4. Correspondencia Matemática

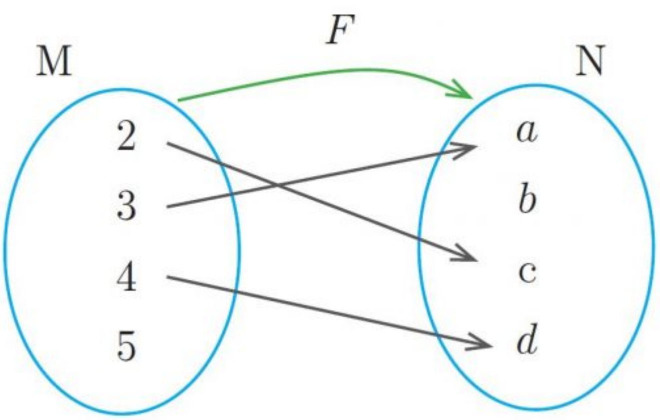
Hola amigos, hoy hoy nos toca desarrollar el concepto de **correspondencia matemática** entre dos conjuntos, se puede decir que es una generalización de la teoría de las relaciones binarias desarrollado en la sección anterior, ya que si bien, el concepto teórico de relación lo desarrollamos con dos conjuntos distintos, pero no sus propiedades y clasificación estudiados únicamente para un solo conjunto. En esta oportunidad, desarrollaremos tanto sus propiedades como su clasificación para dos conjuntos distintos y esto le corresponde al concepto de correspondencia.

TABLA DE CONTENIDO

Noción de correspondencia

Hay que entender que no existe ninguna diferencia de lo que se entiende entre relación y correspondencia, estas connotaciones sirven para clasificar el vinculo entre dos conjuntos, la primera se desarrolla para un único conjunto y la segunda para dos conjuntos, sin embargo, el concepto de correspondencia va mas allá, ya que viene acompañado con los conceptos de **punto de origen** y **punto de llegada**.

Pasemos con algunos ejemplos antes de comenzar con las definiciones. Sean los siguientes conjuntos $\mathrm{M} = \{2, 3, 4, 5\}$ y $\mathrm{N} = \{a, b, c, d\}$ donde M es el conjunto de origen y N el conjunto de llegada, de aquí, podemos **corresponder** algunos elementos de M con N según otro conjunto llamado F que los relacione. Esto se puede visualizar mucho mejor con el siguiente diagrama sagital:1



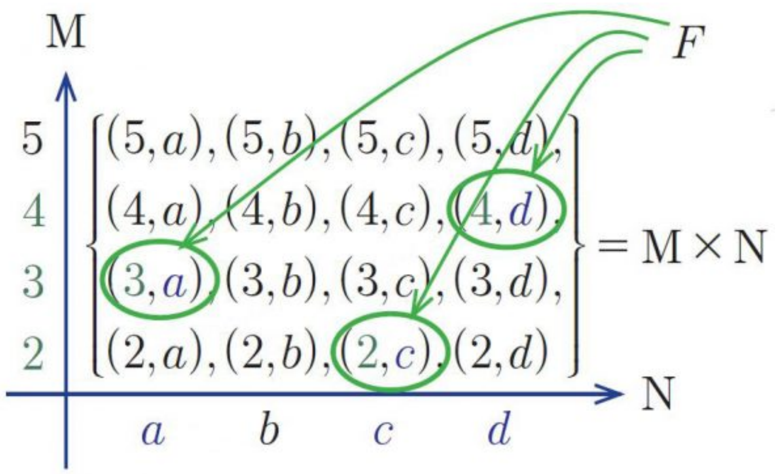
Para indicar que el conjunto F representa una correspondencia o vinculo entre algunos elementos del conjunto M con los elementos del conjunto N indicados por las flechas del diagrama, lo expresaremos como un conjunto de pares ordenados anteriormente estudiados en secciones anteriores. Según el diagrama, tenemos:

- 2 está relacionado con c, lo escribimos $(2, c)$.
- 3 está relacionado con a, lo escribimos $(3, a)$.
- 4 está relacionado con d, lo escribimos $(4, d)$.

A esta colección de pares ordenados estará representado por F, en este caso, simplemente lo escribimos así:

$$F = \{(2, c), (3, a), (4, d)\}$$

Al conjunto F se le llama correspondencia definido sobre los conjuntos M y N. Veamos el producto cartesiano de estos conjuntos junto representado por $\mathrm{M} \times \mathrm{N}$ con su diagrama rectangular:



De la correspondencia $F = \{(2, c), (3, a), (4, d)\}$, los elementos 2, 3 y 4 se le llama dominio u origen y los elementos a , c y d se les llama rango o imagen de la correspondencia F.

Del diagrama rectangular notamos que algunos elementos de $\mathrm{M} \times \mathrm{N}$ son los elementos de F, lo que significa que $F \subseteq \mathrm{M} \times \mathrm{N}$ y si consideramos intuitivamente que el conjunto M es el conjunto inicial y el conjunto N es el conjunto final como lo indica las flechas del diagrama, entonces por el axioma de comprensión debe existir alguna función proposicional (enunciado abierto) $p(x, y)$ para los cuales definiremos una correspondencia $p : \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ del pares del conjuntos F tal que:

$$F = \{(x, y) \in \mathrm{M} \times \mathrm{N} | p(x, y)\}$$

Aquí p define todos los pares ordenados de F, en estos casos, para el concepto de correspondencia, en lugar de escribir $F \subseteq \mathrm{M} \times \mathrm{N}$ ahora escribiremos $p : \mathrm{M} \to \mathrm{N}$. Para el caso anterior, la función proposicional podría definirse particularmente así $p(x, y) : y = f(x)$, entonces:

$$\left.\begin{array}{l} c = f(2) \\ a = f(3) \\ d = f(4) \end{array}\right\} p(x, y) : y = f(x)$$

Con esta introducción definamos el concepto de correspondencia adecuadamente.

Definición de correspondencia

> *Sean dos conjuntos* A *y* B*, se llama correspondencia* $p : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$*, donde* A *es el conjunto de partida y* B *es el conjunto de llegada que define una relación* $F \subseteq \mathrm{A} \times \mathrm{B}$ *bajo una función proposicional* $p(x, y)$ *tal que:*
>
> $$\mathrm{F} = \{(x, y) \in \mathrm{A} \times \mathrm{B} | p(x, y)\}$$

Nota: la relación $F \subseteq \mathrm{A} \times \mathrm{B}$ y la correspondencia $p : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ significa lo mismo tal que:

$$F \subseteq \mathrm{A} \times \mathrm{B} \leftrightarrow p : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$$

A partir de ahora usaremos la notación $p : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ en lugar de $F \subseteq \mathrm{A} \times \mathrm{B}$, se sobreentiende que si existe una correspondencia $p : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$, entonces implica la existencia del conjunto de pares ordenados F que relaciona a los conjuntos A y B. Desde ahora llamaremos correspondencia a p en lugar de $p : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ a menos que se indique lo contrario (como las definiciones).

