Cuadratura

FCEN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Temario:

- Integración numérica
- Método de Newton-Cotes
  - Regla del Trapecio simple y compuesta
  - Regla de Simpson ⅓ y compuesta
- Extrapolación de Richardson
- Integración de Romberg
- Método de Gauss - Legendre

Introducción

Para aproximar la integral definida de una función f:R→R, se utiliza una estrategia similar a la definición de la integral (recordar sumatoria de Riemann).

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \mathrm{I} = \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i)$$

Los coeficientes w_i se denominan **pesos** y las abscisas x_i **nodos**. Los pesos y los nodos dependen del método de cuadratura.

Todos los métodos de cuadratura **se basan en la interpolación polinomial**, por lo tanto son más efectivos cuando la función se puede aproximar por polinomios.

Los métodos se pueden separar en **dos grandes grupos**: los derivados por las **fórmulas de Newton-Cotes** y los de la **cuadratura de Gauss**.

Para el primer caso, los nodos están **equiespaciados**, mientras que para el segundo, **la posición de los nodos se calcula** para lograr la máxima precisión posible.

Método de Newton-Cotes

FCEN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Se aproxima f(x) **interpolando un polinomio** de grado n-1 por los n puntos conocidos. Las funciones base son **los polinomios de Lagrange.**

$$P_{n-1}(x)=\sum_{i=1}^{n} f(x_i)L_i(x)$$

Donde $L_i(x)$ son las funciones de Lagrange.

Se reemplaza la función por el polinomio + el error de interpolación E(x) y se integra

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b P_{n-1}(x)dx+\int_a^b E(x)dx=\sum_{i=1}^{n}\left(f(x_i)\int_a^b L_i(x)dx\right)+E(h)=\sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i)+E(h)$$

siendo $w_i=\int_a^b L_i(x)dx\,, i=1,2,\ldots,n$

Esta parte se denomina **cuadratura** y depende de las funciones de Lagrange

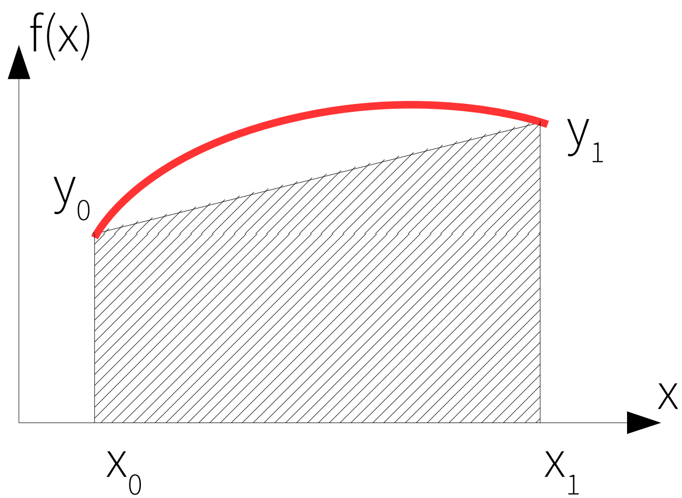
Método de Newton-Cotes

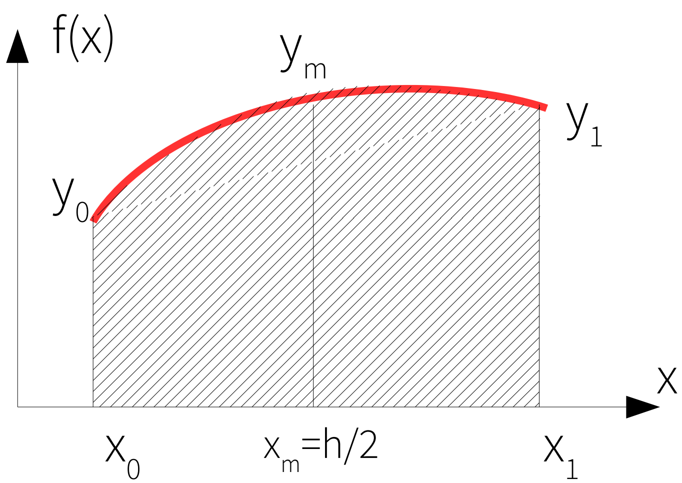
Según la cantidad de puntos n, se obtienen distintas reglas de integración.

