Unidad 4: Interpolación y aproximación de funciones

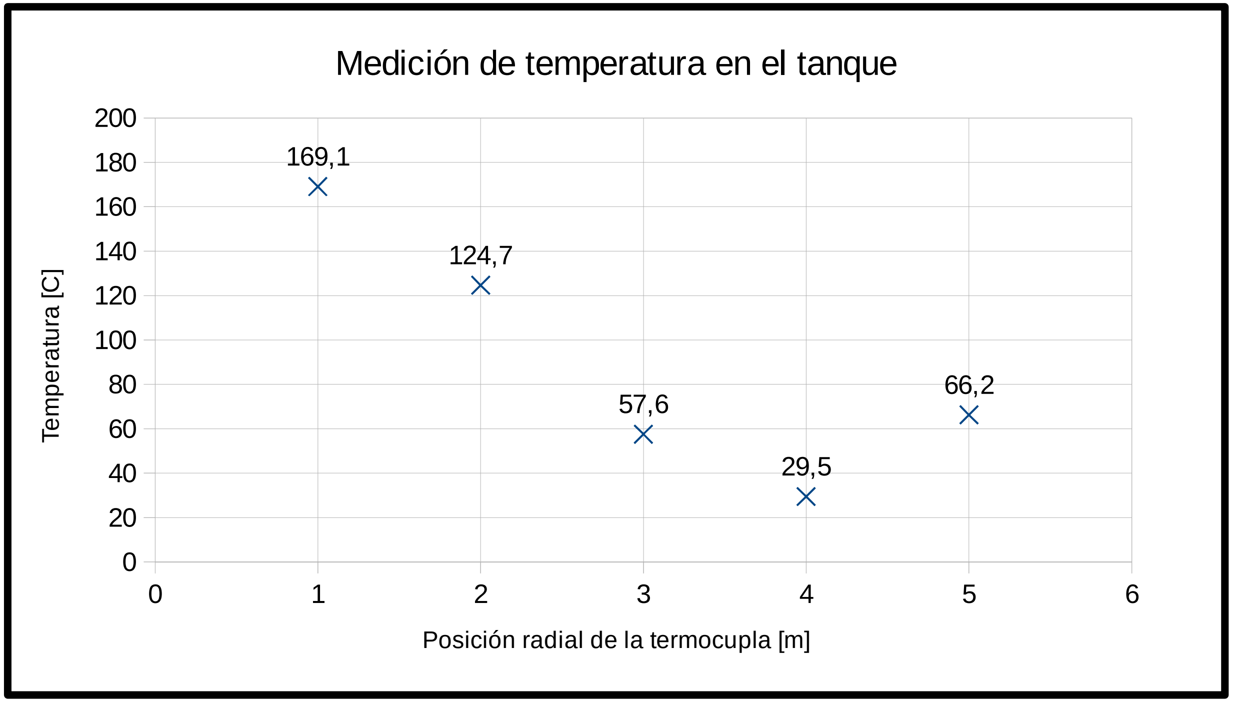
FCEN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Temario

- Interpolación y aproximación de funciones
- Interpolación polinomial directa
- Interpolación por polinomios de Lagrange
- Interpolación por polinomios de Newton
- Ajuste de funciones por mínimos cuadrados

Interpolación y aproximación de funciones

FCEN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES



Posición de la termocupla	Temp
[m]	[C]
1	169,1
2	124,7
3	57,6
4	29,5
5	66,2

¿Cuál es el máximo valor alcanzado por el experimento?

¿La temperatura alrededor de la posición 1m, es menor?

Interpolación y aproximación de funciones

FCEN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

El objetivo es encontrar una función analítica que represente los datos.
Se propone una representación en forma de combinación lineal de funciones base conocidas y linealmente independientes $\phi_k(x)$

$$y=f(x)\approx P_m(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k \phi_k(x)$$

$$f(x)-P_m(x)=r(x)$$

Se evalúa el residuo en cada dato (x_i,y_i)

$$r(x_i)=f(x_i)-P_m(x_i)$$

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_{n+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{n+1} \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} P_{m1} \\ P_{m2} \\ \vdots \\ P_{mn+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n+1} \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{n} a_k \phi_k(x_1) \\ \sum_{k=0}^{n} a_k \phi_k(x_2) \\ \vdots \\ \sum_{k=0}^{n} a_k \phi_k(x_{n+1}) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n+1} \end{pmatrix}-\begin{bmatrix} \phi_0(x_1) & \phi_1(x_1) & \dots & \phi_n(x_1) \\ \phi_0(x_2) & \phi_1(x_2) & \dots & \phi_n(x_2) \\ & & \vdots & \\ \phi_0(x_n) & \phi_1(x_n) & \dots & \phi_n(x_n) \end{bmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{y}-\Phi\cdot\boldsymbol{a}$$

