Ecuaciones Diferenciales con derivadas Parciales

FCEN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Temario

- Introducción a EDP. Clasificación
- Ecuación de onda (hiperbólica)
- Soluciones numéricas: esquema explícito por diferencia central
- Ecuación del calor (parabólica)
- Soluciones numéricas: Crank-Nicholson
- Ecuación de Laplace (elíptica)
- Ejemplo

Referencia: Capítulo 10 de *Métodos Numéricos con MATLAB*, Mathews y Fink

Introducción a EDP

Una EDP es una ecuación que **involucra una o más derivadas parciales** de una función desconocida que depende de dos o más variables. El orden de la derivada más alta representa el **orden de la ecuación**.

Se denomina EDP **lineal** si los coeficientes son constantes o funciones lineales de las variables independientes. De lo contrario se denomina EDP **nolineal**. Se denomina EDP lineal **homogénea** si todos los términos contienen a la función desconocida o alguna de sus derivadas. De lo contrario se denomina **inhomogénea.**

Ecuaciones clásicas:

Ecuación de onda 1D: $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$$

Ecuación de convección-difusión: $$\frac{\partial \zeta}{\partial t}(x,t)+u\frac{\partial \zeta}{\partial x}(x,t)=\alpha\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}(x,t)$$

Ecuación de calor 1D: $$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)=\alpha^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$$

Ecuación de Laplace 2D: $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y)+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y)=0$$

Clasificación

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

Siendo A,B,C constantes.
Según los valores que tomen A,B,C se clasifica las EDP cuasilineales de la siguiente forma:

Si $B^2-4AC<0 \rightarrow$ la ecuación se denomina **elíptica**

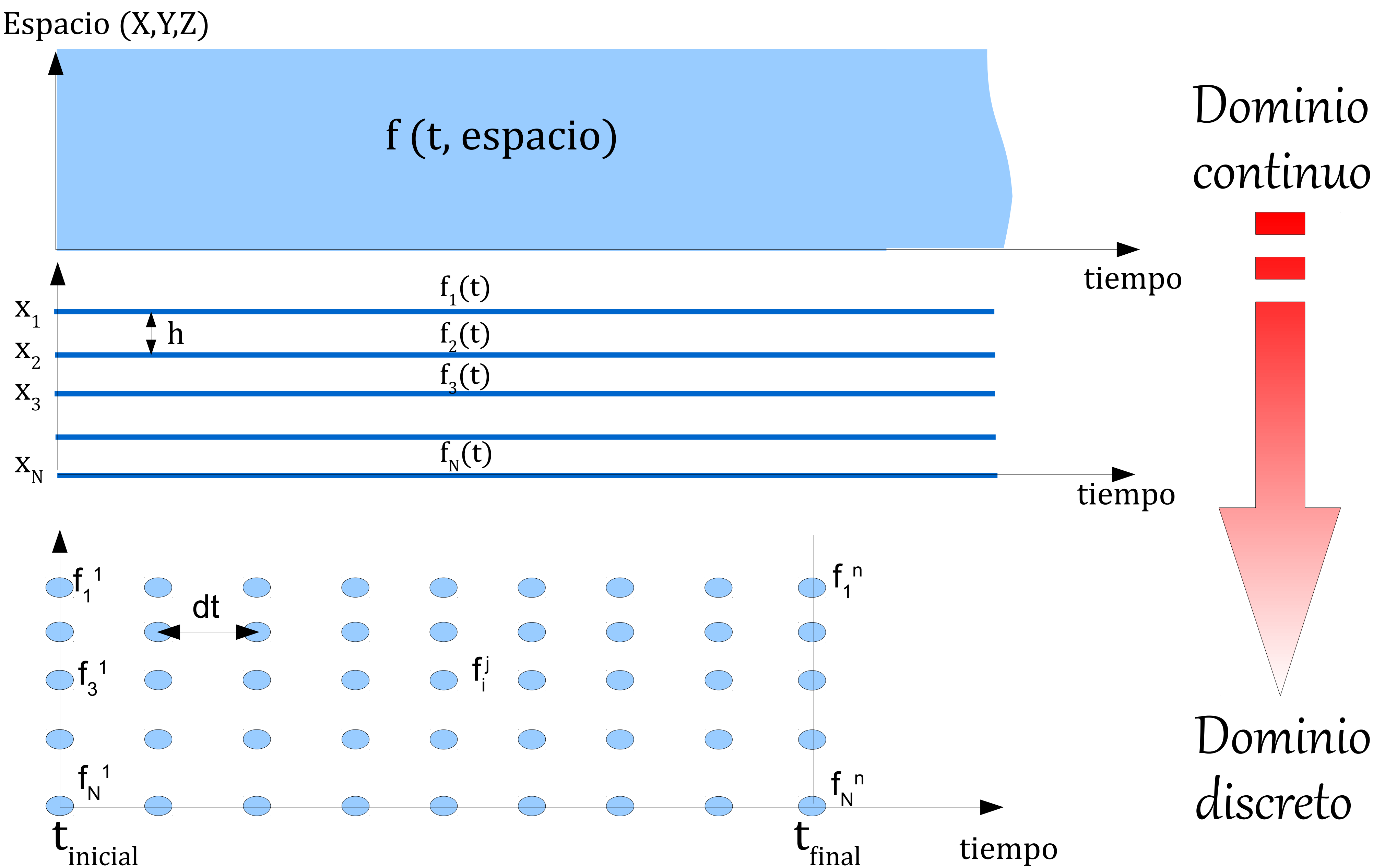
Si $B^2-4AC=0 \rightarrow$ la ecuación se denomina **parabólica**