Las reglas clásicas son:

Regla del trapecio, n=2 $\quad I=\frac{h}{2}\left[f(x_0)+f(x_1)\right]+O(h^3)$

Regla de ⅓ Simpson, n=3 $\quad I=\frac{h}{3}\left[f(x_0)+4f(x_m)+f(x_1)\right]+O(h^5)$





Regla del trapecio

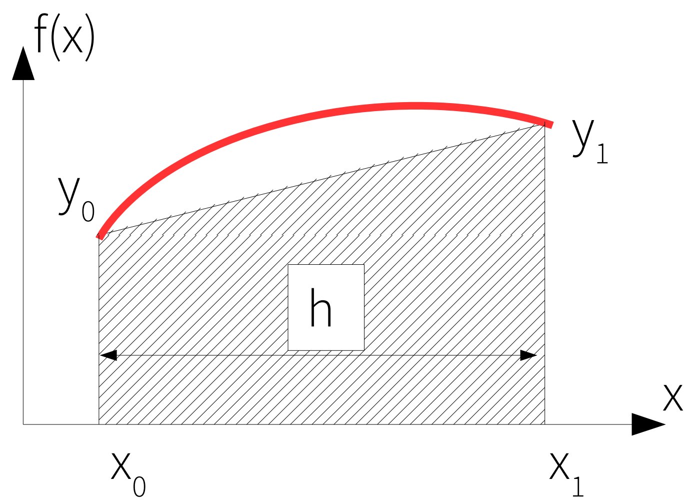
FCEN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

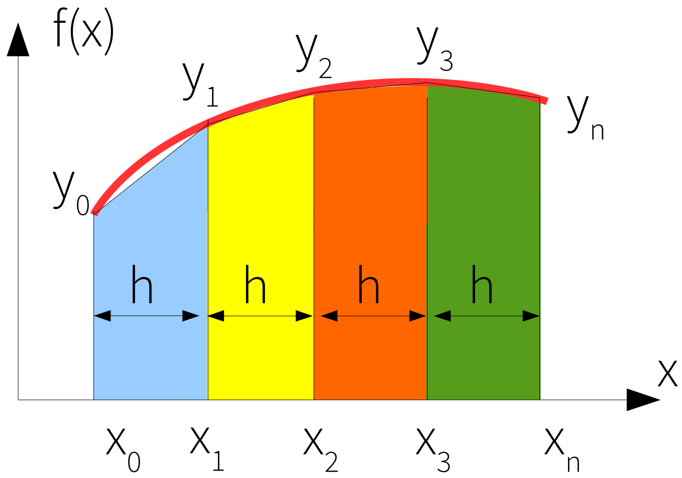
$$\text{Simple: } I=\frac{h}{2}\left[f(x_0)+f(x_1)\right]+O(h^3)$$

$$\text{Compuesta: } I=\frac{h}{2}\left[f(x_0)+2\sum_{i=1}^{n-1}f(x_i)+f(x_n)\right]+O(h^2)$$

Las fórmulas compuestas pierden un orden de error

En vez de integrar todo el intervalo, se particiona el mismo para mejorar la aproximación. Los puntos interiores se suman 2 veces.





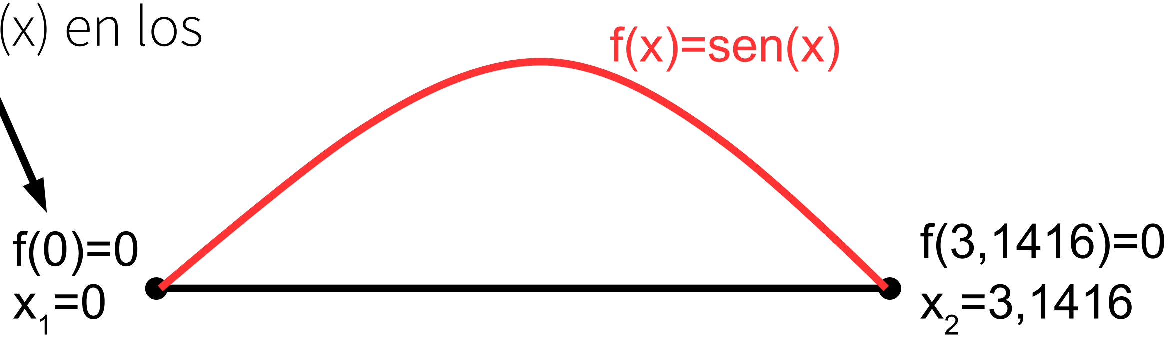
Ejemplo 1

Para 1 subintervalo (o panel) $h_1 = 3{,}1461$

Solución analítica

$$\int_0^{\pi} sen\,x\,dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} = -(-1) + 1 = 2$$