Ejemplo

Sean los conjuntos $\mathrm{A}=\{-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5\}$ y $\mathrm{B}=\{3,4,5,6,7,8,9\}$, definimos una correspondencia p tal que $p(x,y): y=x^2$, entonces existe un conjunto relación que cumpla tal condición:

$$F=\{(x,y)\in \mathrm{A}\times \mathrm{B}|p(x,y)\}$$

$$F=\left\{(x,y)\in \mathrm{A}\times \mathrm{B}|y=x^2\right\}$$

Por extensión:

$$F=\{(-3,9),(-2,4),(2,4),(3,9)\}$$

Donde los elementos de la primera componente de F son $-3,-2,2,3$ y los elementos de la segunda componente de F son $4,9$ cada uno de estos elementos le pertenecen a los conjuntos A y B respectivamente. En la sección anterior vimos que estos grupos de elementos están definidos como el dominio y rango del conjunto de inicial (en este caso A) y conjunto final (en este caso B). Definiremos de nuevo estos conceptos para una correspondencia dada definidos sobre dos conjuntos distintos pero con otros nombres, veamos:

Definición de origen e imagen de una correspondencia

> *Sea la correspondencia* $p:\mathrm{A}\to \mathrm{B}$*, llamaremos origen de* p *al conjunto de todas las primeras componentes de la relación* F *simbolizado por* $\mathrm{Orig}(p)$ *tal que:*
>
> $$\mathrm{Orig}(p)=\{x\in \mathrm{A}|\exists y\in \mathrm{B}\wedge (x,y)\in F\}$$
>
> *Y llamaremos imagen de* p *al conjunto de todas las segundas componentes de la relación* F *simbolizado por* $\mathrm{Imag}(p)$ *tal que:*
>
> $$\mathrm{Imag}(p)=\{y\in \mathrm{B}|\exists x\in \mathrm{B}\wedge (x,y)\in F\}$$

No quiero que te pierdas en esta definición y céntrate en la explicación que veremos en este momento. Del ejemplo anterior habíamos indicado que los conjuntos $\mathrm{A}=\{=3,-2,-1,0,1,2,3,4,5\}$ y $\mathrm{B}=\{3,4,5,6,7,8,9\}$ son el conjunto de partida y conjunto de llegada respectivamente según la función proposicional $p(x,y): y=x^2$ que la define, en base a esto, se define la relación:

$$F=\{(-3,9),(-2,4),(2,4),(3,9)\}$$

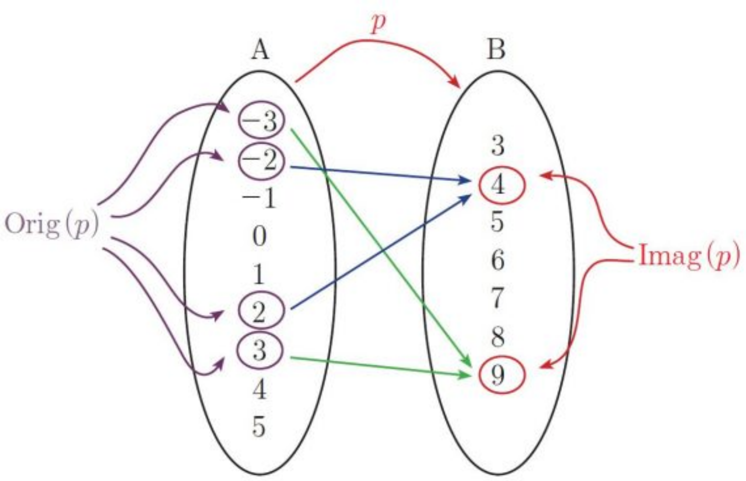
Las primeras componentes de F extraídas del conjunto A representan el origen de la correspondencia p, esto es:

$$\text{Orig}(p) = \{-3, -2, 3, 3\}$$

Y la segundas componentes de F extraídas del conjunto B representan la imagen de la correspondencia p, esto es:

$$\text{Imag}(p) = \{3, 9\}$$

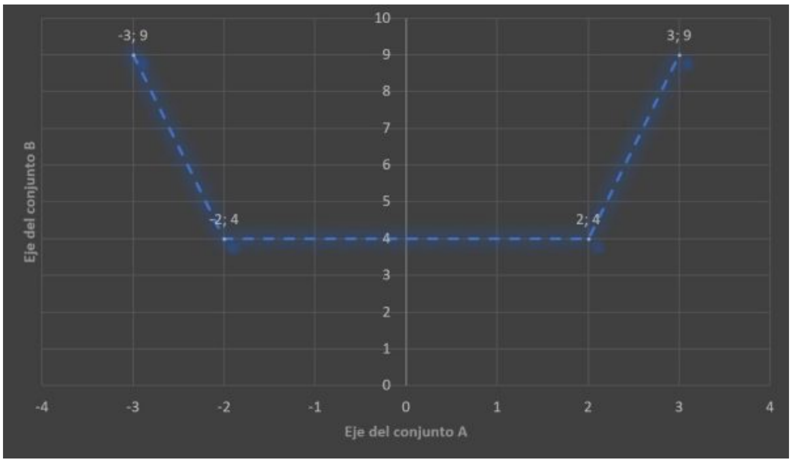
Veamos la correspondencia entre el origen y la imagen de p en el siguiente diagrama sagital:



Observe que $\text{Orig}(p)$ es un subconjunto de A, y la $\text{Imag}(p)$ es subconjunto de B, es decir:

$$\text{Orig}(p) \subseteq \text{A} \wedge \text{Imag}(p) \subseteq \text{B}$$

Los conceptos de origen e imagen es lo mismo que dominio y rango tal como definimos en la sección anterior de relaciones binarias. Los pares ordenados son útiles para indicar una ubicación sobre un plano con referencias definidas como también el comportamiento de alguna correspondencia definida sobre el conjunto de los números reales de variable real. Veamos una representación gráfica del plano cartesiano del ejemplo anterior de los conjuntos A y B en el siguiente diagrama rectangular:



Estos puntos indican la relación F definidas por la correspondencia p indicada en el conjunto del ejemplo anterior:

$$F = \{(-3,9),(-2,4),(2,4),(3,9)\}$$

Nota: Para finalizar este apartado, de la definición de origen e imagen indicados aquí:

$$\mathrm{Orig}(p) = \{x \in \mathrm{A} | \exists y \in \mathrm{B} wedge (x,y) \in F\}$$

$$\mathrm{Imag}(p) = \{y \in \mathrm{B} | \exists x \in \mathrm{B} \wedge (x,y) \in F\}$$

El cuantificador de existencia $\exists$ nos dice lo siguiente: para que exista un conjunto origen $\mathrm{Orig}(p)$, debe existir por lo menos alguna imagen $\exists y \in \mathrm{B}$, porque si no existe ninguna imagen, no se podría definir un conjunto origen, dicho de otra manera, no existe una relación que no tenga imagen (o rango, como quieras llamarlo) y ademas, si se quitase la proposición $\exists y \in \mathrm{B}$, para $\mathrm{Orig}(p)$ la definición quedaría así:

$$\mathrm{Orig}(p) = \{x \in \mathrm{A} | (x,y) \in F\}$$

Este conjunto está mal formulado porque no sabemos quien es y ni sabemos en que conjunto esta definido y también no sabríamos ni si quiera si F en el producto $\mathrm{A} \times \mathrm{B}$ ya que y podría estar contenido en cualquier otro conjunto que no sea B, la misma analogía sucede con el conjunto imagen $\mathrm{Imag}(p)$.