Interpolación y aproximación de funciones

FCEN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Proceso de Interpolación

Se exige que el residuo sea cero en cada punto conocido y se obtiene un SEL, donde las incógnitas son los coeficientes a_k.

$$\begin{bmatrix} \phi_0(x_1) & \phi_1(x_1) & \dots & \phi_n(x_1) \\ \phi_0(x_2) & \phi_1(x_2) & \dots & \phi_n(x_2) \\ & & \vdots & \\ \phi_0(x_{n+1}) & \phi_1(x_{n+1}) & \dots & \phi_n(x_{n+1}) \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n+1} \end{pmatrix}$$

$$\Phi \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{y}$$

Proceso de aproximación por mínimos cuadrados

Se exige que el cuadrado de la norma del residuo sea la mínima posible y se obtiene otro SEL para los coeficientes incógnita a_k.

$$mín\|\boldsymbol{r}\|_2^2 \rightarrow \Phi^T \Phi \cdot \boldsymbol{a} = \Phi^T \cdot \boldsymbol{y}$$

Una vez determinados los coeficientes a_k, la función interpolante o aproximante es la siguiente

$$y \approx \sum_{k=0}^{n} a_k \phi_k(x)$$

Interpolación polinomial directa

Se utilizan como base potencias de x (polinomios elementales)

$$\phi_0(x)=x^0, \phi_1(x)=x^1, \phi_2(x)=x^2, \ldots, \phi_n(x)=x^n$$

$$Base=\begin{bmatrix}1 & x & x^2 & \ldots & x^n\end{bmatrix}$$

El SEL a resolver es el siguiente

$$\begin{pmatrix}P_m(x_1)\\P_m(x_2)\\\vdots\\P_m(x_{n+1})\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}1 & x_1 & \ldots & x_1^n\\1 & x_2 & \ldots & x_2^n\\ & & \vdots & \\1 & x_{n+1} & \ldots & x_{n+1}^n\end{bmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a_0\\a_1\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_{n+1}\end{pmatrix}$$

$$y\approx\sum_{k=0}^{n}a_k\phi_k(x)=a_0\cdot 1+a_1\cdot x+a_2\cdot x^2+\ldots+a_n\cdot x^n$$

