Cálculo II / Elem. de Cálculo II

Cónicas en el plano.

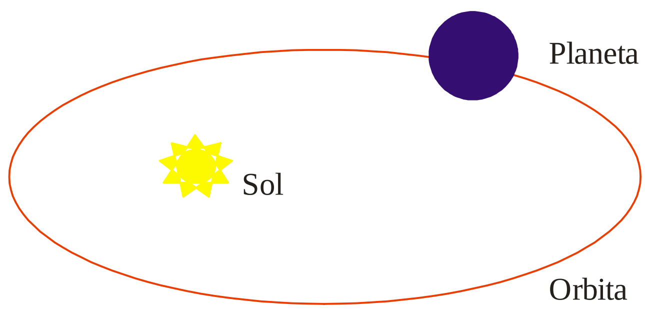
Yanina González. Sebastián Simondi.

La primera definición de sección cónica aparece en Grecia, cerca del año 350 a.C. donde se realizaron estudios elementales sobre las figuras que se obtenían al intersecar un plano perpendicular a la generatriz con un cono circular recto. Pero no fue hasta el año 225 a.C. cuando Apolonio de Perga hizo un estudio completo y lo publicó en ocho libros: Tratado de las cónicas,. Los tres primeros fueron una recopilación sobre el tema incluido en los trabajos de Euclides, Aristarcos y Menechmo. Del cuarto al séptimo libro son resultados inéditos de Apolonio; en el cuarto introduce los nombres de las cónicas: elipse, parábola e hipérbola. El octavo libro se perdió.

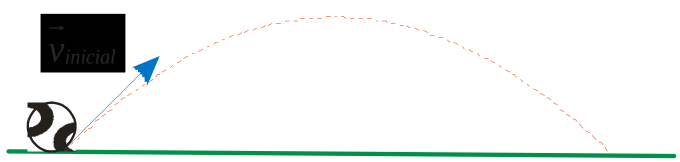
Este tratado sirvió de base para el estudio de la geometría de estas curvas hasta que, en una de las primeras aplicaciones de la geometría analítica, Fermat y Descartes lo retomaron llegando a casi su total estudio.

Las secciones cónicas son importantes pues aparecen en diversas aplicaciones físicas, tecnológicas y en fenómenos naturales.

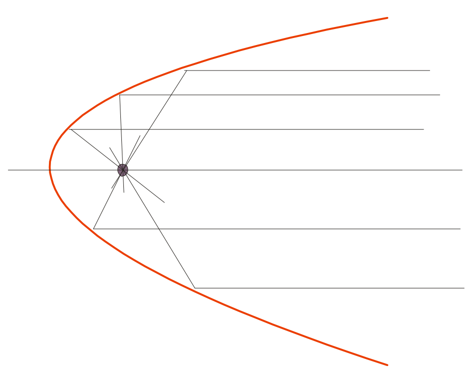
- La Primera Ley de Kepler formula que los planetas se mueven en órbitas elípticas entorno al sol, quien se encuentra sobre uno de los focos de la elipse.



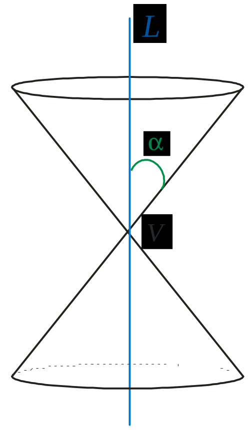
- La órbita que sigue un objeto en un campo gravitacional constante es una parábola. Así, la trayectoria que describe un proyectil que es lanzado con una cierta velocidad inicial, no vertical, es una parábola.



- En las antenas y radares se utilizan las propiedades de las cónicas pues la reflexión de cualquier onda paralela al eje de simetría que incide sobre una superficie parabólica pasa por el foco.