Inversa de una correspondencia

Tomemos los conjuntos del ejemplo anterior $\mathrm{A}=\{-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5\}$ y $\mathrm{B}=\{3,4,5,6,7,8,9\}$ y la relación $F=\left\{(x, y) \in \mathrm{A} \times \mathrm{B} \mid y=x^{2}\right\}$, para que una correspondencia sea inversa respecto a la relación F , basta con intercambiar el orden del producto cartesiano de $\mathrm{A} \times \mathrm{B}$ lo cual resulta el producto $\mathrm{B} \times \mathrm{A}$ y $y=x^{2}$ por $x=y^{2}$, quedando así una nueva relación:

$$F^{*}=\left\{(y, x) \in \mathrm{B} \times \mathrm{A} \mid x=y^{2}\right\}$$

Por extensión, tenemos:

$$F^{*}=\{(9,-3),(4,-2),(4,2),(9,3)\}$$

Comparando con la relación F por extensión:

$$F=\{(-3,9),(-2,4),(2,4),(3,9)\}$$

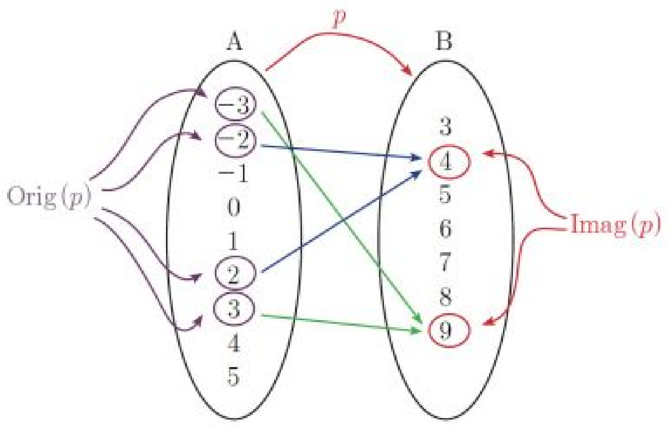
Notamos que los pares ordenados cambian también de posición, Para una correspondencia p con relación F diseñamos una correspondencia p^{*} con relación F^{*}, esto es lo que se llama inversa de una correspondencia. En base a esto, realizamos la siguiente definición:

Definición

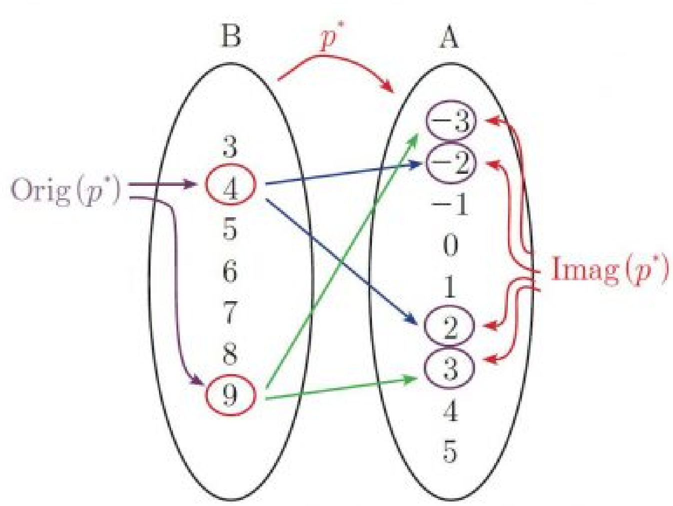
> *Sean la correspondencia $p: A \rightarrow B$ que define una relación F se llama correspondencia inversa a $p^{*}: \mathrm{B} \rightarrow \mathrm{A}$ que define una relación inversa F^{*} tal que:*

$$F^* = \{(y,x) \in \mathrm{B} \times \mathrm{A} | (x,y) \in F\}$$

Este punto se puede explicar mejor si invertimos las flechas del diagrama sagital para los conjuntos del ejemplo anterior $\mathrm{A} = \{-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5\}$ y $\mathrm{B} = \{3,4,5,6,7,8,9\}$, veamos los gráficos:



El origen y la imagen de $p : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ es:
$\mathrm{Orig}(p) = \{-3,-2,2,3\}$
$\mathrm{Imag}(p) = \{4,9\}$



Origen e imagen de $p^* : \mathrm{B} \to \mathrm{A}$ es:
$\mathrm{Orig}(p^*) = \{4,9\}$
$\mathrm{Imag}(p^*) = \{-3,-2,2,3\}$

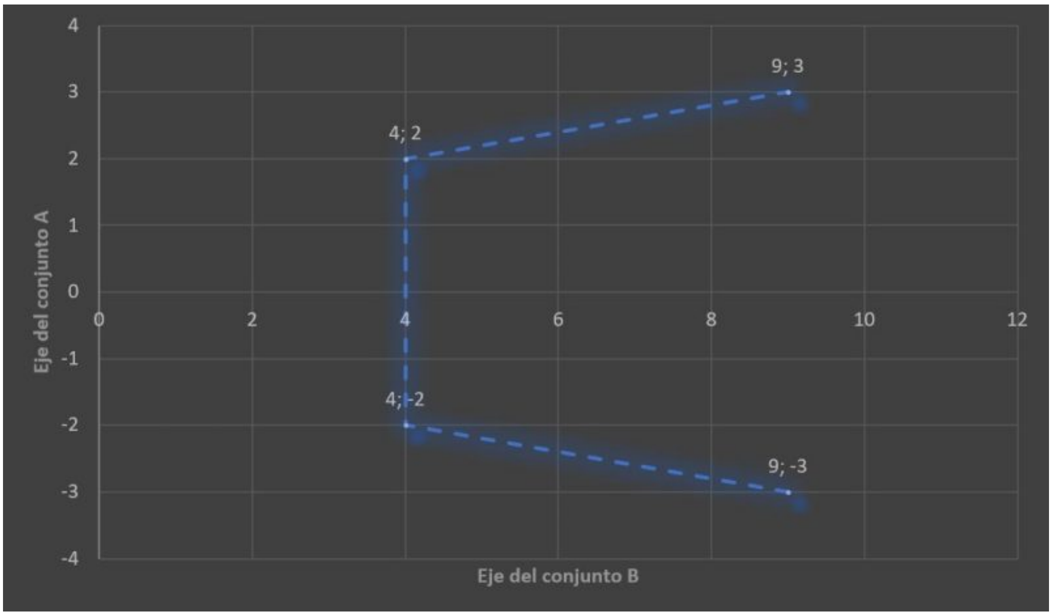
Observe que $\mathrm{Orig}(p) = \mathrm{Imag}(p^*)$ y $\mathrm{Imag}(p) = \mathrm{Orig}(p^*)$, es decir, que el origen e imagen de una correspondencia dada es igual a la imagen y origen de la inversa de dicha correspondencia. Ya habíamos visto en un plano cartesiano de la correspondencia p donde la relación binaria definida fue:

$$\mathrm{F} = \{(-3,9),(-2,4),(2,4),(3,9)\}$$

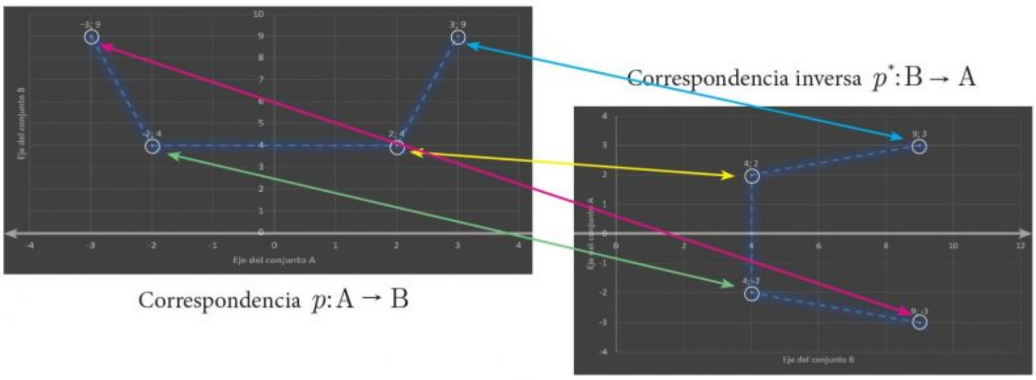
Pero no de su inversa p^* donde su relación binaria es:

$$F^* = \{(9,-3),(4,-2),(4,2),(9,3)\}$$

El plano cartesiano de F^* debería ser:



Gráficamente lo único que hemos hecho es rotar 90º en sentido horario y trasladar desde el eje Y al eje X del plano cartesiano anterior de la correspondencia definida originalmente por $p(x,y): y = x^2$. Juntemos los diagramas de la correspondencia p y su inversa p^*, observe que lo único que hemos hecho es girar el plano cartesiano en 90º en sentido horario.



Lo único que cambia son el orden de los pares ordenados del plano cartesiano. Espero que con esta explicación sea suficiente para entender el concepto de la inversa de una correspondencia.

Elementos homólogos

Se ha definido el concepto de correspondencia entre dos conjuntos, hemos dicho que cuando existe una correspondencia entre estas dos, implica la existencia de una relación binaría entre los conjuntos, sin embargo, no hemos entablado una definición para indicar la existencia de una relación entre los elementos de dos conjuntos cuando indicamos que dos conjuntos tiene una correspondencia definida, por ejemplo, no es correcto la frase " el elemento a **le corresponde** aun elemento de b", ya que no se ha definido el significado de "**le corresponde** a", es por ello que realizaremos una definición apropiada entre la relación que existe entre los elementos a dos conjuntos distintos.

Definición

Sean una correspondencia $p : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ que define una relación F, se dice que dos elementos $x \in \mathrm{A}$ y $y \in \mathrm{B}$ son **homólogos** si el par (x, y) pertenece a F.

Este concepto será necesario cuando indiquemos una relación entre los elementos en lugar de indicar la relación entre los conjuntos. Pero será mas importante indicar las diferentes maneras que pueden relacionarse los elementos de una correspondencia dada, es decir, se pueden definir diferentes tipos de correspondencia según las maneras como se relacione los elementos entre los conjuntos dados y eso es lo que estudiaremos en el siguiente apartado.

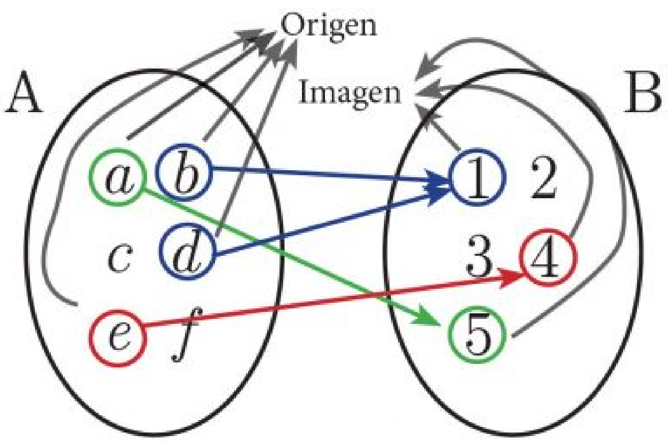
Tipos de correspondencia

Los tipos de correspondencias se pueden clasificar en unívoca, biunívoca y multívoca. Veamos cada una de ellas.

Correspondencia unívoca (Definición)

> *Una correspondencia p que define una relación F, se dice que es univoca si y solo si cada elemento del conjunto origen es **homólogo** a un único elemento del conjunto imagen. Simbólicamente lo expresamos así:*
>
> $$\forall x \in \mathrm{Orig}(p) : [(x, y_1) \wedge (x, y_2) \in F] \to y_1 = y_2$$

También se dice que existe una **correspondencia uno a uno**, también aplica para las funciones que veremos en breve bajo el titulo **Aplicaciones**. Aquí empieza lo serio.



Observe que algunos elementos del conjunto inicial, es decir, el conjunto origen comparte con un único elemento del conjunto final. Es cierto que el elemento c y e comparten con un único elemento 3, pero sale una única flecha de c y e como también las únicas flechas que salen de a y b con sus respectivos elementos homólogos del conjunto final. Por tanto, la correspondencia es unívoca.

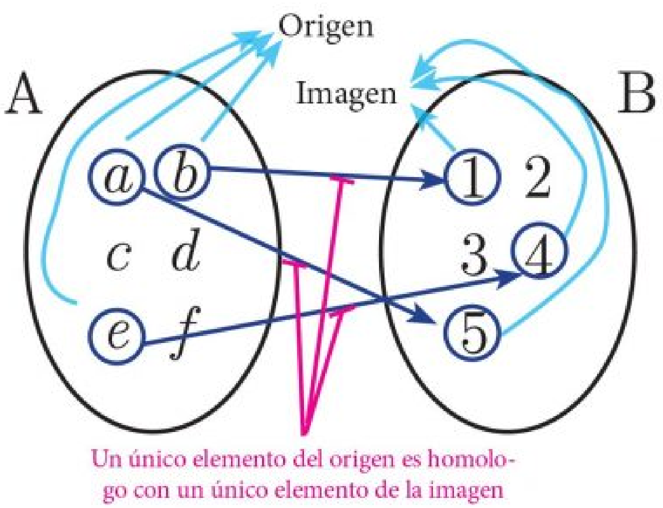
Eso significa que si existe una correspondencia unívoca y a su vez un elemento del origen le corresponde dos elementos de la imagen, significa que esos dos elementos de la imagen son iguales, es decir, no pueden partir dos flechas de un solo elemento del conjunto origen para dos elementos diferentes del conjunto imagen.