Ejemplo

Posición de la termocupla	Temp
[m]	[C]
1	169,1
2	124,7
3	57,6
4	29,5
5	66,2

5 puntos, entonces se define un polinomio de grado 4

$$P_4(x)=a_0\cdot 1+a_1\cdot x+a_2\cdot x^2+a_3\cdot x^3+a_4\cdot x^4$$

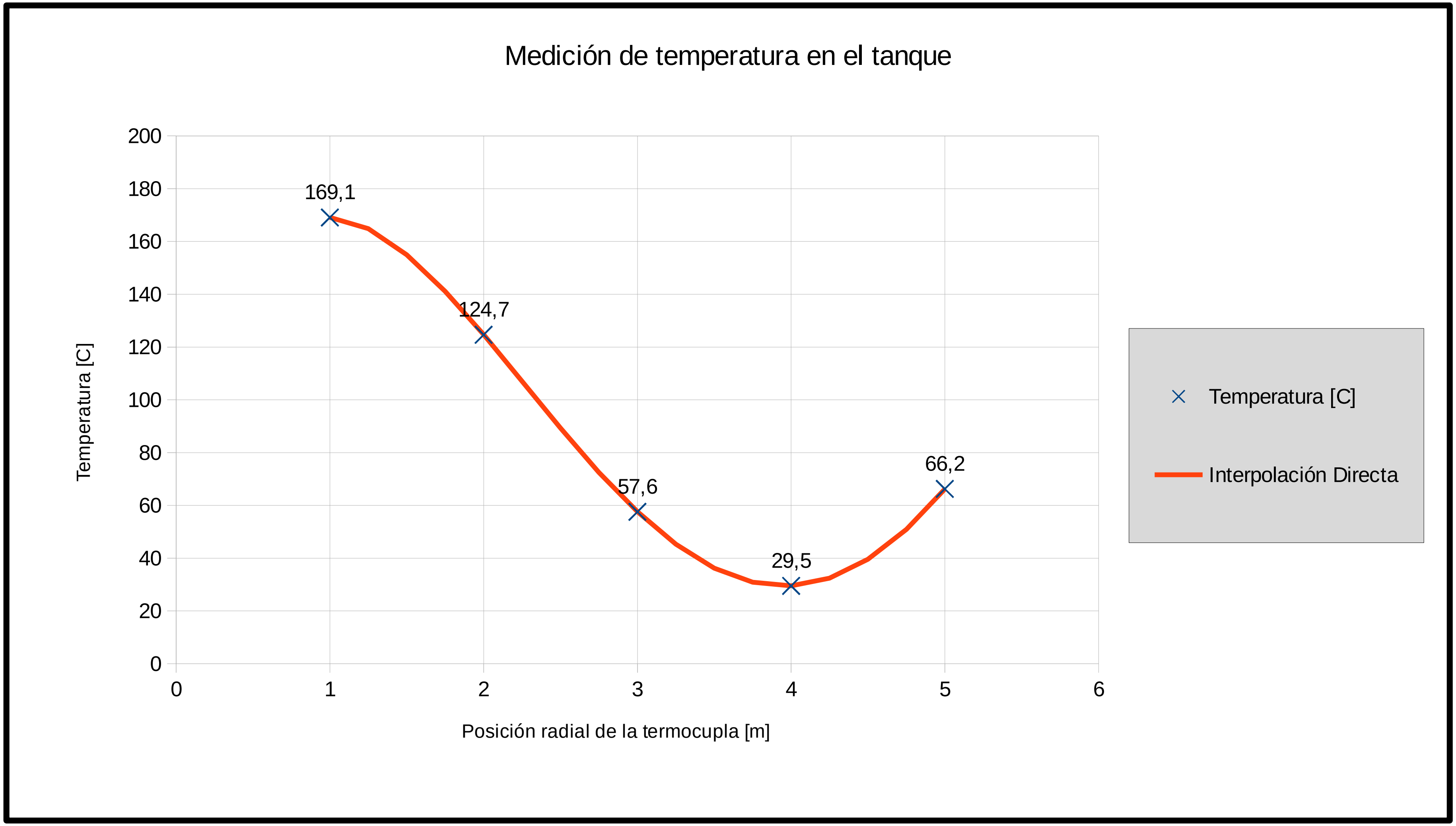
Los coeficientes se encuentran resolviendo el SEL

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & x_1^4 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & x_2^4 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 & x_3^4 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 & x_4^4 \\ 1 & x_5 & x_5^2 & x_5^3 & x_5^4 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1^2 & 1^3 & 1^4 \\ 1 & 2 & 2^2 & 2^3 & 2^4 \\ 1 & 3 & 3^2 & 3^3 & 3^4 \\ 1 & 4 & 4^2 & 4^3 & 4^4 \\ 1 & 5 & 5^2 & 5^3 & 5^4 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 169{,}1 \\ 124{,}7 \\ 57{,}6 \\ 29{,}5 \\ 66{,}2 \end{pmatrix} \quad \text{cuya solución es } \boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 93{,}2 \\ 177{,}5583 \\ -125{,}4042 \\ 25{,}2417 \\ -1{,}4958 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{P_4(x)=93{,}2+177{,}5583\,x-125{,}4042\,x^2+25{,}2417\,x^3-1{,}4958\,x^4}$$

Ejemplo



Medición de temperatura en el tanque
200
180
160
140
120
100
80
60
40
20
0
Temperatura [C]
169,1
124,7
57,6
29,5
66,2
0
1
2
3
4
5
6
Posición radial de la termocupla [m]
Temperatura [C]
Interpolación Directa