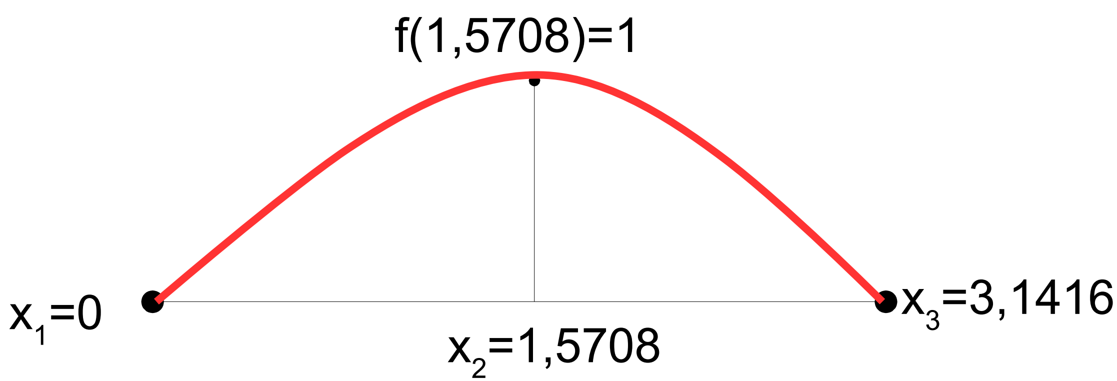
Evaluar f(x) en los puntos



$$I_1 = \frac{h_1}{2}[f(x_1) + f(x_2)] = \frac{3{,}1416}{2}[0+0] = 0$$

Ejemplo 1

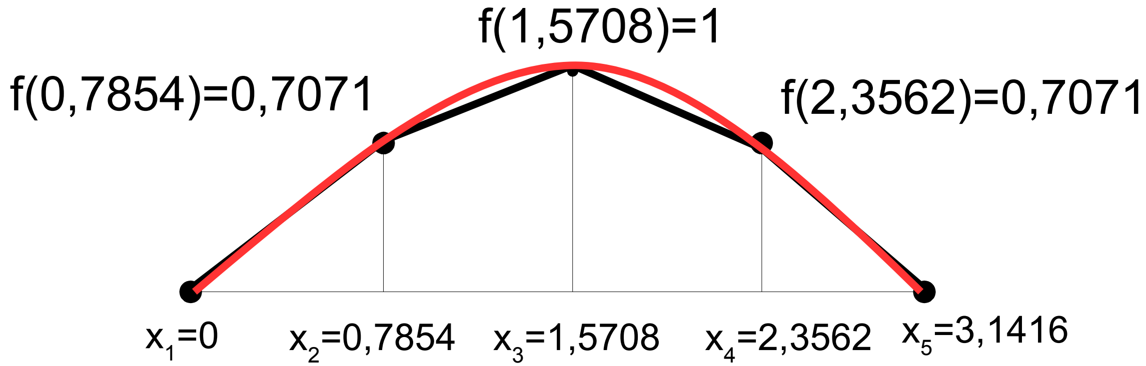
Para 2 paneles, h_2=3,1416/2=1,5708



$$I_2=\frac{h_2}{2}[f(x_1)+f(x_2)]+\frac{h_2}{2}[f(x_2)+f(x_3)]=\frac{1,5708}{2}(0+2(1)+0)=1,5708$$