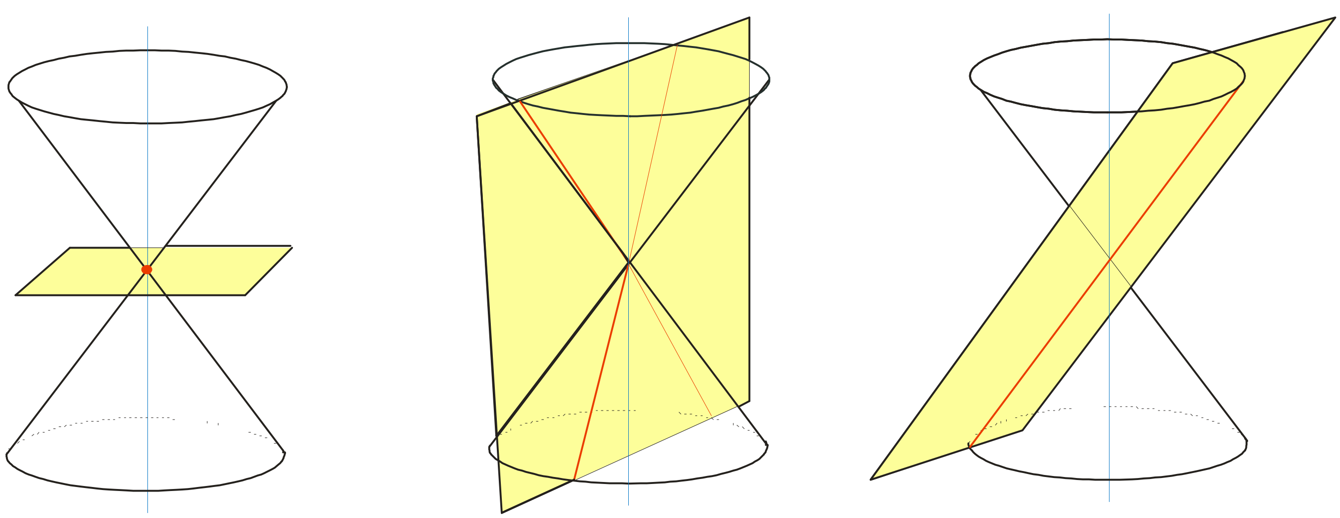
Sea una recta L y V un punto perteneciente a la recta. Llamaremos cono circular recto a la superficie formada por todas las rectas que pasan por el punto y forman un ángulo fijo con la recta . El punto es su vértice y L su eje.



Se dicen *secciones cónicas* o *cónicas* a las curvas que se obtienen intersecando un cono circular recto con un plano. Estas se dividen en dos casos: cónicas degeneradas y cónicas regulares.

Las *cónicas degeneradas* son aquellas que se obtienen cuando el vértice del cono pertenece al plano. Estas son:

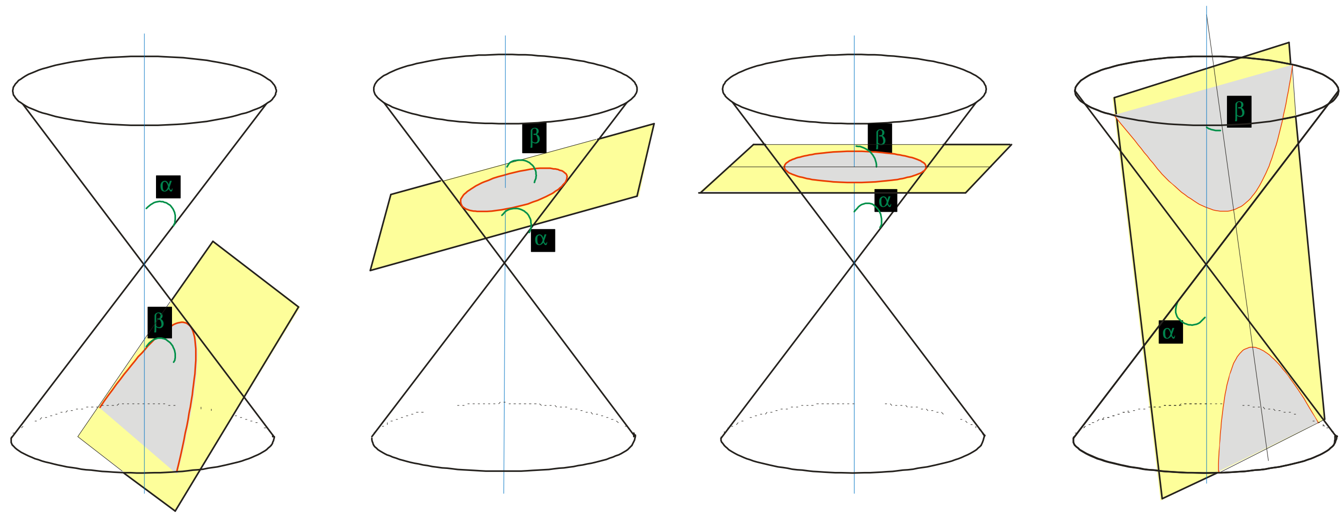
- Un punto (el vértice V) cuando el plano es perpendicular al eje del cono.
- Dos rectas que se cortan en el vértice V cuando el plano contiene al eje del cono. El ángulo entre las rectas aumenta a medida que β disminuye; alcanzando el ángulo α máximo cuando $\beta = 0$.
- Dos rectas coincidentes cuando el plano es tangente al cono.