Interpolación por polinomios de Lagrange

Se utilizan como base los polinomios de Lagrange, definidos por:

$$\phi_k(x) = l_k(x) = \prod_{i=1, i\neq k}^{i=n+1} \frac{(x - x_i)}{(x_k - x_i)}$$

$$l_k(x_k) = \prod_{i=1, i\neq k}^{i=n+1} \frac{(x_k - x_i)}{(x_k - x_i)} = 1$$

$$l_k(x_i) = \prod_{i=1, i\neq k}^{i=n+1} \frac{(x_i - x_i)}{(x_k - x_i)} = 0$$

$$Base = \begin{bmatrix} l_0(x) & l_1(x) & \dots & l_n(x) \end{bmatrix}$$

El SEL a resolver es el siguiente

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n+1} \end{pmatrix}$$

Su solución es directa! $a_k = y_{k+1}$

$$y \approx \sum_{k=0}^{n} a_k \phi_k(x) = y_1 \cdot l_0(x) + y_2 \cdot l_1(x) + y_3 \cdot l_2(x) + \dots + y_{n+1} \cdot l_n(x)$$

Ejemplo 3

5 puntos, entonces se define un polinomio de grado 4

$$P_4(x)=a_0\cdot 1+a_1\cdot x+a_2\cdot x^2+a_3\cdot x^3+a_4\cdot x^4$$

$$l_0(x)=\frac{(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)(x_1-x_5)}=\frac{(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(-1)(-2)(-3)(-4)}$$

$$l_1(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)(x_2-x_5)}=\frac{(x-1)(x-3)(x-4)(x-5)}{(1)(-1)(-2)(-3)}$$

$$l_2(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)(x-x_5)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)(x_3-x_5)}=\frac{(x-1)(x-2)(x-4)(x-5)}{(2)(1)(-1)(-2)}$$

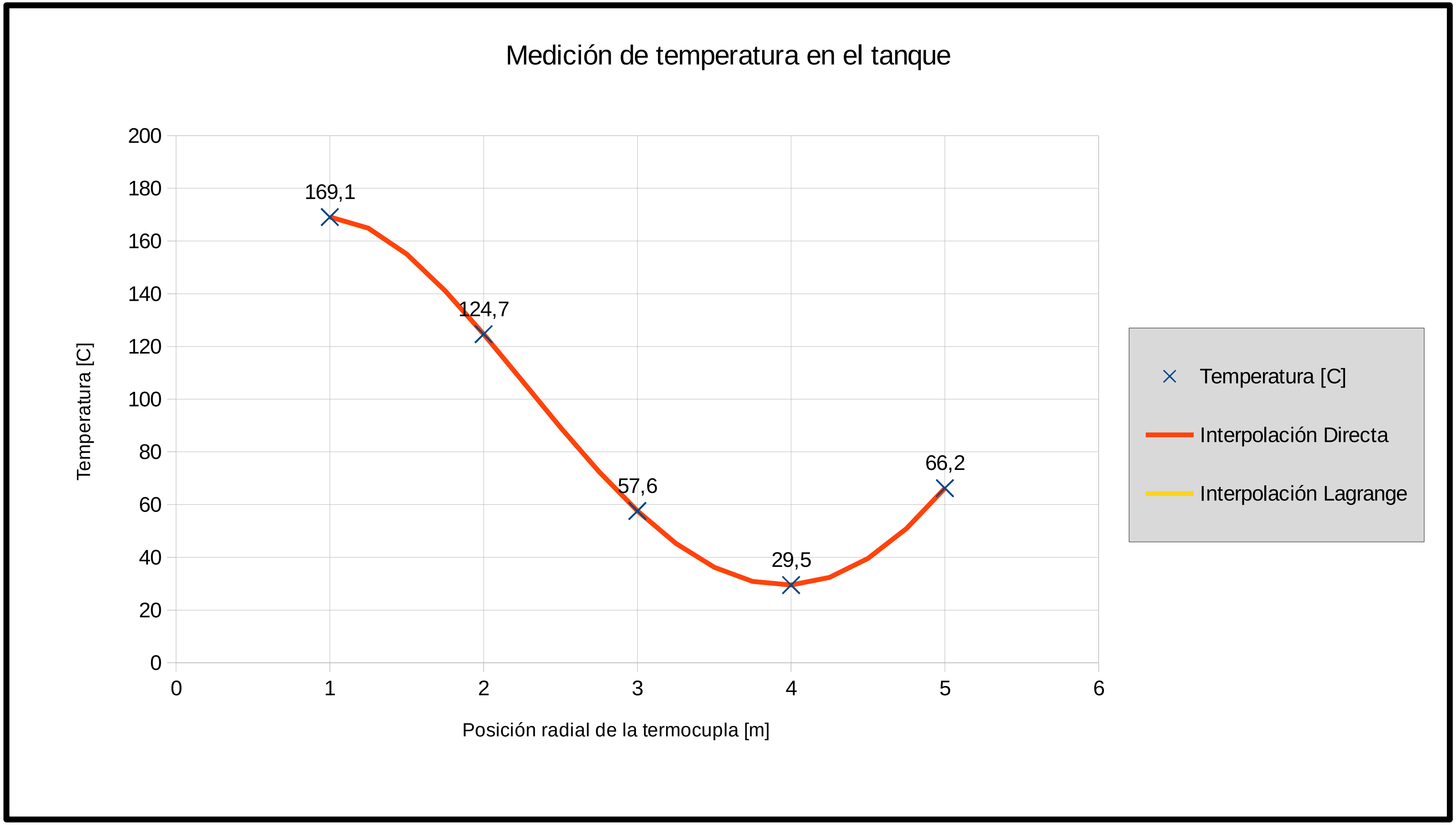
$$l_3(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_5)}{(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)(x_1-x_5)}=\frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-5)}{(3)(2)(1)(-1)}$$