Si $B^2-4AC>0 \rightarrow$ la ecuación se denomina **hiperbólica**

Las ecuaciones elípticas representan **problemas de equilibrio** en dominios cerrados, donde **a partir de la información del contorno se encuentra la solución en todo el interior.**

Las ecuaciones parabólicas e hiperbólicas representan **problemas de propagación** en dominios abiertos. **La solución se obtiene propagando las condiciones iniciales.**

Discretización del dominio



Ecuación de la onda 1D

FCEN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

La ecuación de onda puede modelar distintos fenómenos físicos, como por ejemplo:

- Pequeños desplazamientos transversales de una cuerda elástica, tensada en sus extremos.
- Propagación de ondas de sonido viajando a una velocidad c en un medio uniforme
- Desplazamientos axiales de una barra elástica.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Es una ecuación **hiperbólica de segundo orden**.

c es una constante asociada a la velocidad de propagación de la onda. Para el caso de la cuerda tensada, $c^2 = T/\rho$ donde T es la tensión aplicada en los extremos y ρ es la densidad de la cuerda.

Necesita **dos condiciones de borde** (posición de ambos extremos) y **dos condiciones iniciales** (posición y velocidad).

Solución numérica de la ecuación de onda

FCEN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Esquema explícito

Se aproximan las derivadas parciales por fórmulas centrales de orden $O(h^2)$ y $O(t^2)$.

$$\frac{\partial^2 u_{(xi,ti)}}{\partial t^2} \approx \frac{u_i^{t-1} - 2u_i^t + u_i^{t+1}}{(\Delta t)^2}$$

$$\frac{\partial^2 u_{(x,t)}}{\partial x^2} \approx \frac{u_{i-1}^t - 2u_i^t + u_{i+1}^t}{(\Delta x)^2}$$

$\longrightarrow$

$$\frac{u_i^{t-1} - 2u_i^t + u_i^{t+1}}{(\Delta t)^2} = c^2 \frac{u_{i-1}^t - 2u_i^t + u_{i+1}^t}{(\Delta x)^2}$$

$$u_i^{t-1} - 2u_i^t + u_i^{t+1} = \left(c^2 \frac{(\Delta t)^2}{(\Delta x)^2}\right)\left(u_{i-1}^t - 2u_i^t + u_{i+1}^t\right)$$

$$u_i^{t+1} = r^2\left(u_{i-1}^t - 2u_i^t + u_{i+1}^t\right) + 2u_i^t - u_i^{t-1}$$

Fórmula computacional

$$\boxed{u_i^{t+1} = r^2 u_{i-1}^t + 2\left(1 - r^2\right) u_i^t + r^2 u_{i+1}^t - u_i^{t-1}}$$

$$r^2 = c^2 \frac{(\Delta t)^2}{(\Delta x)^2}$$

Solución numérica de la ecuación de onda

FCEN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Luego se plantea la ecuación discreta en cada punto interior del espacio y se busca la solución conjunta en todo el espacio.