Las *cónicas regulares* son aquellas que se obtienen cuando el vértice del cono no pertenece al cono. Estas son:

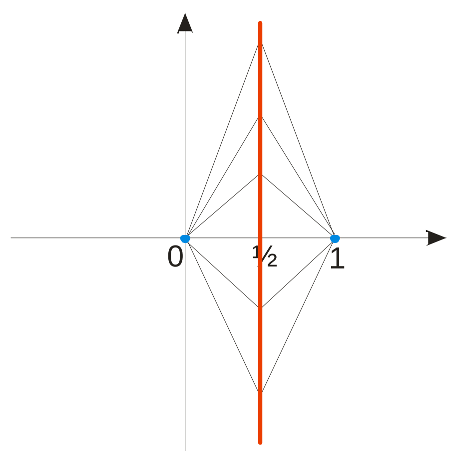
- Una parábola si $\alpha = \beta$,
- Una elipse si $\alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$,
- Una circunferencia si $\beta = \frac{\pi}{2}$,
- Una hipérbola si $\beta < \alpha < \frac{\pi}{2}$,

donde β es el ángulo entre el eje del cono y el plano.



Si bien es posible deducir las expresiones algebraicas por el método introducido anteriormente no lo haremos aquí. Introduciremos las cónicas por medio de una definición métrica, como lugar geométrico.

Llamaremos *lugar geométrico* al conjunto de puntos que satisfacen una determinada condición geométrica. Por ejemplo, el lugar geométrico de los puntos que equidistan $(0,0)$ de y $(1,0)$ está dado por la siguiente gráfica



Si bien en este caso es sencillo deducir el resultado, siempre es aconsejable obtener el resultado en forma analítica, este es,

$$\begin{aligned} d\left((x,y),(0,0)\right) &= d\left((x,y),(1,0)\right) \\ \sqrt{x^2+y^2} &= \sqrt{(x-1)^2+y^2} \\ x^2+y^2 &= (x-1)^2+y^2 \end{aligned}$$

desarrollando el cuadrado y simplificando, tenemos

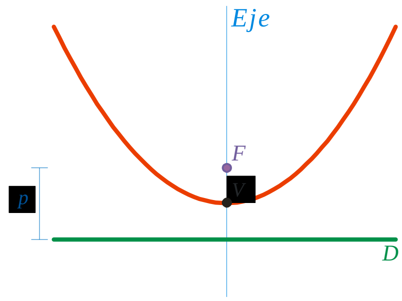
$$\begin{aligned} x^2+y^2 &= x^2-2x+1+y^2 \\ 0 &= -2x+1 \\ x &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

1 Parábola

Se llama *parábola* al lugar geométrico de los puntos de un plano que equidistan de una recta, denominada directriz (D), y de un punto exterior a ella, llamado foco (F); ambos pertenecientes a dicho plano.

Otros elementos que intervienen en una parábola son:

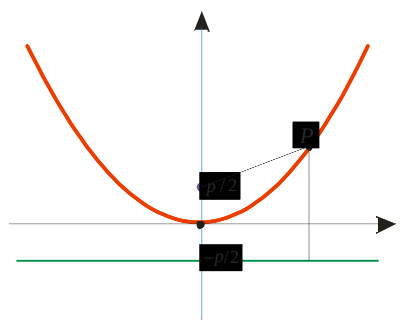
- *Eje* de simetría es la recta perpendicular a la directriz que pasa por el foco.
- Parámetro (p) de la parábola es la medida de la distancia del foco a la directriz.
- Vértice (V) de la parábola es el punto medio de esa distancia.



1.1 Ecuación canónica

Sea el sistema de ejes coordenados OXY.

Con vértice en el origen de coordenadas, $V = (0, 0)$. Consideremos el parámetro p, el foco $F = \left(0, \frac{p}{2}\right)$ y la directriz $D : y = -\frac{p}{2}$. Tomemos un punto cualquiera $P = (x, y)$ sobre la parábola por ellos determinada.