$$l_4(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_5-x_1)(x_5-x_2)(x_5-x_3)(x_5-x_4)}=\frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{(4)(3)(2)(1)}$$

$$\boxed{P_4(x)=169{,}1\cdot l_0(x)+124{,}7\cdot l_1(x)+57{,}6\cdot l_2(x)+29{,}5\cdot l_3(x)+66{,}2\cdot l_4(x)}$$

Posición de la termocupla	Temp
[m]	[C]
1	169,1
2	124,7
3	57,6
4	29,5
5	66,2

Ejemplo 3



Medición de temperatura en el tanque
200
180
160
140
120
100
80
60
40
20
0
Temperatura [C]
169,1
124,7
57,6
29,5
66,2
0
1
2
3
4
5
6
Posición radial de la termocupla [m]
Temperatura [C]
Interpolación Directa
Interpolación Lagrange

Interpolación por polinomios de Newton

Se utilizan como base los polinomios de Newton, definidos por:

$$\begin{aligned} n_0(x) &= 1 \\ n_i(x) &= n_{i-1}(x)(x-x_{i-1}) \end{aligned} \rightarrow \begin{aligned} n_0(x) &= 1 \\ n_1(x) &= 1(x-x_0) \\ n_2(x) &= 1(x-x_0)(x-x_1) \end{aligned}$$

$$Base = \begin{bmatrix} n_0(x) & n_1(x) & \dots & n_n(x) \end{bmatrix}$$

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + a_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) + \dots$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & n_1(x_1) & 0 & \dots & 0 \\ 1 & n_1(x_2) & n_2(x_2) & \dots & 0 \\ & & & \vdots & \\ 1 & n_1(x_n) & n_2(x_n) & \dots & n_n(x_n) \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n+1} \end{pmatrix}$$

Queda un sistema triangular inferior.

Interpolación por polinomios de Newton

FCEN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

El SEL se resuelve con sustitución hacia adelante y los coeficientes resultantes se conocen como las "**diferencias divididas**" de Newton

$$a_0 = y_0$$

$$a_1 = \frac{(y_1 - y_0)}{(x_1 - x_0)} = \Delta y_1$$

$$a_2 = \frac{\dfrac{(y_2 - y_0)}{(x_2 - x_0)} - \dfrac{(y_1 - y_0)}{(x_1 - x_0)}}{(x_2 - x_1)} = \frac{\Delta y_2 - \Delta y_1}{(x_2 - x_1)} = \Delta^2 y_2$$

$$a_3 = \frac{\Delta^2 y_3 - \Delta^2 y_2}{(x_3 - x_2)} = \Delta^3 y_3$$

Interpolación por polinomios de Newton

El proceso de cálculo se puede ordenar de la siguiente forma

x_0	y_0				
x_1	y_1	Δy_1			
x_2	y_2	Δy_2	$\Delta^2 y_2$		
x_3	y_3	Δy_3	$\Delta^2 y_3$	$\Delta^3 y_3$	
x_4	y_4	Δy_4	$\Delta^2 y_4$	$\Delta^3 y_4$	$\Delta^4 y_4$

Colocar pares de datos (x,y) en primeras dos columnas.