Ejemplo 1

Para 4 paneles, h_4=3,1416/4=0,7854

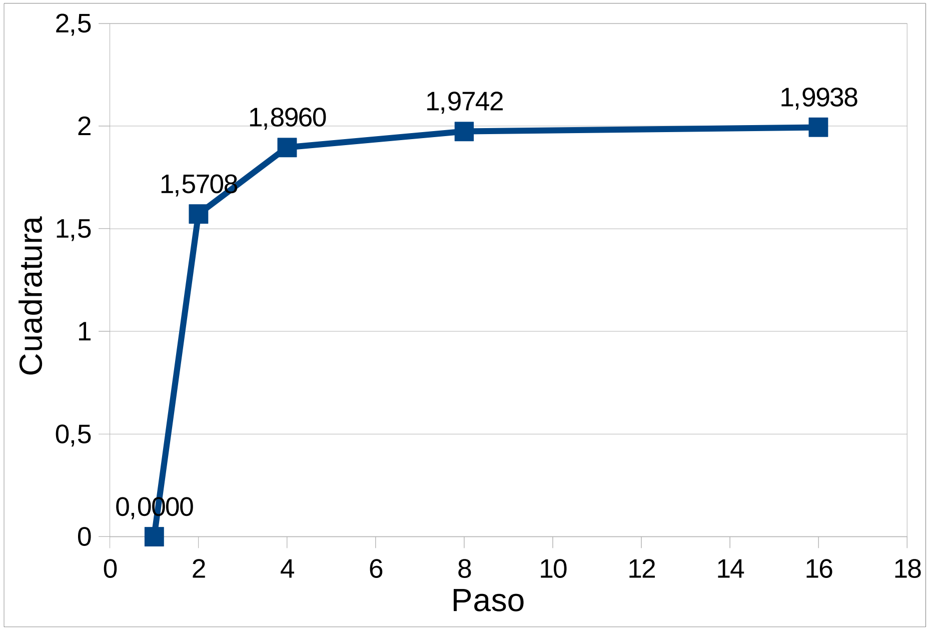


$$I_3=\frac{h_3}{2}[f(x_1)+f(x_2)]+\frac{h_3}{2}[f(x_2)+f(x_3)]+\frac{h_3}{2}[f(x_3)+f(x_4)]+\frac{h_3}{2}[f(x_4)+f(x_5)]$$

$$I_3=\frac{0,7854}{2}(0+2(0,7071)+2(1)+2(0,7071)+0)=\mathbf{1,8961}$$

Ejemplo 1

Paneles	Paso	Cuadratura	Error relativo $I_k - I_{k-1}$
1	3,1416	0	0
2	1,5708	1,5708	1,5708
4	0,7854	1,896	0,3252
8	0,3927	1,9742	0,0782
16	0,1964	1,9938	0,0196



Ejemplo 1

Evaluemos el error obtenido en la última iteración

$$E=-\frac{(b-a)h^2}{12}f''(\zeta)=-\frac{(\pi-0)0{,}1964^2}{12}(-sen(\zeta))=0{,}0101\,sen(\zeta)$$

El valor de ζ es desconocido pero sabemos que el seno está acotado por -1 y +1

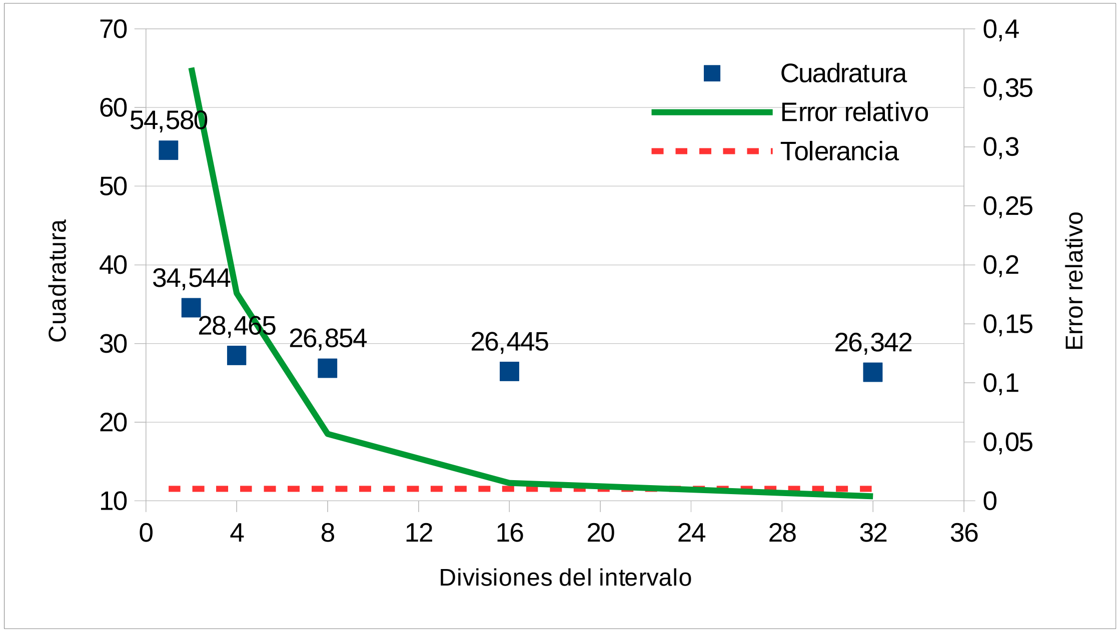
Por lo tanto el valor del error estará acotado por $-0{,}0101<E<0{,}0101$