Observemos que la distancia entre el punto P y la recta D esta dada por la distancia entre los puntos: P y $\left(x, -\frac{p}{2}\right)$

$$d\,(P, D) = \left|y + \frac{p}{2}\right| \tag{1}$$

y la distancia entre el punto P y el foco F esta dada por

$$d\,(P, F) = \sqrt{x^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2} \tag{2}$$

Igualamos las distancias (1) y (2),

$$\sqrt{x^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2} = \left|y + \frac{p}{2}\right|$$

elevamos al cuadrado ambos miembros de la igualdad,

$$x^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2 = \left|y + \frac{p}{2}\right|^2$$

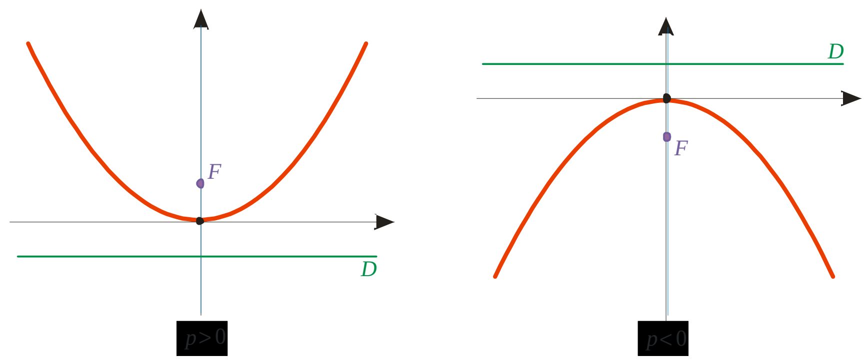
Desarrollamos los cuadrados y simplificamos,

$$2py = x^2$$

Por lo que: la ecuación de la parábola que tiene su foco en $F = \left(0, \frac{p}{2}\right)$y la directriz $D : y = -\frac{p}{2}$ está dada por

$$2py = x^2$$

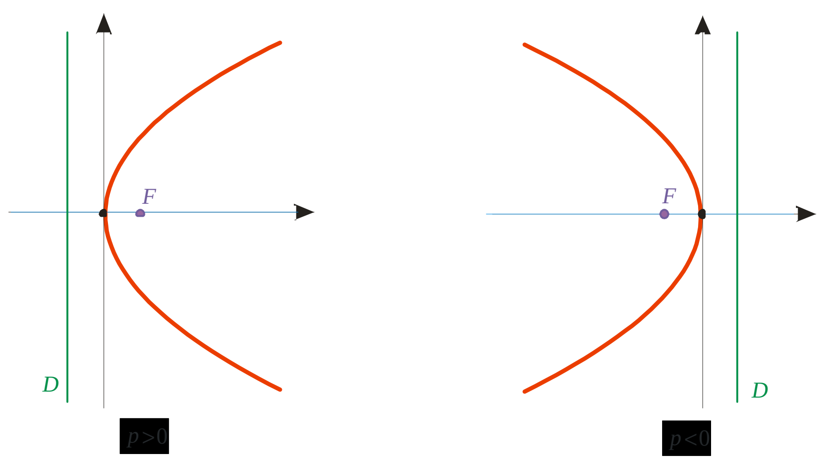
donde la parábola es *cóncava hacia arriba* si $p > 0$ y *cóncava hacia abajo* si $p < 0$. Esta es una parábola con vértice $V = (0, 0)$ y eje de simetría $x = 0$.



Análogamente, la ecuación de la parábola que tiene su foco en $F = \left(\frac{p}{2}, 0\right)$ y directriz $D : x = -\frac{p}{2}$ está dada por

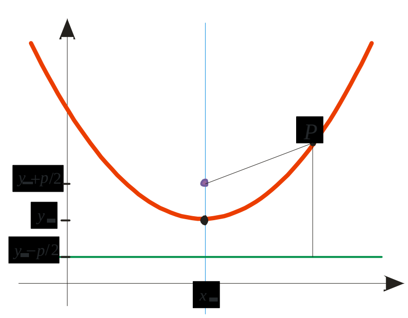
$$2px = y^2$$

donde la parábola es *abierta hacia la derecha* si $p > 0$ y *abierta hacia la izquierda* si $p < 0$. Esta es una parábola con vértice $V = (0, 0)$ y eje de simetría $y = 0$.



Con vértice en un punto cualquiera.

Supongamos que el vértice es el punto $V = (x_0, y_0)$, el foco $F = \left(x_0, y_0 + \frac{p}{2}\right)$y la directriz $D : y = y_0 - \frac{p}{2}$. Como en el caso anterior, tomamos un punto cualquiera $P = (x, y)$ sobre la parábola