Calcular los Δy usando de "pivot" el par de datos (x_0,y_0)

Calcular los $\Delta^2 y$ usando de "pivot" el par de datos $(x_1,\Delta y)$

Repetir (Calcular los $\Delta^n y$ usando de "pivot" el par de datos $(x_{n-1},\Delta^{n-1}y)$)

Los **coeficientes** son los componentes de la **diagonal**

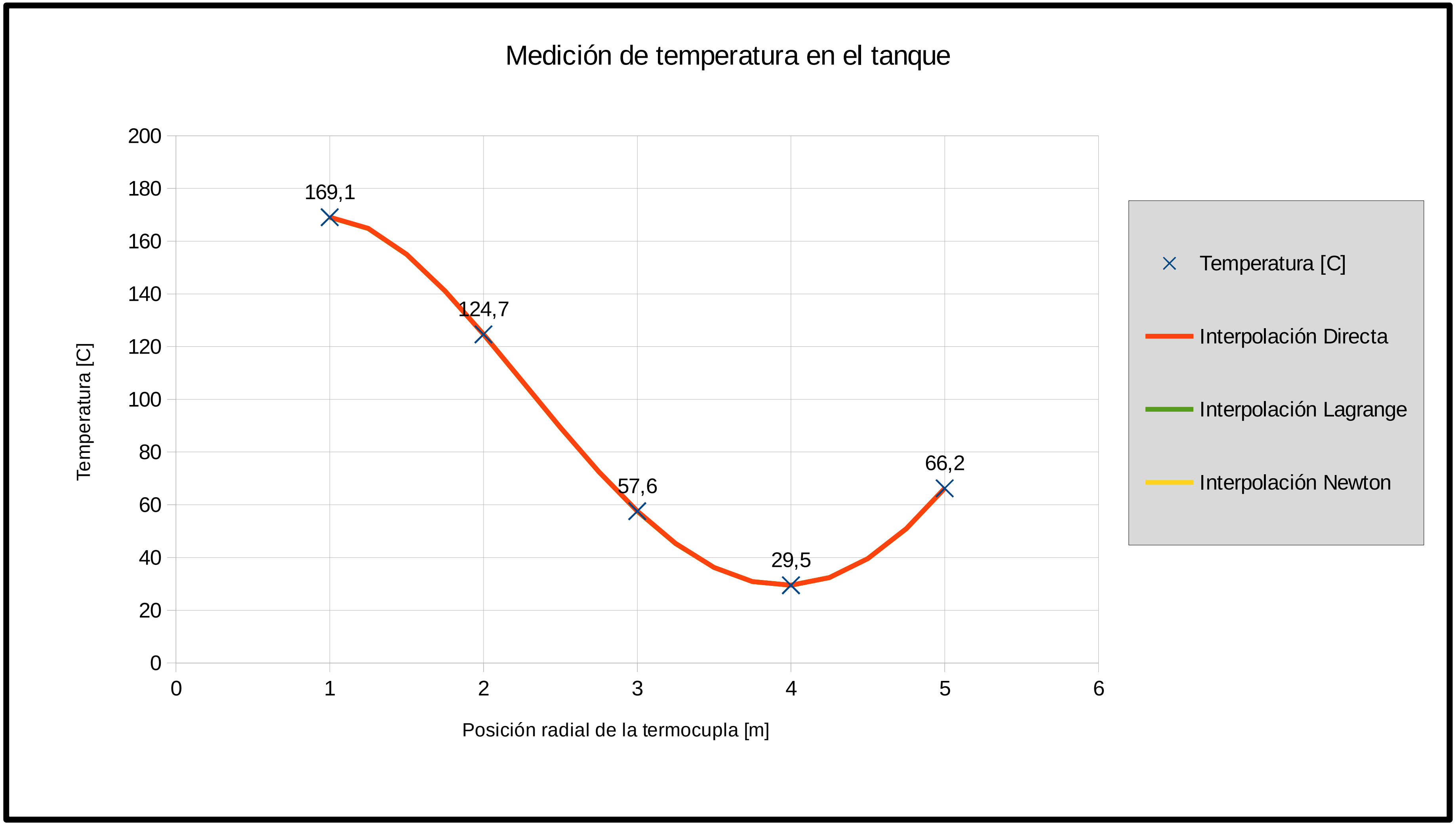
Ejemplo

Posición	Temp	Δy	Δ^2y	Δ^3y	Δ^4y
[m]	[C]				
1	169,1				
2	124,7	-44,4311			
3	57,6	-55,7661	-11,3350		
4	29,5	-46,5370	-1,0529	10,2821	
5	66,2	-25,7129	6,2394	8,7872	-1,4949