En otras palabras, en una correspondencia univoca, si tenemos dos pares ordenados (x, y_1) y (x, y_2) pertenecientes a una relación F definida por una correspondencia p, entonces $y_1 = y_2$ para todo los elementos del conjunto origen. Si lograste entender este punto junto con los diagramas, entonces la definición esta bien explicado.

Correspondencia biunívoca (Definición)

> *Una correspondencia p que define una relación F es biunívoca si y solo si cada elemento del conjunto origen es **homologo** a un único elemento del conjunto imagen (esto es unívoca) y cada elemento del conjunto imagen es **homólogo** por un único elemento del conjunto origen (es como una univoca pero de la imagen al origen). Simbólicamente se expresa así:*
>
> $$\forall x \in \text{Orig}(p) : [(x, y_1) \wedge (x, y_2) \in F] \rightarrow y_1 = y_2$$
> $$\text{y}$$
> $$\forall y \in \text{Imag}(p) : [(x_1, y) \wedge (x_2, y) \in F] \rightarrow x_1 = x_2$$

En otras palabras, para que una correspondencia p sea biunívoca, tanto la p como su inversa p^*deben ser univocas. Veamos esto con un diagrama sagital:



Observe que existe una flecha para un único origen y una única imagen, es decir, no pueden tener dos o mas flechas que salgan de un elemento del conjunto origen para dos elementos distintos del conjunto imagen ni tampoco un elemento del conjunto imagen puede ser compartido por dos o mas elementos del conjunto origen.

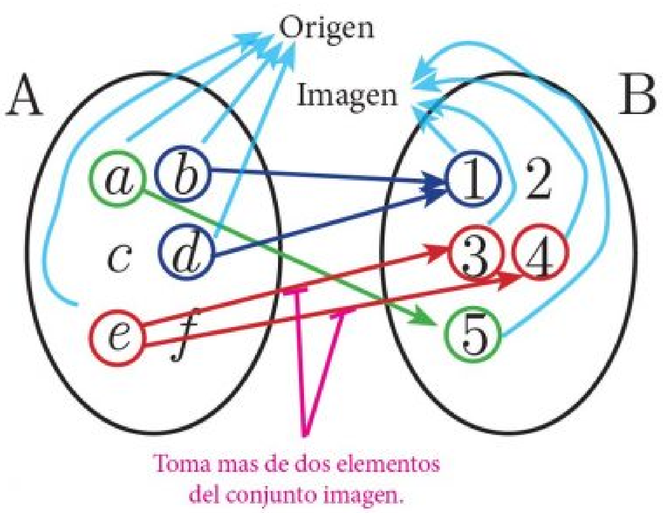
PERO

En otras palabras puramente informales, se puede decir que cada par ordenado tienen componentes **celosas**, es decir, no existen relaciones libres ni amigos con derechos.

Correspondencia Multívoca (Definición)

> *Es la negación de la correspondencia unívoca. Para una correspondencia p que define una relación F es multívoca si y solo si existe al menos un elemento del conjunto origen que es* ***homólogo*** *a dos o mas elementos del conjunto imagen. Simbólicamente:*
>
> $$\exists x \in \text{Orig}(p) : (x, y_1) \in F \wedge (x, y_2) \in F \wedge y_1 \neq y_2$$

En esa ultima definición es posible por lo menos la existencia de un elemento del conjunto origen que pueda compartir dos elementos del conjunto imagen o mas. En cuanto a su terminología, tal vez multívoca signifique que pueda tomar mas de dos sentidos o dos flechas desde un único elemento de partida, en contraste con la correspondencia unívoca que solo puede tomar un solo sentido o una flecha. Veamos el siguiente diagrama sagital:



Observe que un elemento del conjunto origen e es homologo a dos elementos 3 y 4 del conjunto imagen. Esto no esta permitido para una correspondencia unívoca, es decir, no puede salir mas de dos flechas de un mismo elemento del conjunto origen, pero una correspondencia multívoca puede salir dos o mas flechas de al menos de un elemento del conjunto origen al cualquier elemento del conjunto imagen diferentes.

Nota: Una correspondencia **no biunívoca** es cuando una correspondencia **o** su inversa es **multívoca**.

Aplicaciones matemáticas

El estudio de las aplicaciones matemáticas es el estudio de las funciones, en un curso de matemática discreta generalmente se estudia las relaciones binarias de una función, en un curso de precalculo y calculo se estudia la función proposicional como propiedad que define a una relación binaria como un conjunto de pares ordenados, por ejemplo, sea la correspondencia $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que define la siguiente relación:

$$F = \left\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | p(x, y) : y = x^2\right\}$$

Observen que esta relación binaria define una aplicación o función, de aquí, en matemática discreta se estudia las relaciones binarias de una función, es decir, se estudia las propiedades de F, pero en cursos como geometría analítica o precalculo y calculo se estudia la función proposicional $p(x, y) : y = x^2$, es decir, la función numérica.

Pero como estamos tratando con relaciones binarias entre conjuntos, esta sección estudiara el aspecto binario de una función. si bien es cierto que tanto función como aplicación son exactamente el mismo concepto, usaremos la palabra aplicación para estudiar su aspecto binario y función para estudiar el aspecto numérico.

No confundir una función proposicional con función propiamente dicha, la primera solo hace referencia a un enunciado abierto que estudiamos brevemente en una sección de proposiciones del capitulo de lógica proposicional. Dicho esto, comencemos con la siguiente definición.

Definición de aplicación

> *Sea una correspondencia $f : \mathrm{A} \to$ se dice que es una aplicación si es **unívoca** y $\mathrm{Orig}(p) = \mathrm{A}$.*

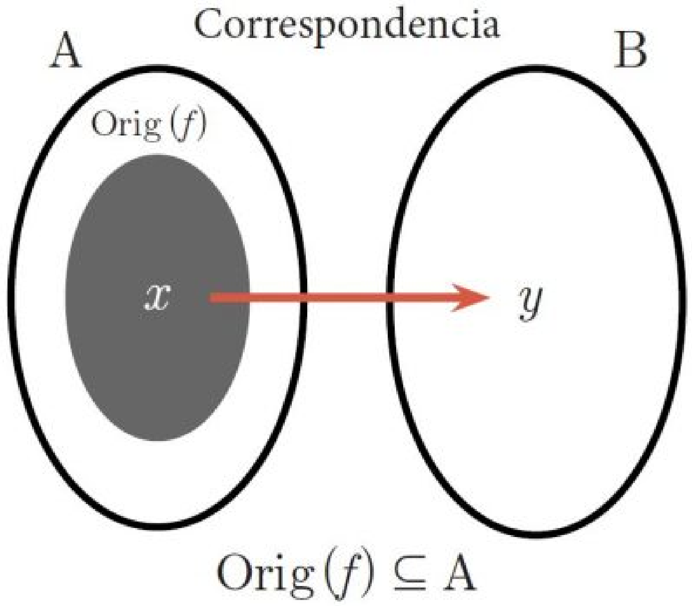
Definición alternativa 1: En otras palabras, una correspondencia $f : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ es una aplicación si para todo elemento del conjunto A le corresponde un único elemento del conjunto B.