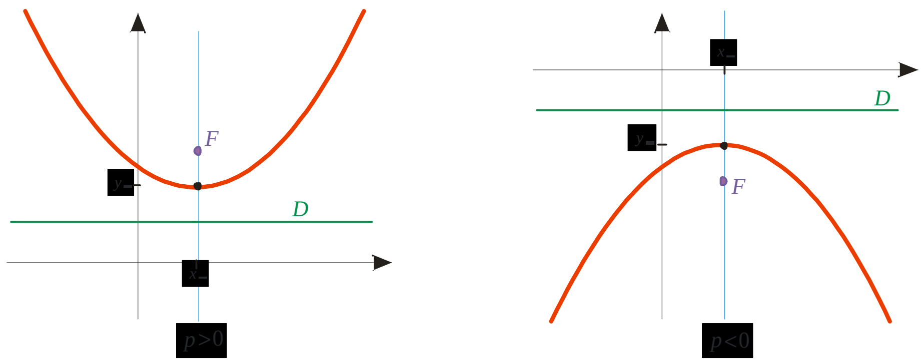
y considerando las distancias

$$\begin{aligned} d\left(P,F\right) &= d\left(P,D\right) \\ \sqrt{\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0-\frac{p}{2}\right)^2} &= \left|y-\left(y_0-\frac{p}{2}\right)\right| \end{aligned}$$

resolviendo de manera similar a la anterior tenemos

$$2p\left(y-y_0\right)=\left(x-x_0\right)^2$$

Esto es, la forma de la parábola es la misma que en el caso anterior, sólo que está trasladada hasta el vértice V



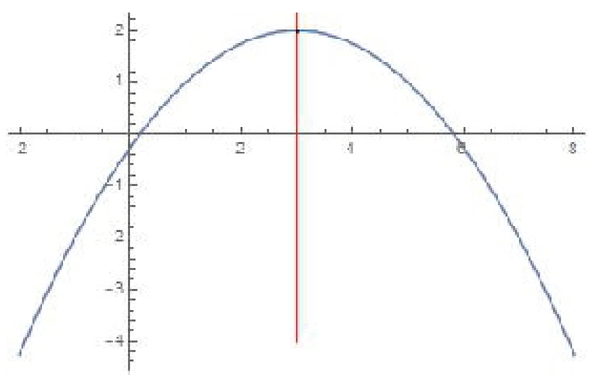
Ejemplo: Grafiquemos la parábola definida por la ecuación $x^2-6x+4y+1=0$.
Completemos cuadrado para la variable x

$$\begin{aligned} x^2-2.3x+3^2-3^2+4y+1 &= 0 \\ \left(x-3\right)^2+4y-8 &= 0 \end{aligned}$$

Despejamos el término cuadrático

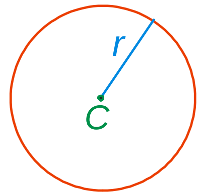
$$\left(x-3\right)^2=-4\left(y-2\right)$$

Es decir, es una parábola con vértice en $(3,4)$ y parámetro $p=-2$, eje de simetría en $y=3$. Graficamos $\left(x-3\right)^2=-4\left(y-2\right)$,



2 Circunferencia

Una *circunferencia* es el lugar geométrico de los puntos del plano que se encuentran a una distancia constante, llamada radio (r), de un punto fijo, llamado centro (C).



2.1 Ecuación canónica

Consideramos un sistema de coordenadas ortogonales OXY. Sea el centro $C = (x_0, y_0)$ y r el radio de la circunferencia. Continuando con el procedimiento habitual, tomamos un punto cualquiera $P = (x, y)$ sobre la circunferencia. Luego, teniendo en cuenta la definición de circunferencia y la distancia entre dos puntos vista en el capítulo 2 de las Notas de clase,

$$\begin{aligned} d\,(P, C) &= r \\ \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} &= r \end{aligned}$$

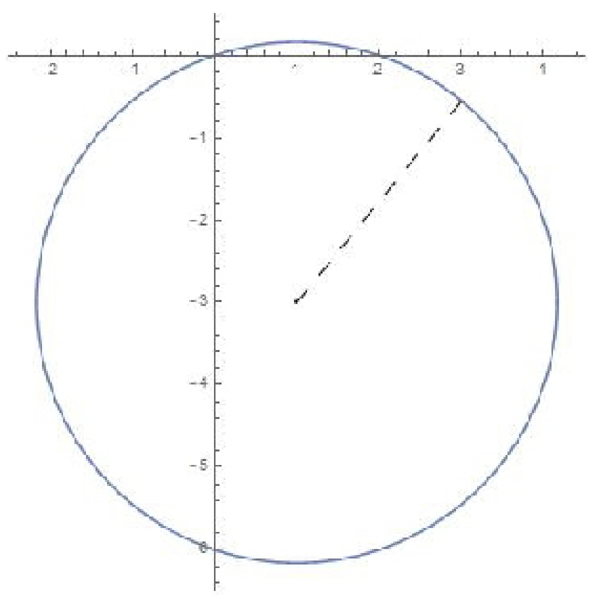
Elevando ambos miembros al cuadrado,

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

Ejemplo: Grafique la ecuación $x^2 - 2x + y^2 + 6y = 0$.
Completemos cuadrado para la variable x y para y

$$\begin{aligned} x^2 - 2x + y^2 + 6y &= 0 \\ x^2 - 2.1x + 1^2 - 1^2 + y^2 + 2.3y + 3^2 - 3^2 &= 0 \\ (x - 1)^2 + (y + 3)^2 &= 10 \end{aligned}$$

Es decir, es una circunferencia de centro $(1, -3)$ y radio $r = \sqrt{10}$.