$$n_0(x)=1$$
$$n_1(x)=1(x-1)$$
$$n_2(x)=n_1(x)(x-2)$$
$$n_3(x)=n_2(x)(x-3)$$
$$n_4(x)=n_3(x)(x-4)$$

$$\boxed{P_4(x)=169{,}1\cdot n_0(x)-44{,}4311\cdot n_1(x)-11{,}335\cdot n_2(x)+10{,}2821\cdot n_3(x)-1{,}4949\cdot n_4(x)}$$

Ejemplo 2

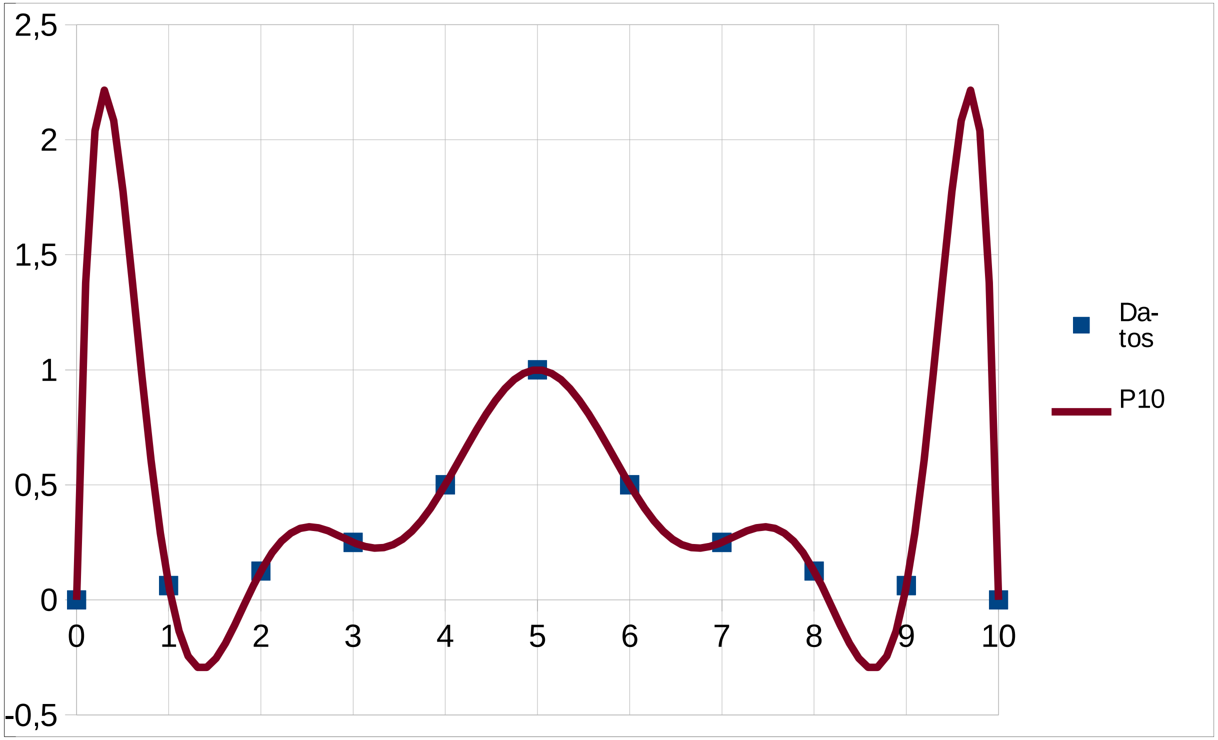


Medición de temperatura en el tanque
200
180
160
140
120
100
80
60
40
20
0
Temperatura [C]
0
1
2
3
4
5
6
Posición radial de la termocupla [m]
169,1
124,7
57,6
29,5
66,2
Temperatura [C]
Interpolación Directa
Interpolación Lagrange
Interpolación Newton

Interpolación polinomial

Una de las desventajas de las interpolaciones polinomiales vistas es que para **polinomios de órdenes altos** (>4) se **producen oscilaciones** que por lo general no son realistas. Este efecto se llama **fenómeno de Runge** y muestra una falta de **convergencia** a medida que N tiene a infinito.

x	y
0	0
1	0,0625
2	0,125
3	0,25
4	0,5
5	1
6	0,5
7	0,25
8	0,125
9	0,0625
10	0



Ajuste por mínimos cuadrados

Cuando se ajusta un conjunto de datos, **se aproxima la función desconocida** con otra que puede ser una función algebraica, exponencial, logarítmica, etc.