$$\begin{pmatrix} u_2^{t+1} \\ u_3^{t+1} \\ u_4^{t+1} \\ \vdots \\ u_{n-1}^{t+1} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 2(1-r^2) & r^2 & 0 & \dots & 0 \\ r^2 & 2(1-r^2) & r^2 & \dots & 0 \\ 0 & r^2 & 2(1-r^2) & r^2 & \dots \\ . & . & \vdots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & r^2 & 2(1-r^2) \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_2^{t} \\ u_3^{t} \\ u_4^{t} \\ \vdots \\ u_{n-1}^{t} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u_2^{t-1} \\ u_3^{t-1} \\ u_4^{t-1} \\ \vdots \\ u_{n-1}^{t-1} \end{pmatrix} + r^2 \begin{pmatrix} u_1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{U}^{t+1} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{U}^{t} - \mathbf{U}^{t-1} + r^2 \mathbf{b}$$

Solución nueva   Solución actual   Solución anterior

Solución numérica de la ecuación de onda

FCEN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Inicio del método

Por lo general se cuenta con la posición inicial $\mathbf{f(x)}$ y la velocidad inicial $\mathbf{g(x)}$. Realizando una expansión en serie de Taylor se pueden determinar los valores previos al inicio.

$$u(x_i,1)=u(x_i,0)+\frac{\partial u_{(x_i,0)}}{\partial t}\Delta t+\frac{\partial^2 u_{(x_i,0)}}{\partial t^2}\frac{(\Delta t)^2}{2}+O(\Delta t^3)$$

$$u(x_i,1)=f(x_i)+g(x_i)\Delta t+c^2\frac{(\Delta t)^2}{2}\frac{\partial^2 u_{(x_i,0)}}{\partial x^2}+O(\Delta t^3)$$

$$u(x_i,1)=f(x_i)+g(x_i)\Delta t+\frac{r^2}{2}\left(u_{(xi-1,0)}-2u_{(xi,0)}+u_{(xi+1,0)}\right)+O(\Delta t^3)$$

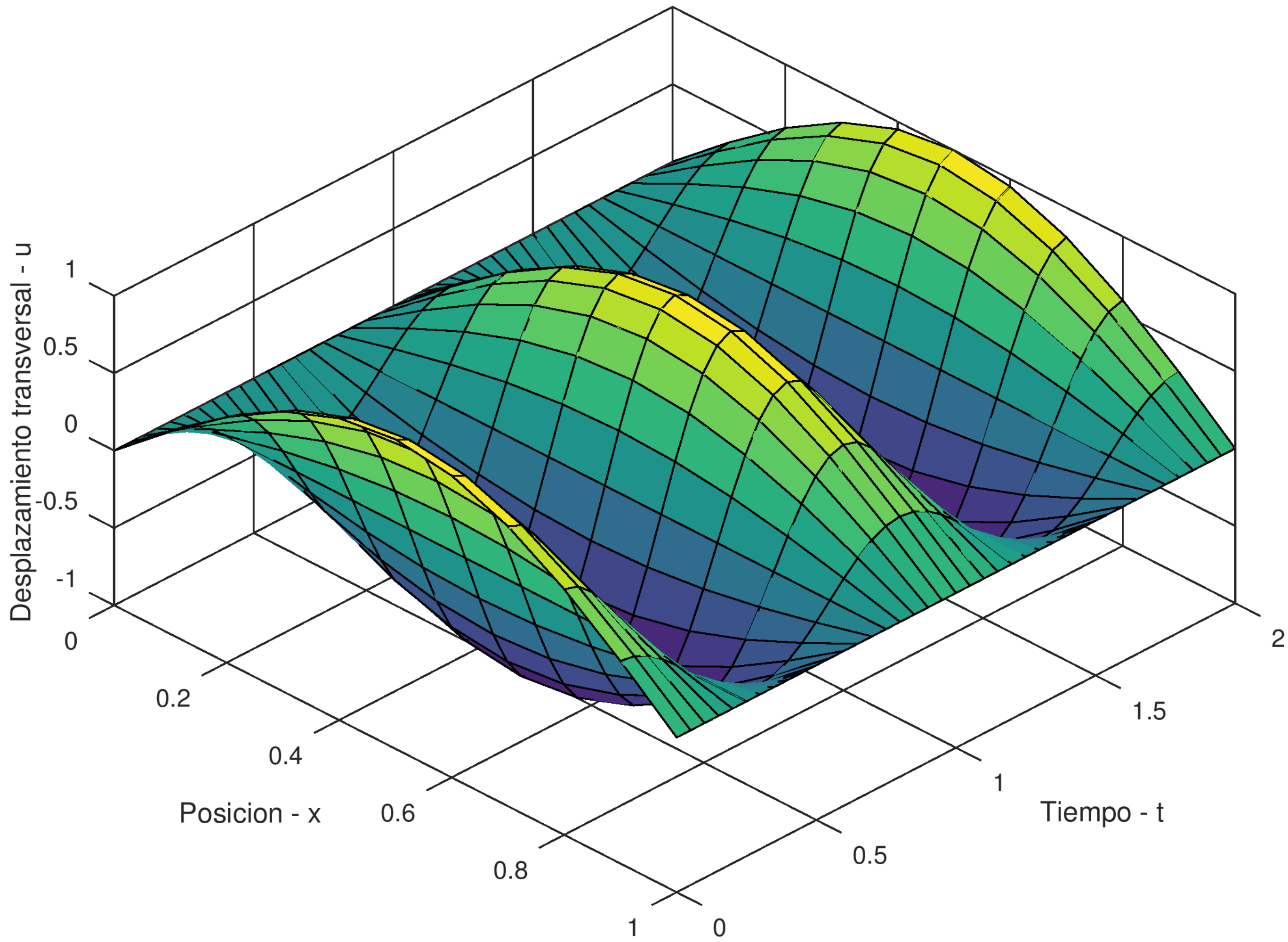
$$u(x_i,1)=(1-r^2)f(x_i)+g(x_i)\Delta t+\frac{r^2}{2}\left(u_{(xi-1,0)}+u_{(xi+1,0)}\right)+O(\Delta t^3)$$