La solución analítica estará acotada entre: $1{,}9938<\int_0^{\pi} sen(x)\,dx<2{,}0039$

Ejemplo 2

Evaluar $\int_{0}^{4} senh(x)\,dx$ con una tolerancia de 0,01

divisiones	paso	Cuadratura	Error relativo
1	4	54,5798	54,5798
2	2	34,5436	-0,3671
4	1	28,4649	-0,1760
8	0,5	26,8541	-0,0566
16	0,25	26,4451	-0,0152
32	0,125	26,3425	-0,0039



Ejemplo 3

Evaluar $\int_{0}^{2,5} f(x)dx$ a partir de los datos de la tabla

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5
f(x)	1,5000	2,0000	2,0000	1,6364	1,2500	0,9565

$$I=\frac{h}{2}\left[f(x_0)+2\sum_{i=1}^{4}(f(x_i))+f(x_5)\right]=\frac{0,5}{2}\left[1,5+2(2+2+1,6364+1,25)+0,9565\right]=\mathbf{4,0573}$$

Ejemplo 4

Evaluar $\int_{1,1}^{1,5} f(x)dx$ a partir de los datos de la tabla

x	1,1	1,3	1,5
f(x)	3,0042	3,2	4,4817

$$I=\frac{h}{2}[f(x_0)+2\sum_{i=1}^{1}(f(x_i))+f(x_2)]=\frac{0,2}{2}[3,0042+2(3,2)+4,4817]=\mathbf{1,38859}$$

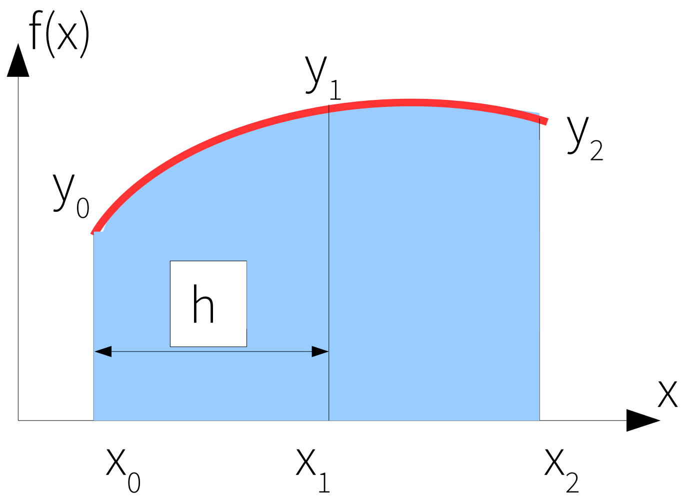
Regla de Simpson 1/3

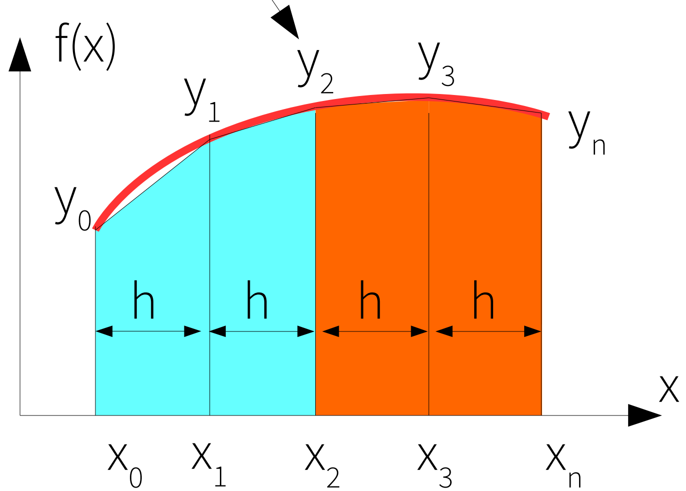
Simple: $I=\frac{h}{3}\left[f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)\right]+O(h^5)$