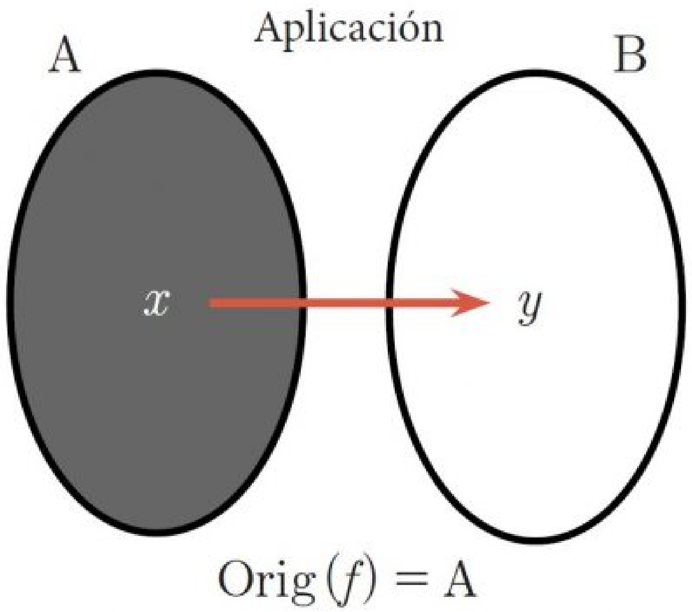
Este es el mismo concepto de una correspondencia univoca, solo que en este caso el conjunto origen o dominio es ahora todo el conjunto de partida A y no un subconjunto de A como es de costumbre.

Definición alternativa 2: También se dice que una correspondencia $f : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ que define una relación F es una aplicación si cumple la condiciones de existencia y unicidad y son:

- $\forall a \in \mathrm{A}, \exists b \in \mathrm{B} | (a, b) \in F$
- $[(a, b) \in F \wedge (a, c) \in F] \to b = c$

Veamos los siguientes diagramas comparativos para dos conjuntos A y B:





Tenga en cuenta que en cualquiera de estos dos casos el conjunto imagen sigue siendo un subconjunto del conjunto final $\text{Imag}(f) \subseteq \text{B}$.

Los conceptos de composición de aplicaciones se desarrollará en otra sección junto con otras teorías en un curso de completo de funciones pero definido desde un angulo numérico y no binario como lo estamos haciendo en esta misma sección.

Si gusta, puede visitar la sección anterior de relaciones binarias donde desarrollamos el concepto de composición entre dos relaciones diferentes, de esta manera tendrá una idea a que se refiere el concepto de composición entre dos relaciones.

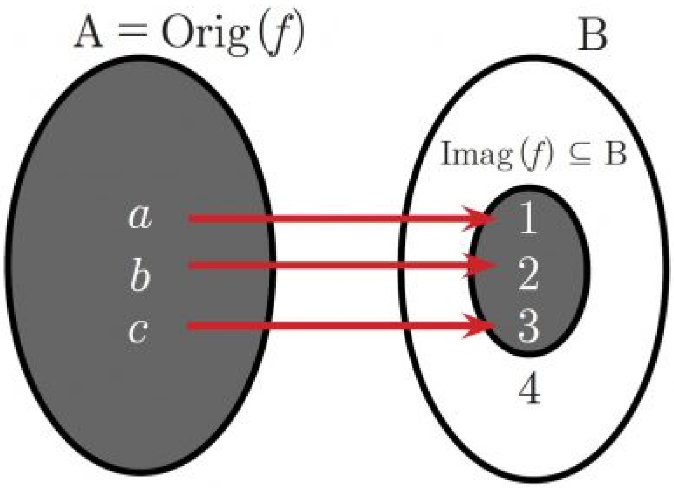
Tipos de aplicaciones

Los tipos de aplicaciones mas sonados en estos títulos son la inyectiva, subreyectiva y la biyectiva. Veamos la primera de ellas.

Aplicación inyectiva (Definición)

> *Una aplicación es inyectiva si y solo si cada elemento del conjunto imagen es homologo con un único elemento del conjunto origen. Simbólicamente para un conjunto inicial* A *tenemos:*
>
> $$\forall x_1, x_2 \in \mathrm{A} | f(x_1) = f(x_2) \rightarrow x_1 = x_2$$
> $$\mathrm{o}$$
> $$\forall x_1, x_2 \in \mathrm{A} | x_1 \neq x_2 \rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Veamos los siguientes diagramas sagitales:



Observe que cada elemento del conjunto imagen es homologo (le corresponde) con cada elemento del conjunto inicial u origen ($\mathrm{Orig} p = \mathrm{A}$), tenga en cuenta que si no hemos dicho nada del conjunto imagen en la definición de aplicación, significa que puede ser un subconjunto o igual al conjunto final, es decir $\mathrm{Imag}(f) = \mathrm{B}$.

Observe que una aplicación inyectiva es una correspondencia biunívoca.

