Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de valores de contorno

Temario

- Método de las diferencias finitas para EDO de contorno
- Ejemplo
- Ejemplo de solución de EDP

Método de las diferencias finitas

Se busca resolver ecuaciones diferenciales ordinarias ("EDO") con condiciones de contorno. Por ejemplo:

$$\frac{d^2 f}{dx^2}+\frac{df}{dx}+f(x)=0 \ , \ x\in\Re \wedge x\in[0,1] \ , \ f(0)=0, f(1)=0$$

Se **aproxima cada derivada** por una diferenciación numérica. Generalmente se utilizan fórmulas de $O(h^2)$.

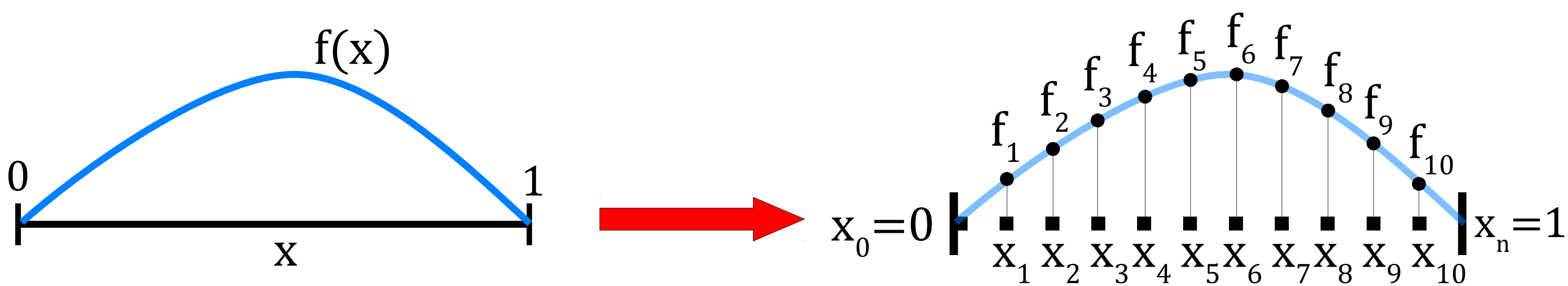
$$\frac{d^2 f}{dx^2}(x_i)=\frac{f_{i+1}-2f_i+f_{i-1}}{h^2}+O(h^2) \ , \ \frac{df}{dx}(x_i)=\frac{f_{i+1}-f_{i-1}}{2h}+O(h^2)$$

Reemplazando las derivadas en la EDO original se obtiene la **fórmula computacional.**

$$\frac{f_{i+1}-2f_i+f_{i-1}}{h^2}+\frac{f_{i+1}-f_{i-1}}{2h}+f_i+O(h^2)=0 \longrightarrow \boxed{\left[\left(1-\frac{h}{2}\right) \quad (h^2-2) \quad \left(1+\frac{h}{2}\right)\right]\cdot\begin{pmatrix} f_{i-1} \\ f_i \\ f_{i+1}\end{pmatrix}=0}$$

Método de las diferencias finitas

Para poder encontrar la solución se realiza una discretización del dominio continuo en n+1 puntos. Luego se evalúa la fórmula computacional en cada punto interior y se forma un SEL.



Dominio físico

Dominio computacional

Método de las diferencias finitas

Supongamos que discretizamos todo el dominio $[0,1]$ en 5 puntos. Entonces $x_0=0$ y $x_4=1$.

Se evalúa la fórmula computacional en x_1

$$\begin{bmatrix} \left(1-\frac{h}{2}\right) & \left(h^2-2\right) & \left(1+\frac{h}{2}\right) & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{pmatrix} = 0$$

Se evalúa la fórmula computacional en x_2

$$\begin{bmatrix} 0 & \left(1-\frac{h}{2}\right) & \left(h^2-2\right) & \left(1+\frac{h}{2}\right) & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{pmatrix} = 0$$

Se evalúa la fórmula computacional en x_3

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \left(1-\frac{h}{2}\right) & \left(h^2-2\right) & \left(1+\frac{h}{2}\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{pmatrix} = 0$$

Método de las diferencias finitas

La solución se obtiene resolviendo las ecuaciones en forma conjunta.

$$\begin{bmatrix} \left(1-\frac{h}{2}\right) & \left(h^2-2\right) & \left(1+\frac{h}{2}\right) & 0 & 0 \\ 0 & \left(1-\frac{h}{2}\right) & \left(h^2-2\right) & \left(1+\frac{h}{2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & \left(1-\frac{h}{2}\right) & \left(h^2-2\right) & \left(1+\frac{h}{2}\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Las condiciones de contorno brindan las ecuaciones adicionales para formar el SEL.