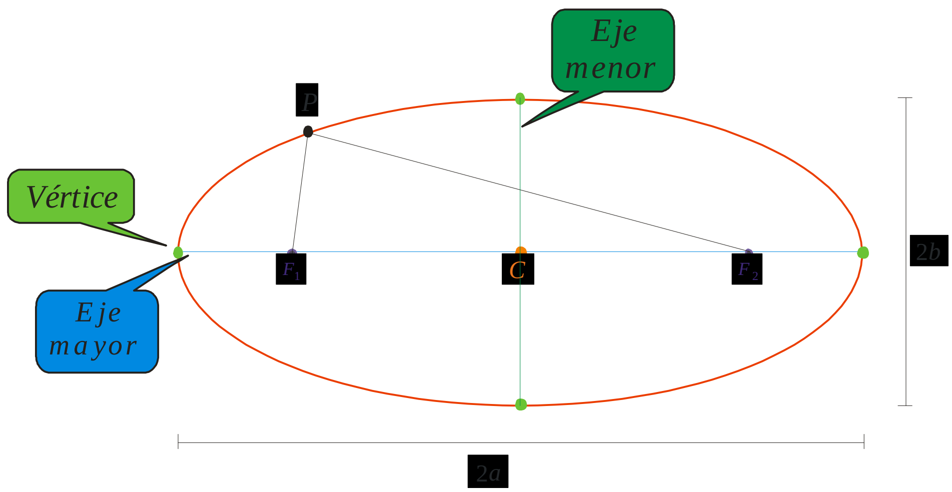


3 Elipse

Una *elipse* es el lugar geométrico de los puntos del plano tales que la suma de las distancias a dos puntos fijos, llamados focos, es constante.

Otros elementos que se destacan en una elipse son:

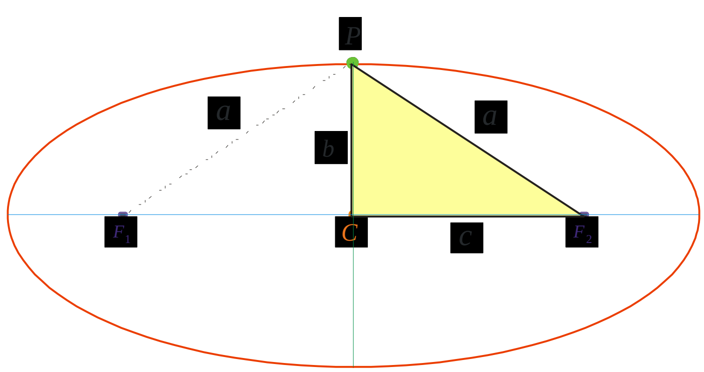
- *Centro* (C) es el punto medio entre los focos.
- *Distancia focal* es aquella entre los focos, generalmente se nota $2c$.
- *Eje principal* es aquel que pasa por los focos.
- *Eje secundario* es aquel ortogonal al eje principal, que pasa por el centro.
- *Vértices* son los puntos de la elipse que cortan a los ejes.
- *Eje mayor* es el segmento del eje principal delimitado por los vértices, de longitud $2a$.
- *Eje menor* es el segmento del eje secundario delimitado por los vértices, de longitud $2b$.



La relación entre la distancia focal y la longitud de los semiejes,

$$a^2 + b^2 = c^2 \tag{3}$$

puede ser deducida gráficamente del siguiente modo:



Si tomamos uno de los vértices V ubicado sobre el eje menor, podemos construir los triángulos rectángulos F_1CV y F_2CV. El lado CV tiene longitud b por ser la longitud del semieje menor y el lado CF_2 mide c por ser la mitad de la distancia focal. La longitud de la hipotenusa es a pues los triángulos F_1CV y F_2CV son iguales, por lo que la longitud de F_1V coincide con la de F_2V y entonces

$$|F_1V| + |F_2V| = 2\,|F_1V| = 2a.$$

Por último, utilizamos el Teorema de Pitágoras para deducir la relación (3).