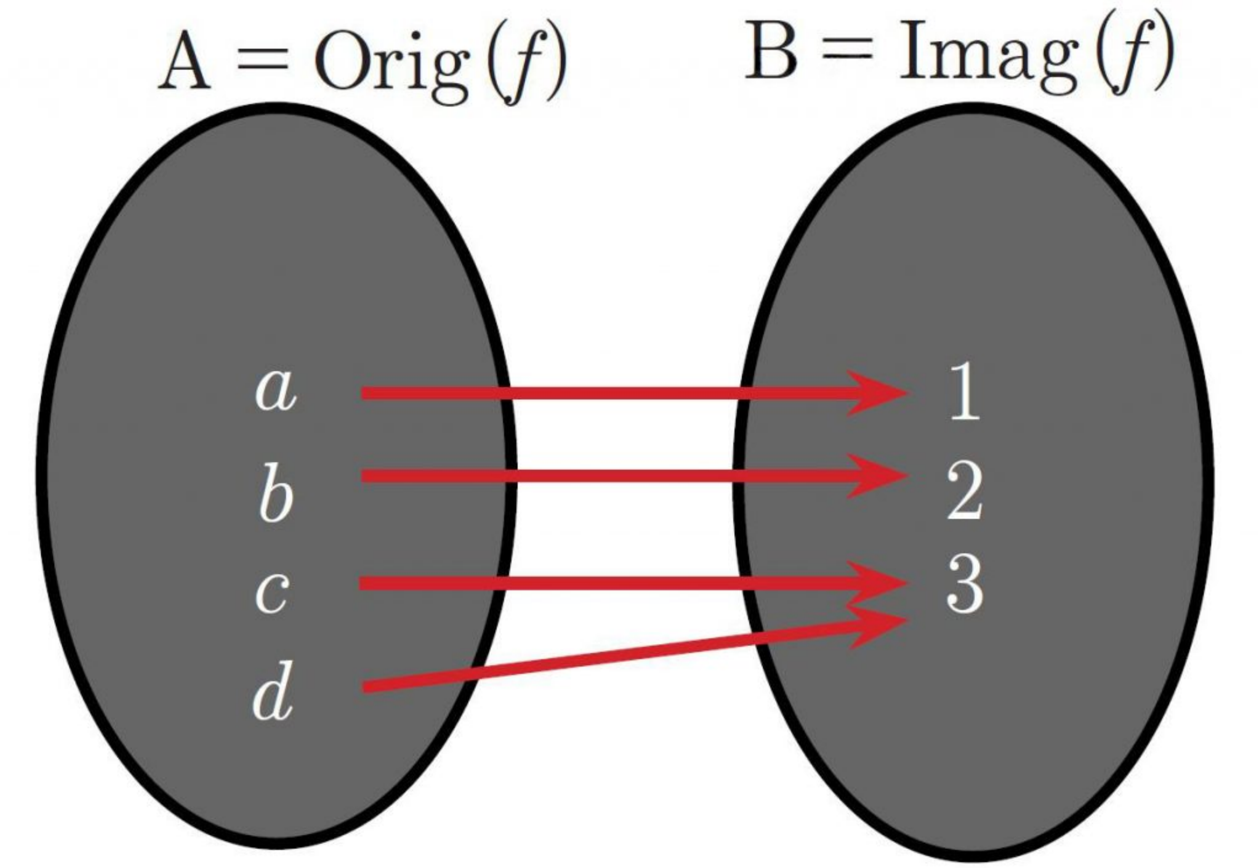
Aplicación sobreyectiva (Definición)

> *Una aplicación es subreyectiva si y solo si cada elemento del conjunto final le corresponde al menos un elemento del conjunto origen, o su equivalente, una aplicación es subreyectiva si el conjunto imagen es igual al conjunto final. Simbólicamente para una aplicación* $f : \mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B}$ *es cumple:*
>
> $$\forall y \in \mathrm{B}, \exists x \in \mathrm{A} | y = f(x)$$

Su equivalente también puede escribirse así: Una aplicación $f : \mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B}$ es su sobreyectiva si:

$$\mathrm{Imag}(f) = \mathrm{B}$$

Con una representación gráfica es mas fácil de entender este concepto:

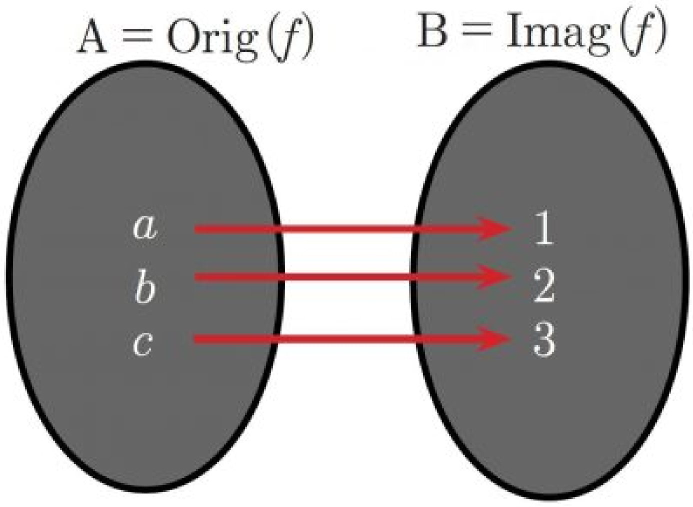


En esta ilustración vemos que el conjunto inicial y final son el origen e imagen de la aplicación f, también podemos ver que cualquier elemento del conjunto imagen puede tomar 1 o mas elementos del conjunto origen.

Aplicación biyectiva (Definición)

> *Una aplicación es biyectiva si una correspondencia es biunívoca y ademas el conjunto origen e imagen son el conjunto inicial y final respectivamente. En otras palabras, una aplicación es biyectiva si es inyectiva y sobreyectiva a la vez.*

Es el tipo de aplicación es mas estricta de las dos anteriores pero la mas sencilla de entender por su sencillez y simplificación, también porque es una aplicación que va directamente al grano. Veamos el siguiente diagrama y juzguen por ustedes mismos:



Observe que un único elemento de cada uno del conjunto inicial le corresponde un único elemento del conjunto final. Los elementos a, b y c son homólogos solamente con 1, 2 y 3 respectivamente. Y debe ser aplicado a todos los elementos del conjunto inicial y final, es decir, debe cumplir que $\mathrm{A} = \mathrm{Orig}(f)$ y $\mathrm{B} = \mathrm{Imag}(f)$. Para este caso, se dice que existe una regla de correspondencia.

Como funciones y aplicaciones son exactamente lo mismo, quiero terminar con una sección aclaratoria cuando se trabajan con el concepto de correspondencia cuando existe varias conjuntos como conjunto producto inicial sobre otro grupo de conjuntos como producto final. De esta manera estaría finalizando la sección actual.

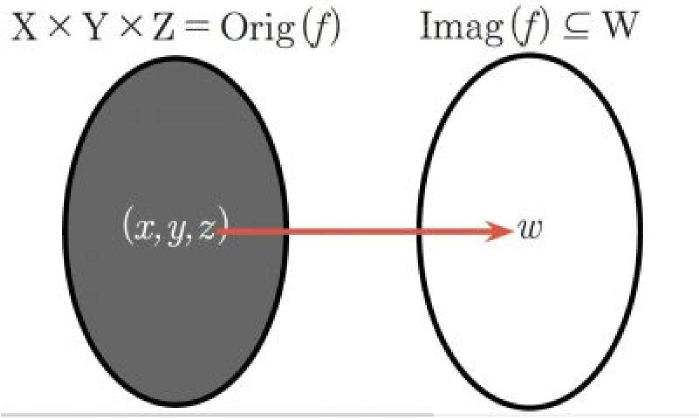
Funciones de varias variables (Introducción)

Las relaciones binarias y correspondencia entre dos conjuntos siempre se trabajan, valga la redundancia, entre dos conjuntos. No existe, si se me permite a expresión, relaciones ternarias o cuaternarias, pero entonces, ¿**como podemos desarrollar funciones o aplicaciones de mas de una variable**?.