Compuesta: $I=\frac{h}{3}\left[f(x_0)+4\sum_{i\,impar} f(x_i)+2\sum_{i\,par} f(x_i)+f(x_n)\right]+O(h^4)$

Cuidado: El intervalo debe estar dividido en un **número par** de subintervalos

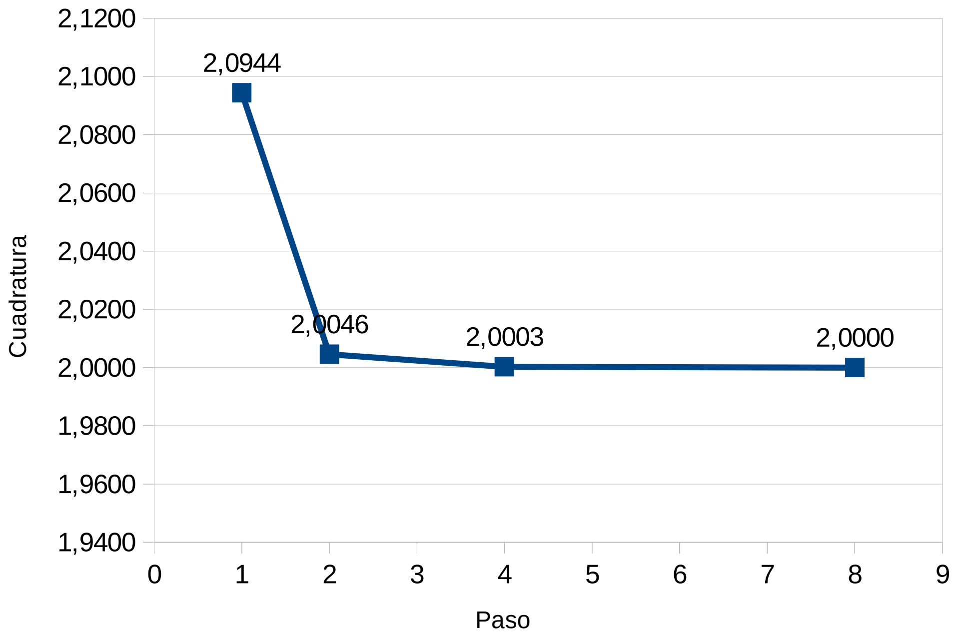
Los puntos interiores pares se suman 2 veces porque comparten intervalos.





Ejemplo 1

Paneles	paso	Cuadratura Simpson	Error relativo
1	1,5708	2,0944	
2	0,7854	2,0046	4,29E-02
4	0,3927	2,0003	2,14E-03
8	0,1963	2,0000	1,26E-04



$$x_0=0,\ x_1=1{,}5708,\ x_2=3{,}1416$$

$$I_1=\frac{1{,}5708}{3}\left[sen(0)+4\,sen(1{,}5708)+sen(\pi)\right]=2{,}0944$$

$$x_0=0,\ x_1=0{,}7854,\ x_2=1{,}5708,\ x_3=2{,}3562,\ x_4=3{,}1416$$

$$I_2=\frac{0{,}7854}{3}\left[sen(0)+4\left(sen(0{,}7854)+sen(2{,}3562)\right)+2\left(sen(1{,}5708)\right)+sen(\pi)\right]=2{,}0046$$

Integración de Romberg

¿Recuerdan la extrapolación de Richardson?
¿Qué pasaría si se combina con la regla de trapecio?
La respuesta es la integración de Romberg

Se introduce la notación $R_{i,1}=I_i$,siendo I_i la cuadratura obtenida con 2^{i-1} paneles

Se comienza evaluando $R_{1,1}=I_1$ (un panel) y $R_{2,1}=I_2$ (dos paneles)

Luego se utiliza la extrapolación de Richardson con p=2, para eliminar el término del error de mayor orden, y se obtiene $R_{2,2}=\frac{2^p R_{2,1}-R_{1,1}}{2^p-1}=\frac{4}{3}R_{2,1}-\frac{1}{3}R_{1,1}$