Hay dos caminos para armar el SEL.

Incluir los valores conocidos del contorno y reducir el tamaño del sistema. (**Condiciones Dirichlet**)

Adjuntar las ecuaciones de las condiciones de contorno al sistema. (**Condiciones Neumann**)

Método de las diferencias finitas

Condiciones Dirichlet: $f(x_0)=f_0, f(x_1)=f_1$

$$\begin{bmatrix} (h^2-2) & \left(1+\frac{h}{2}\right) & 0 \\ \left(1-\frac{h}{2}\right) & (h^2-2) & \left(1+\frac{h}{2}\right) \\ 0 & \left(1-\frac{h}{2}\right) & (h^2-2) \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\left(1-\frac{h}{2}\right) f_0 \\ 0 \\ -\left(1+\frac{h}{2}\right) f_4 \end{pmatrix}$$

Método de las diferencias finitas

FCEN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Condiciones Neumann: $\frac{df}{dx}(x_0)=a, \frac{df}{dx}(x_n)=-b$

$$\begin{bmatrix} -3 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ \left(1-\frac{h}{2}\right) & \left(h^2-2\right) & \left(1+\frac{h}{2}\right) & 0 & 0 \\ 0 & \left(1-\frac{h}{2}\right) & \left(h^2-2\right) & \left(1+\frac{h}{2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & \left(1-\frac{h}{2}\right) & \left(h^2-2\right) & \left(1+\frac{h}{2}\right) \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -b \end{pmatrix}$$

Método de las diferencias finitas

FCEN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Resumen del método

1) Reemplazar las derivadas en la EDO original por versiones discretas y encontrar la fórmula computacional
2) Discretizar el dominio continuo en n+1 puntos
3) Plantear la fórmula computacional en los nodos interiores
4) Incluir las condiciones de borde para armar el SEL.
5) Determinar los valores de la solución discreta resolviendo el SEL

Ejemplo

Lanzamiento de cohetes

$$\ddot{y}=-g \; , \; t(0)=0, t(1)=0$$

Fórmula computacional

$$\left(\frac{y_{i-1}-2y_i+y_{i+1}}{h^2}\right)=-g \rightarrow \begin{bmatrix}1 & -2 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{pmatrix}y_{i-1}\\ y_i\\ y_{i+1}\end{pmatrix}=-gh^2$$

Discretización en 5 puntos

$$t_i=0+ih, \text{con } i=1,2,3,4 \rightarrow h=\frac{(1-0)}{4}=1/4$$

Evaluación en puntos 1,2,3

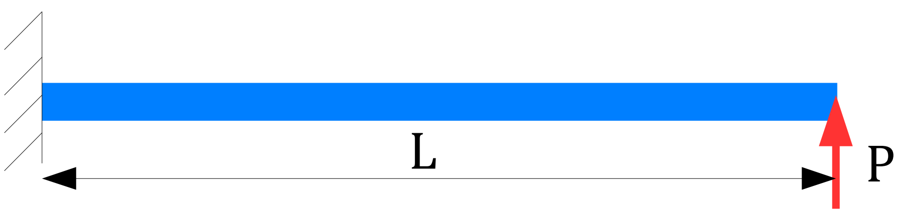
$$\begin{bmatrix}1 & -2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{pmatrix}y_0\\ y_1\\ y_2\\ y_3\\ y_4\end{pmatrix}=-gh^2\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$$