Ejemplo: Ecuación de onda

```
function [u]=onda1D(n,tfinal)
  c=2;  %constante onda
  dx=1/(n-1) %paso espacial
  r=1
  dt=dx/c %paso temporal
  nt=tfinal/dt; %numero de pasos
  u=zeros(n,nt);
  x=[0:dx:1]'; %discretizacion espacial
  #condiciones iniciales
  f=sin(pi*x)+sin(2*pi*x); %posiciones iniciales
  g=0*x; %velocidades iniciales
  u(:,1)=f;
  u(2:n-1,2)=(1-r^2)*f(2:n-1,1)+dt*g(2:n-1,1)+0.5*r^2*(f(1:n-2,1)+f(3:n,1));
  #condiciones de borde
  u1=0;
  un=0;
  [A,b]=matinit(n,r,u1,un); #Inicializo matriz de coeficientes
  for i=2:nt
    u(2:end-1,i+1)=A*u(2:end-1,i)-u(2:end-1,i-1)+b;
  endfor
 endfunction
```

```
function [A,b]=matinit(n,r,u1,un)
  A=zeros(n-2);
  A(1,1:2)=[2*(1-r^2),r^2];
  A(end,end-1:end)=[r^2,2*(1-r^2)];
  for fila=2:n-3
    A(fila,fila-1:fila+1)=[r^2,2*(1-r^2),r^2];
  endfor
  b=zeros(n-2,1);
  b(1,1)=u1;
  b(end,1)=un;
  b=r^2*b;
  endfunction
```

Ejemplo: Ecuación de onda



Ecuación del calor

La ecuación del calor modela un proceso de difusión.

Algunos ejemplos que se pueden modelar con esta ecuación son:

- Distribución de temperaturas en un alambre aislado con distintas temperaturas en sus extremos.
- Distribución radial de temperaturas en un caño cuyas paredes se encuentran a distintas temperaturas.
- Distribución de velocidad dentro de una capa límite.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Es una ecuación **parabólica** de **segundo orden**.

α es una constante asociada a la conductividad térmica o la viscosidad de un fluido.

Se necesitan **dos condiciones de borde** (posición de ambos extremos) y **una condición inicial** (posición).

Solución numérica de la ecuación del calor

El esquema explícito es **condicionalmente estable** (debe cumplir $0 < \alpha \Delta t / (\Delta x^2) < 1/2$).

Para evitar este problema se emplean estrategias implícitas como por ejemplo **Crank-Nicholson.**

Primero se aproximan las derivadas parciales en el **espacio por la fórmula central** y la derivada **temporal por la fórmula hacia adelante**.

$$\frac{\partial u_{(xi,ti)}}{\partial t} \approx \frac{u_i^{t+1} - u_i^t}{(\Delta t)}, \frac{\partial^2 u_{(x,t)}}{\partial x^2} \approx \frac{u_{i-1}^t - 2u_i^t + u_{i+1}^t}{(\Delta x)^2}$$

Luego al reemplazar las aproximaciones en la ecuación del calor, la derivada espacial se reemplaza por la suma de dos derivadas, **evaluadas en distintos tiempos**.