Para continuar se evalúa $R_{3,1}=I_3$ (cuatro paneles) y se repite la extrapolación de Richardson utilizando p=2 $R_{3,2}=\frac{4}{3}R_{3,1}-\frac{1}{3}R_{2,1}$

Ahora tenemos dos resultados de $O\left(h^{p+2}\right)$ y se pueden extrapolar con p=4

$$R_{3,3}=\frac{16}{15}R_{3,2}-\frac{1}{15}R_{2,2}$$

Integración de Romberg

La secuencia se puede colocar en una tabla, donde los elementos de primer columna son calculados por la regla de trapecios y los demás resultan de la extrapolación de Richardson

Aumenta el orden del error p

Aumenta la *cantidad de paneles*

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccc} O(h^2) & O(h^4) & O(h^6) \end{array} \\
\begin{array}{c} h \\ h/2 \\ h/4 \end{array} & \begin{bmatrix} R_{1,1} & . & . \\ R_{2,1} & R_{2,2} & . \\ R_{3,1} & R_{2,2} & R_{3,3} \end{bmatrix}
\end{array}
$$

Ejemplo 1

$$\int_0^{\pi} sen\, x\, dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} = -(-1) + 1 = 2$$

Paneles	I_i	$R_{i,1} = 4/3 I_i - 1/3 I_{i-1}$	$R_{i,2} = 16/15 I_i - 1/15 I_{i-1}$
1	0		
2	1,5708	2,0944	
4	1,896	2,0044	1,9984
8	1,9742	2,0003	2,0000
16	1,9938	2,0003	2,0003

Ejemplo 2

Evaluar $\int_0^4 senh(x)\,dx$ con una tolerancia de 0,01

divisiones	paso	Cuadratura	p=2	p=4	p=6	p=8	p=10
1	4	54,5798					
2	2	34,5436	27,8649				
4	1	28,4649	26,4386	26,3436			
8	0,5	26,8541	26,3171	26,3090	26,3085		
16	0,25	26,4451	26,3088	26,3082	26,3082	26,3082	
32	0,125	26,3425	26,3083	26,3082	26,3082	26,3082	26,3082

$$R_{i,j}=\frac{2^p R_{i,j-1}-R_{i-1,j-1}}{2^p-1}$$

Con 16 paneles (la mitad que para trapecios compuesto) se obtiene la tolerancia requerida

Cuadratura de Gauss (y amigos)

Las fórmulas de cuadratura de Gauss tienen la misma forma que las de Newton-Cotes

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx I = \sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i)$$

En el método de **Newton-Cotes**, los **nodos** se colocan espaciados uniformemente en (a,b), es decir, se colocan en **posiciones predeterminadas**.

Para la integración de **Gauss**, se calculan los pesos y las posiciones nodales **asumiendo que la aproximación es exacta para una función f(x) que equivale a un polinomio de grado 2n-1 o menor**. Es decir, tanto los pesos como las posiciones de los nodos se deben calcular antes de calcular la cuadratura.

Cuadratura de Gauss (y amigos)

Ejemplo, queremos integrar f(x) entre -1 y +1 con 2 puntos

Como son 2 puntos, la integración será exacta para polinomios de hasta grado 3.

Buscamos determinar A_1, x_1, A_2, x_2

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{2} A_i P_m(x_i),\; m \leq 2n-1$$

$$\int_{-1}^{1} x^0\,dx = 2 = A_1 + A_2$$

$$\int_{-1}^{1} x\,dx = 0 = A_1 x_1^1 + A_2 x_2^1$$

$$\int_{-1}^{1} x^2\,dx = \frac{2}{3} = A_1 x_1^2 + A_2 x_2^2$$

$$\int_{-1}^{1} x^3\,dx = 0 = A_1 x_1^3 + A_2 x_2^3$$

→ La solución es: $x_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3},\; x_2 = \frac{\sqrt{3}}{3},\; A_1 = 1,\; A_2 = 2$

Y la fórmula de cuadratura resulta

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

Cuadratura de Gauss (y amigos)

FCEN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Como es laborioso encontrar los pesos y nodos, existen varias soluciones "clásicas" que ya fueron calculadas y están tabuladas (por amigos :D)