Al realizar la aproximación, **la función aproximante no pasa necesariamente por los puntos**.

El método es **muy útil para identificar líneas de tendencia** en nubes de puntos.

Sea f una función genérica con m parámetros: $f(x) = f(x; a_1, a_2, \ldots, a_m)$

El método busca el mejor ajuste de los parámetros de la función respecto a los datos

Se observa la función del error cuadrático :

$$S(a_1, a_2, \ldots, a_m) = \sum_{i=1}^{n} [r_i]^2, \text{donde } r_i = y_i - f(x_i) \text{ se denomina residuo}$$

Y se minimiza para cada parámetro, es decir, $\dfrac{\partial S}{\partial a_k} = 0, k = 1, 2, \ldots, m$

En general se buscan ajustes con menos parámetros (m) que cantidad de puntos disponibles (n). Si m=n tendríamos una interpolación.

Ajuste por mínimos cuadrados

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Aplicación 1:

Ajuste de una recta (Regresión lineal)

$$f(x)=a+bx$$

$$S(a,b)=\sum_{i=1}^{n}(y_i-a-bx_i)^2$$

$$\frac{\partial S}{\partial a}=\sum_{i=1}^{n}2(y_i-a-bx_i)(-1)=2\left(-\sum_{i=1}^{n}y_i+na+b\sum_{i=1}^{n}x_i\right)=0$$

$$\frac{\partial S}{\partial b}=\sum_{i=1}^{n}2(y_i-a-bx_i)(-x_i)=2\left(-\sum_{i=1}^{n}x_iy_i+a\sum_{i=1}^{n}x_i+b\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)=0$$

Definiendo: $\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i,\ \bar{y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i$

se obtienen $a+\bar{x}b=\bar{y},\ a\bar{x}+\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)b=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_iy_i \rightarrow b=\frac{\sum y_i(x_i-\bar{x})}{\sum x_i(x_i-\bar{x})},\ a=\bar{y}-\bar{x}b$

Ajuste por mínimos cuadrados

En forma matricial

$$mín\|\boldsymbol{r}\|_2^2 \rightarrow \Phi^T \Phi \cdot \boldsymbol{a} = \Phi^T \cdot \boldsymbol{y}$$

Ajuste de rectas: se utilizan como base [1,x]

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_{n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ 1 & x_3 \\ & \vdots \\ 1 & x_{n+1} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_{n+1} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n+1} \end{pmatrix}$$

Ajuste de parábolas: se utilizan como base $[1,x,x^2]$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_{n+1} \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \dots & x_{n+1}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \\ & \vdots & \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_{n+1} \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \dots & x_{n+1}^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n+1} \end{pmatrix}$$

Ajuste por mínimos cuadrados

Posición de la termocupla	Temp
[m]	[C]
1	169,1
2	124,7
3	57,6
4	29,5
5	66,2

$$base=[1, seno(x), \cos(x)]$$

$$\phi=\begin{bmatrix} 1 & 0{,}8415 & 0{,}5403 \\ 1 & 0{,}9093 & -0{,}4161 \\ 1 & 0{,}1411 & -0{,}98999 \\ 1 & -0{,}7568 & -0{,}6536 \\ 1 & -0{,}9589 & 0{,}2837 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5{,}0000 & 0{,}1762 & -1{,}2358 \\ 0{,}1762 & 3{,}0471 & 0{,}1592 \\ -1{,}2358 & 0{,}1592 & 1{,}9529 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 447{,}1 \\ 178{,}004 \\ -18{,}056 \end{pmatrix}$$

la solución del SEL es $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix} 100{,}006 \\ 50{,}026 \\ 49{,}961 \end{pmatrix}$

$$\boxed{y \approx 100{,}006 + 50{,}026\, seno(x) + 49{,}961 \cos(x)}$$

Ajuste por mínimos cuadrados