frac{\pi}{4}.$
5. $f(x) = \sqrt{x+1}, \quad a = 0.$
6. $f(x) = \sqrt{x}, \quad a = 4.$

EJERCICIO 2. Calcula los polinomios de Taylor de grado 4 de las funciones que se indican a continuación alrededor del punto dado.

(1) $f(x) = \frac{1}{1-x}$ alrededor de $a = 0.$

(2) $f(x) = \frac{x}{1+x}$ alrededor de $a = 1.$

(3) $f(x) = \log x$ alrededor de $a = 1.$

(4) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 5$ alrededor de $a = 2.$

EJERCICIO 3. ¿Para qué valores de x se puede remplazar $\operatorname{sen} x$ por $x - \frac{x^3}{6}$ con un error menor que $5\cdot 10^{-4}$?

EJERCICIO 4. El polinomio de Taylor de orden 2 de una función $f(x)$ dos veces derivable en $x=a$ se llama *aproximación cuadrática* de f en el punto a. Para las siguientes funciones calcula la linealización (el polinomio de Taylor de orden 1) y la aproximación cuadrática en el punto $a=0$.

1. $f(x)=\log(\cos x)$.
2. $f(x)=e^{\operatorname{sen} x}$.
3. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
4. $f(x)=\cosh x$.
5. $f(x)=\operatorname{sen} x$.
6. $f(x)=\tan x$.

EJERCICIO 5. Si remplazamos $\cos x$ por $1-\dfrac{x^2}{2}$ y $|x|<0.5$, ¿qué estimación se puede dar del error?

EJERCICIO 6. Cuando $0\le x\le 0.01$, demuestra que e^x se puede remplazar por $1+x$ con un error menor que el $0.6\,\%$ de x. Usa que $e^{0.01}=1.01$.

EJERCICIO 7. ¿Para qué valores de $x>0$ se puede remplazar $\log(1+x)$ por x con un error menor que el 1% de x?

EJERCICIO 8. Usa un desarrollo de Taylor de la función $\log(1+x)$ para calcular $\log(1.2)$ con un error menor que $\varepsilon=0.01$.

EJERCICIO 9. Considera la función $f(x)=\displaystyle\int_1^x \frac{e^t}{t}\,dt$, definida para $x>0$.

a) Halla los polinomios de Taylor de grados 2 y 3 de f alrededor de $a=1$.
b) Aproxima el valor de $f(1.1)$ usando el polinomio de Taylor anterior de grado 2 y estima el error cometido.