Fácilmente podemos describir una función numérica de 3 variables independientes como por ejemplo $w = f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, pero ¿**como podemos representarlo con los conceptos de correspondencia**?. Simple, Tenga en cuenta que las variables x, y y z por ser independientes, significa que pertenecen al conjunto origen, pero para lo que corresponde a este apartado, supondremos que estas 3 variables viene de 3 conjuntos diferentes, es decir, $x \in \mathrm{X}$, $y \in \mathrm{Y}$ y $z \in \mathrm{Z}$, lo cual podemos definir un producto cartesiano de 3 conjuntos $\mathrm{X} \times \mathrm{Y} \times \mathrm{Z}$ tal que:

$$(x, y, z) \in \mathrm{X} \times \mathrm{Y} \times \mathrm{Z}$$

Pero como la triada x, y, z representa a las variables independientes del conjunto origen y como f es una aplicación, significa que $\mathrm{Orig}(f)$, donde $w = f(x, y, z)$. Como w es una variable dependiente de las 3 primeras, entonces debe ser un elemento de algún conjunto de llegada, por ejemplo $w \in \mathrm{W}$, esto significa que el conjunto imagen debe estar contenida en W, es decir, $\mathrm{Imag}(f) \subseteq \mathrm{W}$. Con un gráfico se entenderá mejor:



Entonces existe una regla de correspondencia f que define una función de 3 variables dependientes expresado simbólicamente así:

$$f : \mathrm{X} \times \mathrm{Y} \times \mathrm{Z} \to \mathrm{W}$$

Esto implica la existencia de una relación F tal que:

$$F = \{((x, y, z), w) \in (\mathrm{X} \times \mathrm{Y} \times \mathrm{Z}) \times \mathrm{W} | w = f(x, y, z)\}$$

Un pequeño inconveniente

En la practica, no suele usarse un expresiones como $((x, y, z), w)$, ya que desde el punto de vista geométrico no existe un par ordenado que tenga una primera componente otro par ordenado. Por ejemplo, si tenemos el par ordenado $(a, b) \in \mathrm{A} \times \mathrm{B}$, y queremos trabajar en desde un tercer eje, es decir, en 3 dimensiones, debemos multiplicar al producto $\mathrm{A} \times \mathrm{B}$ al conjunto C donde $c \in \mathrm{C}$, para definir una ubicación en espacio con la terna (a, b, c) y no con $((a, b), c)$ y poder indicar que $(a, b, c) \in \mathrm{A} \times \mathrm{B} \times \mathrm{C}$.

Sin embargo, el producto $\mathrm{A} \times \mathrm{B} \times \mathrm{C}$ no da detalles de quien es el conjunto inicial ni el conjunto final como si lo da un el producto $\mathrm{A} \times \mathrm{B}$. Porque el conjunto inicial bien podría ser A o $\mathrm{A} \times \mathrm{B}$ sobre el conjunto $\mathrm{B} \times \mathrm{C}$ o C como conjunto final respectivamente.

Una solución simple es la siguiente: tener en cuenta los paréntesis del producto entre $\mathrm{A} \times \mathrm{B}$ y C, es decir, el significado de $(a, b, c) \in (\mathrm{A} \times \mathrm{B}) \times \mathrm{C}$ implica que $\mathrm{A} \times \mathrm{B}$ es el conjunto inicial y C el conjunto final, de esta manera podemos definir una función $f : \mathrm{A} \times \mathrm{B}$, de manera análoga, el producto de A y $\mathrm{B} \times \mathrm{C}$, tal que $(a, b, c) \in \mathrm{A} \times (\mathrm{B} \times \mathrm{C})$ donde A es el conjunto inicial y $\mathrm{B} \times \mathrm{C}$ el conjunto final y definir la función $f : \mathrm{A} \to \mathrm{B} \times \mathrm{C}$.

Ejemplo

Si los conjuntos fueran el campo de números reales para $f : \mathrm{X} \times \mathrm{Y} \times \mathrm{Z} \to \mathrm{W}$ es decir, $\mathrm{W} = \mathrm{X} = \mathrm{Y} = \mathrm{X} = \mathbb{R}$, la correspondencia se escribiría así:

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

O su forma abreviada:

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

Esta representación binaria para una función de varias variables indica que existe una función numérica que depende de 3 variables independientes, en este caso, para los números reales. Para una función de n variables se puede escribir así:

$$f : \mathrm{A^n} \to \mathrm{A}$$

Donde A puede representar a los números naturales, enteros, racionales, irracionales, reales, complejos, hipercomplejos o cualquier conjunto arbitrario dado. Por ultimo, tenga en cuenta que escribir esto $f : \mathrm{A^n} \to \mathrm{A}$ es lo mismo que escribir esto $F \subseteq \mathrm{A^n} \times \mathrm{A}$, de aquí, tenga en cuenta que F es el conjunto de las $n+1$ tuplas, es decir:

$$(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{n+1}) \in F \subseteq \mathrm{A^n} \times \mathrm{A}$$

Esto nos indica que si bien f se encuentran en la dimension $n+1$, sabemos A^n es el conjunto inicial y A el conjunto final.

Campo escalar y vectorial de una función

Cuando trabajamos con funciones del tipo $f : \mathrm{A^n} \to \mathrm{A}$, significa que es una función de campo escalar, pero si trabajamos con funciones del tipo $f : \mathrm{A^n} \to \mathrm{A^m}$ donde $m \geq 2$, significa que es una función del campo vectorial.

Si A fuera el campo de los reales y definimos nuestro universo en las 3 dimensiones habituales, habría 2 posibles combinaciones para para las funciones en el campo escalar y vectorial representados por $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ respectivamente. Veamos un ejemplo de estos dos tipos:

Ejemplos

Funciones escalares del tipo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ pueden ser de la siguiente manera:

- $f(x, y) = x^2 + y^2$
- $f(x, y) = xy$
- $f(x, y) = \frac{x+y}{x^2+y^2}$

Funciones vectorial del tipo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, generalmente tienen la forma $\boldsymbol{f}(x) = (f_1(x), f_2(x))$, donde $y = f_1(x)$ y $z = f_2(x)$, algunos ejemplos son:

- $\boldsymbol{f}(x) = (\frac{t}{x^2+1}, \frac{t}{x^2+1})$
- $\boldsymbol{f}(y) = (2y^2, 3y^3)$
- $\boldsymbol{f}(z) = (z^{-3}, 2z^{-5})$

Observe que estamos distinguiendo $\boldsymbol{f}$ en negrita para los funciones vectoriales del f sin negrita para las funciones escalares.

Fin de la sección

Ha sido una sección muy interesante, tal vez mejor que la sección anterior, pensaba terminar este curso con la sección anterior y pensaba irme directo con el curso de los números reales, pero no sería del todo conveniente ya que el curso sería aburridamente extenso y pesado para estudiarlo.

Existe un tipo de relación binaria, se llama relación de equivalencia y es la continuación de esta sección.

Eso es todo amigos, no olviden que esta página será actualizada por una serie de teoremas y ejercicios que no se expuso en esta sección, nos vemos en el próximo capitulo del curso de matemática básica, bye.

Detalles Del Capitulo

Nombre Del Articulo ¿Que es la Correspondencia Matemática?

Descripción Una correspondencia Matemática es una relación binaria de dos conjuntos bajo una propiedad que define la relación de los elementos entre dichos conjuntos.

Autor Sergio Cohaguila

Nombre De La Organización Ciencias Básicas

Logotipo

← Entrada anterior

Entrada siguiente →

CAPITULO DEL CURSO:

RELACIONES MATEMÁTICAS