3.1 Ecuación canónica

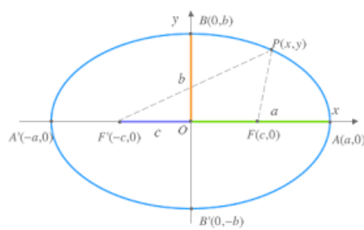
No la deduciremos aquí, pues la verán en Geometría Analítica. La ecuación de la elipse es

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{4}$$

Propiedades:

1. Intersección con el eje X. Al sustituir $y = 0$ en la ecuación (4) tenemos $\frac{x^2}{a^2} = 1$ entonces la intersección de la curva con el eje de las abscisas es $x = \pm a$.

2. Intersección con el eje Y. Al sustituir $x = 0$ en la ecuación (4) tenemos $\frac{y^2}{b^2} = 1$ entonces la intersección de la curva con el eje de las abscisas es $y = \pm b$.



Con centro en un punto cualquiera
Supongamos que el centro es un punto $C = (x_0, y_0)$., en este caso la ecuación de la elipse es

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 \tag{5}$$

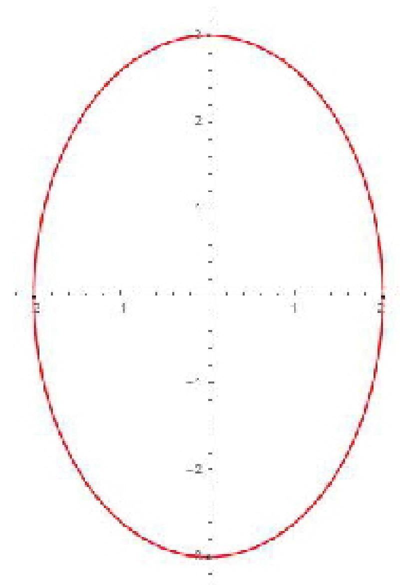
Ejemplo: Grafique las elipses

$$\text{a)}\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \qquad \text{b)}\ \frac{(x+1)^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$$

a) Esta elipse tiene centro en $(0, 0)$ con

$$\begin{aligned} a^2 &= 4 \rightarrow a = 2 \\ b^2 &= 9 \rightarrow b = 3 \end{aligned}$$

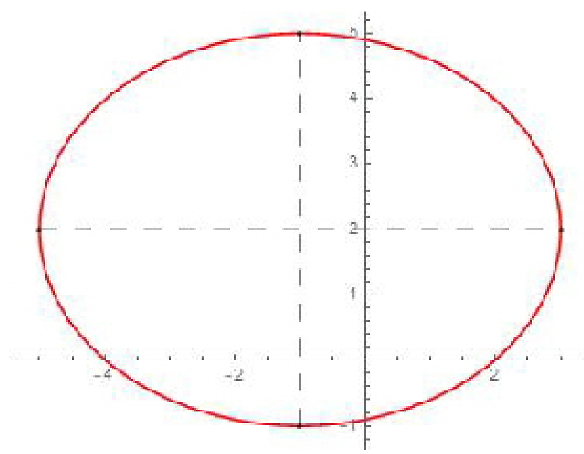
Para graficar marcamos los vértices $(2,0)$ y $(-2,0)$ sobre el eje X, y los vértices $(0,3)$ y $(0,-3)$ sobre el eje Y. Luego unimos estos vértices, así tenemos



b) Esta elipse tiene centro en $(-1,2)$ con

$$\begin{aligned} a^2 &= 16 \rightarrow a = 4 \\ b^2 &= 9 \rightarrow b = 3 \end{aligned}$$

Es recomendable dibujar los ejes de simetría a partir del centro, y sobre ellos marcar las distancias de los ejes a y b. Quedando así determinados los vértices $(-1,-1),(-1,5),(3,2),(5,2)$.



4 Hipérbola

Una *hipérbola* es el lugar geométrico de los puntos del plano tales que el valor absoluto de la diferencia de las distancias a dos puntos fijos, llamados focos, es una constante positiva.