$$\frac{u_i^{t+1} - u_i^t}{(\Delta t)} = \frac{\alpha}{2(\Delta x)^2}\left(u_{i-1}^{t+1} - 2u_i^{t+1} + u_{i+1}^{t+1}\right) + \frac{\alpha}{2(\Delta x)^2}\left(u_{i-1}^t - 2u_i^t + u_{i+1}^t\right)$$

$$2\left(u_i^{t+1} - u_i^t\right) - \alpha\frac{(\Delta t)}{(\Delta x)^2}\left(u_{i-1}^{t+1} - 2u_i^{t+1} + u_{i+1}^{t+1}\right) = \alpha\frac{(\Delta t)}{(\Delta x)^2}\left(u_{i-1}^t - 2u_i^t + u_{i+1}^t\right)$$

$$\boxed{2(1+r)u_i^{t+1} - r u_{i-1}^{t+1} - r u_{i+1}^{t+1} = 2(1-r)u_i^t + r u_{i-1}^t + r u_{i+1}^t} \qquad r = \alpha\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$$

Solución numérica de la ecuación del calor

FCEN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Se plantea la ecuación discreta en cada punto interior del espacio y se forma un SEL.

$$\begin{bmatrix} 2(1+r) & -r & 0 & \dots & 0 \\ -r & 2(1+r) & -r & \dots & 0 \\ 0 & -r & 2(1+r) & -r & \dots \\ . & . & \vdots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & -r & 2(1+r) \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_2^{t+1} \\ u_3^{t+1} \\ u_4^{t+1} \\ \vdots \\ u_{n-1}^{t+1} \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} u_3^t + u_1 \\ u_4^t + u_2^t \\ u_5^t + u_3^t \\ \vdots \\ u_{n-1}^t + u_n \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} u_1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{U}^{t+1} = r\,\mathbf{U}^t + r\,\mathbf{b}$$

En este caso **se debe resolver un SEL para avanzar en el tiempo.**

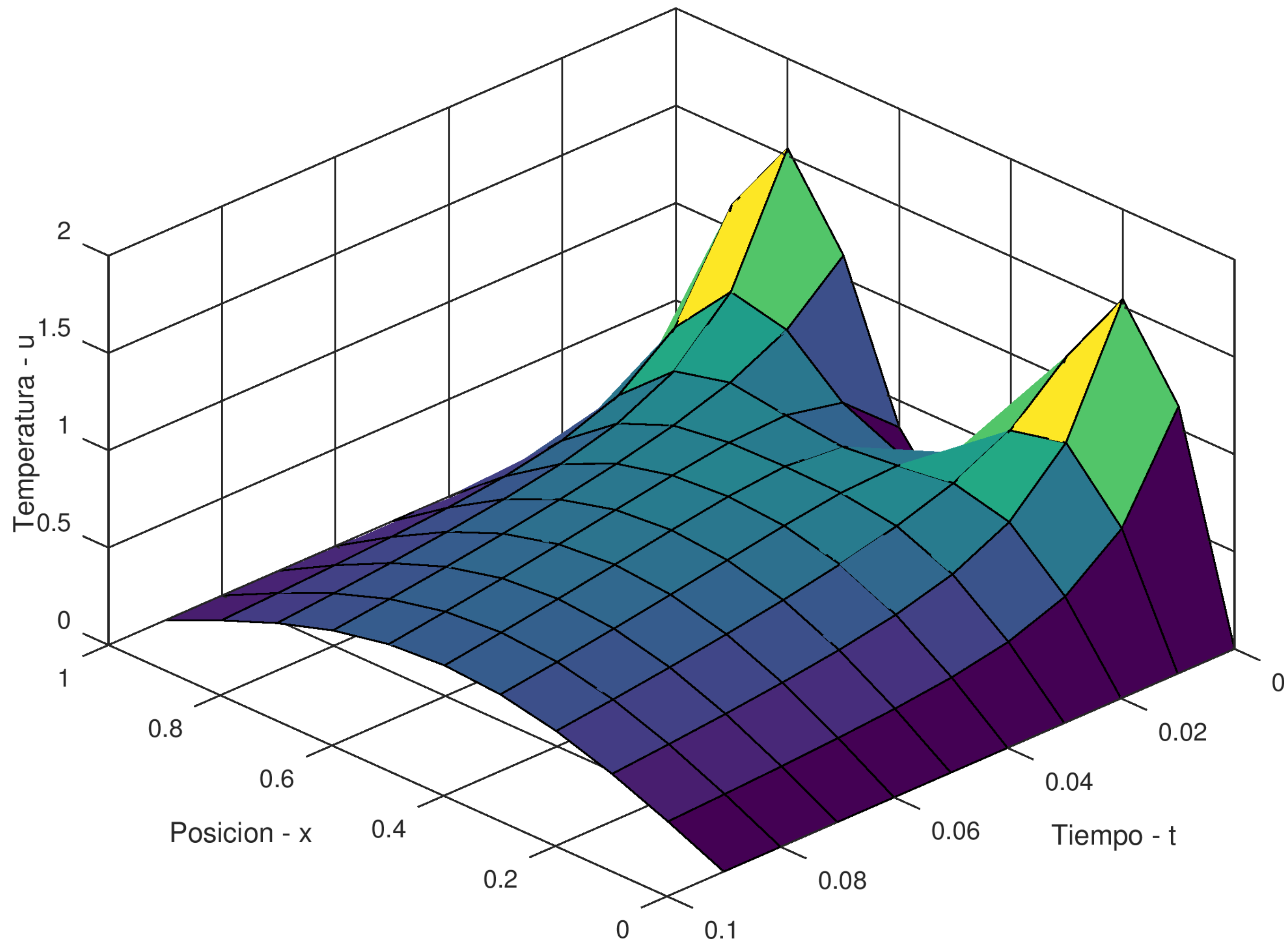
Requiere más esfuerzo de cómputo que un método explícito pero **tiene la estabilidad garantizada**. Esta es una propiedad de los métodos implícitos.