Sistema a resolver

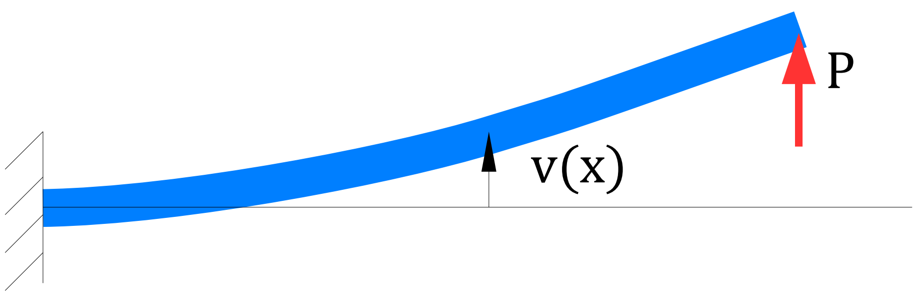
$$\begin{bmatrix}-2 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -2\end{bmatrix}\cdot\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}=-gh^2\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$$

Ejemplo

Se busca determinar el desplazamiento transversal de una viga anclada en un extremo y sometida a la acción de una fuerza P que actúa en el extremo opuesto. Las propiedades de la viga son: $\mathbf{EJ{=}10{,}000}$, $\mathbf{L{=}10}$. La carga $\mathbf{P = 100}$.



Antes



Después

Ejemplo

La ecuación que describe este problema es la siguiente:

$$EJ\frac{d^2v}{dx^2}+P(x-L)=0\ ,\ x\in\Re\wedge 0\leq x\leq L\ ,\ v(0)=0\ ,\ \frac{dv}{dx}(0)=0$$

Para determinar la fórmula computacional hay que aproximar una derivada segunda en la EDO y una derivada primera para la segunda condición de contorno.

$$EJ\left(\frac{v_{i-1}-2v_i+v_{i+1}}{h^2}\right)+P(x_i-L)=0\rightarrow\begin{bmatrix}1 & -2 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{pmatrix}v_{i-1}\\ v_i\\ v_{i+1}\end{pmatrix}=-\frac{Ph^2}{EJ}(x_i-L)$$

$$\frac{dv}{dx}(0)=\frac{-3v_0+4v_1-v_2}{2h}=0\rightarrow\begin{bmatrix}-3 & 4 & -1\end{bmatrix}\cdot\begin{pmatrix}v_0\\ v_1\\ v_2\end{pmatrix}=0$$

Ejemplo

FCEN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

El paso más grande que podemos tomar es $\mathbf{h=L/2=5}$ (3 puntos)
entonces $x_0=0,\ x_1=5,\ x_2=10$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dfrac{Ph^2}{EJ}(x_1-L) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1{,}25 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0{,}625 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}$$

La mitad del paso más grande que podemos tomar es $\mathbf{h=L/4=2{,}5}$ (5 puntos)
entonces $x_0=0,\ x_1=2{,}5\ ,\ x_2=5\ ,\ x_3=7{,}5\ ,\ x_4=10$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{pmatrix} = -\frac{Ph^2}{EJ} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (x_1-L) \\ (x_2-L) \\ (x_3-L) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0{,}46875 \\ 0{,}3125 \\ 0{,}15625 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0{,}23438 \\ 0{,}9375 \\ 1{,}95312 \\ 3{,}125 \end{pmatrix}$$

Ejemplo

$$\mathbf{v}_1=\begin{pmatrix}0\\0{,}625\\2{,}5\end{pmatrix} \qquad \mathbf{v}_2=\begin{pmatrix}0\\0{,}2344\\0{,}9375\\1{,}9531\\3{,}125\end{pmatrix} \qquad \mathbf{v}_3=\begin{pmatrix}0\\0{,}0684\\0{,}2734\\0{,}5957\\1{,}0156\\1{,}5137\\2{,}0703\\2{,}6666\\3{,}2812\end{pmatrix}$$

Usando al extrapolación de Richardson se puede obtener una solución mejor para el extremo.

$$v(L)=\frac{(2^2)3{,}125-2{,}5}{(2^2)-1}=3{,}33333+O(h^4)$$

Ejemplo

n+1	h	v(L)	error relativo
3	5	2,5	---
5	2,5	3,125	25,00 %
9	1,25	3,2812	5,00 %
17	0,625	3,3203	1,19 %
33	0,3125	3,3301	0,30 %
65	0,15625	3,3325	0,07 %
129	0,078125	3,3331	0,02 %
Richardson	2,5	3,3333	

Solución analítica:
$v(L)=PL^3/(3EJ)=3,3333$