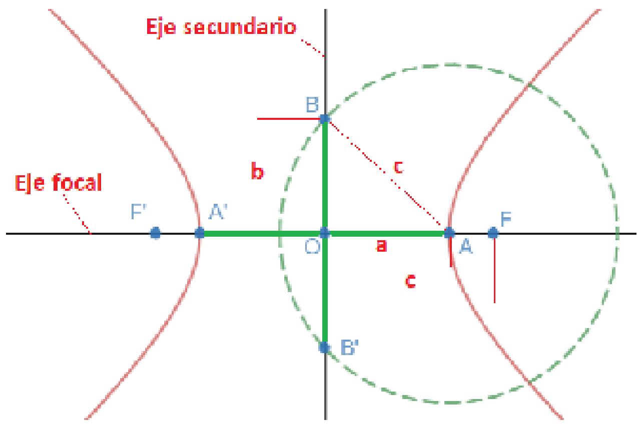
Otros elementos que se destacan en una hipérbola son:

- *Centro* es el punto medio entre los focos.
- *Distancia focal* es aquella entre los focos, generalmente se nota $2c$.
- *Eje principal* es aquel que pasa por los focos.
- *Eje secundario* es aquel ortogonal al eje principal, que pasa por el centro.
- *Vértices* son los puntos de la elipse que cortan a los ejes. La distancia entre ellos generalmente se nota $2a$.
- *Asíntotas* son rectas cuyas distancias a la curva tienden a cero cuando la curva se aleja hacia el infinito.

Relación entre la distancia focal y los semiejes:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

gráficamente:



4.1 Ecuación canónica

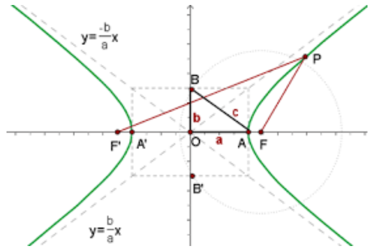
No la deduciremos aquí, pues la verán en Geometría Analítica. La ecuación de la hipérbola es

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{6}$$

Propiedades:

1. Intersección con el eje X.Al sustituir $y = 0$ en la ecuación (6) tenemos $\frac{x^2}{a^2} = 1$ entonces la intersección de la curva con el eje de las abscisas es $x = \pm a$.
2. Intersección con el eje Y.Al sustituir $x = 0$ en la ecuación (6) tenemos $-\frac{y^2}{b^2} = 1$ Absurdo!!!. . Por lo tanto, la hiperbólica no interseca al eje Y.
3. Es simétrica con respecto a los ejes coordenados. Pues cuando reemplazamos x e y por $-x$ y $-y$, respectivamente, sin modificar la ecuación mostramos la simetría con respecto al eje x y al eje y.

4. Las asíntotas son las rectas $y = \frac{b}{a}x$ e $y = -\frac{b}{a}x$.

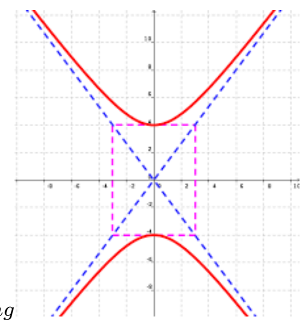


Análogamente, la ecuación

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{7}$$

es una hipérbola con centro en $(0, 0)$, el eje y como principal y vértices $(0, b)$ y $(0, -b)$.

Y



$_2 4.png$

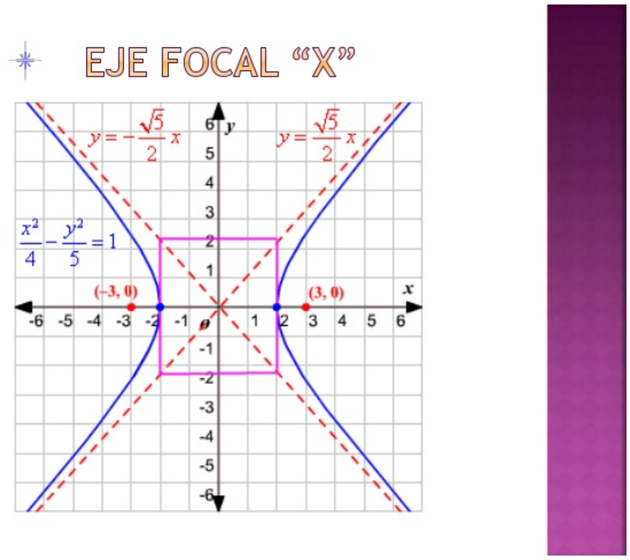
Con centro en un punto cualquiera
Supongamos que el centro es un punto $C = (x_0, y_0)$., en este caso la ecuación de la elipse es

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

Ejemplo: Grafique la hipérbola $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$.
Para esto, grafique los ejes coordenados OXY. Notemos que:

- el centro es $(0, 0)$
- $a = 2, b = \sqrt{5}$
- la intersección con el eje X son $(2, 0)$ y $(-2, 0)$
- no intersecta al eje Y

- las asintotas son $y = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}x$



2020, FCEN, UNCuyo