Ejemplo: Ecuación del calor

```
function [u]=onda1D(n,tfinal)
  alfa=1;  %constante onda
  dx=1/(n-1) %paso espacial
  r=1
  dt=r*dx^2/alfa %paso temporal
  nt=ceil(tfinal/dt) %numero de pasos
  u=zeros(n,nt);
  x=[0:dx:1]'; %discretizacion espacial
   #condiciones iniciales
  f=sin(pi*x)+sin(3*pi*x); %posiciones iniciales
  u(:,1)=f;
   #condiciones de borde
  u1=0;
  un=0;
  [A,b]=matinit(n,r,u1,un); #Inicializo matriz de coeficientes
  t(1)=0;
  for i=1:nt-1
    u(2:end-1,i+1)=A\(r*(u(3:end,i)+u(1:end-2,i))+b);
    t(i+1)=i*dt;
  endfor
 endfunction
```

```
function [A,b]=matinit(n,r,u1,un)
  A=zeros(n-2);
  A(1,1:2)=[2*(1+r),-r];
  A(end,end-1:end)=[-r,2*(1+r)];
  for fila=2:n-3
    A(fila,fila-1:fila+1)=[-r,2*(1+r),-r];
  endfor
  b=zeros(n-2,1);
  b(1,1)=u1;
  b(end,1)=un;
  b=r*b;
  endfunction
```

Ejemplo: Ecuación del calor



Ecuación de laplace

FCEN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

La ecuación de Laplace representa problemas potenciales.

Algunos ejemplos que se pueden modelar con esta ecuación son:

- Campo electrostático
- Campo de velocidades para fluido ideal (sin efectos viscosos)
- Campo gravitacional
- Conducción estacionaria del calor

$$\nabla^2 u(x,y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Es una ecuación **elíptica** de **segundo orden**.

Se necesitan **cuatro condiciones de borde** (todo el contorno).

Solución numérica de la ecuación de laplace

Al ser una ecuación elíptica, representa un problema de equilibrio y no posee problemas de estabilidad. Se aproximan la derivada parciales en el espacio por la **fórmula central en ambas direcciones**.

$$\frac{\partial^2 u_{(x,y)}}{\partial x^2} \approx \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{(\Delta x)^2}, \frac{\partial^2 u_{(x,y)}}{\partial y^2} \approx \frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{(\Delta y)^2}$$

Se reemplazan las aproximaciones en la ecuación de laplace y se obtiene la “roseta” o “molécula” de cálculo.

$$\frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{(\Delta x)^2} + \frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{(\Delta y)^2} = 0$$

Se acostumbra considerar que Δx y Δy son iguales.

$$\boxed{u_{i-1,j} - 4u_{i,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1} = 0}$$

Solución numérica de la ecuación de laplace

FCEN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Se plantea la ecuación discreta en cada punto interior del espacio y se forma un SEL.

En este caso se debe resolver un SEL un única vez. $\mathbf{A} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{b}$

Ver código en libro de Mathews-Fink