Gauss-Legendre

$$\int_{-1}^{1} 1 f(\zeta) d\zeta \approx \sum_{i=1}^{n} A_i f(\zeta_i)$$

Nodos	ζ_i	A_i
1	0,000000	2,000000
2	$\pm\sqrt{(1/3)}$	1,000000
3	0,000000 $\pm\sqrt{(3/5)}$	8/9 5/9
4	±0,339981 ±0,861136	0,652145 0,347855

Gauss-Laguerre

$$\int_{0}^{\infty} e^{-x} f(x) dx \approx \sum_{i=1}^{n} A_i f(\zeta_i)$$

Nodos	ζ_i	A_i
2	0,585786 3,414214	0,853554 0,146447
3	0,415775 2,294280 6,289945	0,711093 0,278517 0,103892(10^{-1})

Gauss-Hermite

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x) dx \approx \sum_{i=1}^{n} A_i f(\zeta_i)$$

Nodos	ζ_i	A_i
2	±0,707107	0,886227
3	0,000000 ±1,224745	1,181636 0,295409

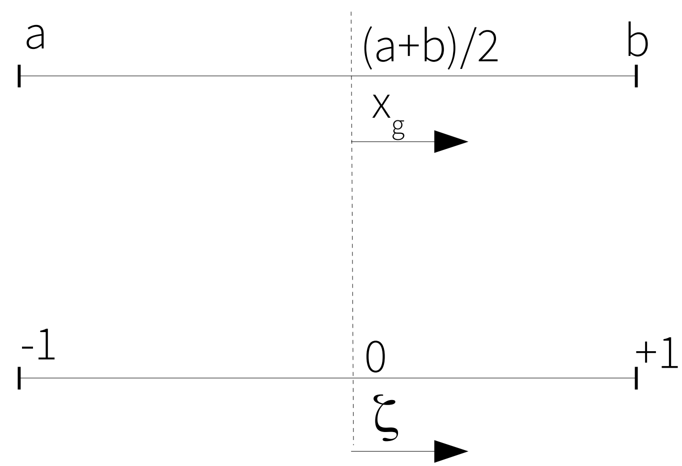
Cuadratura de Gauss-Legendre

FCEN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

La cuadratura de Gauss-Legendre resuelve integrales en el intervalo [-1,1].

Para poder aplicar la fórmula de cuadratura debemos transformar el intervalo de **integración original** (a,b) al **intervalo estándar** (-1,1)

$$x_g = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}\zeta \rightarrow dx_g = d\zeta\,\frac{b-a}{2}$$



Habiendo determinado los **puntos de gauss** x_g se evalúa la función en los mismos y se resuelve la integral

$$\int_a^b f(x_g)\,dx_g \approx \frac{b-a}{2}\sum_{i=1}^{n} A_i f(x_{gi})$$

Ejemplo

Puntos de Gauss: $x_g = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\zeta$

$$\int_0^{\pi} sen\, x\, dx \approx \frac{\pi}{2}\sum_{i=1}^{n} A_i f(x_{gi})$$

Con 1 punto: $\zeta = 0 \rightarrow x_{g1} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} 0{,}000000 = \frac{\pi}{2}$

$$\int_0^{\pi} sen\, x\, dx \approx \frac{\pi}{2}[2\, sen(\frac{\pi}{2})] = 3{,}1416$$

Con 2 puntos: $\zeta = \pm\sqrt{1/3} \rightarrow x_{g\,1,2} = \frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{1}{3}} = 1{,}5708 \pm 0{,}9069$

$$\int_0^{\pi} sen\, x\, dx \approx \frac{\pi}{2}[1\, sen(0{,}6639) + 1\, sen(2{,}4777)] = 1{,}9358$$

Con 3 puntos: $\zeta_{1,3} = \pm\sqrt{3/5} \rightarrow x_{g\,1,3} = \frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{3}{5}} = 1{,}5708 \pm 1{,}2167\,,\, \zeta_2 = 0 \rightarrow x_{g2} = \frac{\pi}{2}$

$$\int_0^{\pi} sen\, x\, dx \approx \frac{\pi}{2}[5/9\, sen(0{,}3541) + 8/9\, sen(\frac{\pi}{2}) + 5/9\, sen(2{,}7875)] = 2{,}0014$$