Cálculo II
7. Aplicaciones de la derivada.

La bibliografía que utilizaremos para este tema es:

- Principal: Capítulo 6 de las Notas de clase.
- Principal: Sección 2.4 , 2.6 y 4.3 , Marsden-Tromba , "Cálculo vectorial", 5 ed. Perason Addison-Wesley.

1. Calcule el vector velocidad y aceleración para la curva $\gamma(t) = (\cos t, sent)$, $t \in (0, \pi)$. Interpretarlo geometricamente

2. Suponiendo que una partícula sigue la trayectoria $\sigma(t) = \left(t^2, t^3 - 4t, 0\right)$ y sale por una tangente en $t = 2$. Calcule la posición de la partícula en $t = 3$.

3. Supongamos que un pato nada sobre la circunferencia $\gamma(t) = (\cos t, sent)$, $t \in (0, 2\pi)$ y que la temperatura del agua está expresada por la fórmula $T(x, y) = x^2 e^y - xy^3$. Halle el cambio de la temperatura del agua por unidad de tiempo t. Planteelo de dos formas distintas.

4. Teniendo en cuenta la siguiente definición: Sea $\sigma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ una trayectoria de clase C^1, la **longitud** de σ está definida por
$$l(\sigma) = \int_a^b \left\|\sigma'(t)\right\| dt$$
Calcule la longitud de arco de:
   (a) la hélice definida por $\sigma : [0, 4\pi] \to \mathbb{R}^3$, $\sigma(t) = (\cos 2t, sen2t, 5t)$.
   (b) la curva $r : [0, 10] \to \mathbb{R}^2$, $\sigma(t) = \left(t^3, 24t\right)$.

5. Demuestre que la trayectoria $r(t) = (\cos t, sent)$ es una línea de flujo para el campo vectorial $F(x, y) = (-y, x)$. ¿Hay más lineas de flujo?

6. Calcule las líneas de campo de la función vectorial $F(x, y) = (x, -y)$ y determine la que pasa por el punto $(1, 2)$. Interprete el resultado gráficamente.

7. Calcule el gradiente de las funciones $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = \frac{\ln\left(x^2+1\right)}{x-y}$ y $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $g(x, y, z) = xy.\cos(yz)$.

8. Sea $f(x, y) = \frac{x^2}{4} + y^2$, Determine la ecuación de la curva de nivel que pasa por el punto $(2, 1)$ y calcule el gradiente $\nabla f\ (2, 1)$. Interprete geométricamente.

9. **Derivada direccional.**
   (a) Para cada una de las siguientes funciones, encuentre la derivada direccional en el punto $\mathbf{x}_0$, en la dirección del vector $\mathbf{u}$.
      i. $f(x, y) = x^2 - y^2$, $\mathbf{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$, $\mathbf{x}_0 = (1, 1)$.
      ii. $f(x, y, z) = xyz$, $\mathbf{u} = (1, 1, 1)$, $\mathbf{x}_0 = (1, 0, 1)$..

(b) Demuestre que la función f definida por

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{|x|y}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

tiene derivada direccional en todas las direcciones en $(0,0)$ pero no es diferenciable en ese punto.

10. El punto $(1,-1)$ está sobre la superficie $z=-10\sqrt{|xy|}$. Partiendo del punto dado, ¿en qué dirección $\mathbf{u}$ debe uno moverse en cada caso?

(a) i. para subir más rapidamente,
   ii. para permanecer en el mismo nivel,
   iii. para subir con pendiente 1.

11. Halle, utilizando la **aproximación lineal**, el valor aproximado de $\sqrt{(5,02)^2+(11,9)^2}$. Ayuda: utilice $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ en $(x_0,y_0)=(5,12)$ y $(h,k)=(0.02,-0.1)$.

12. La altura de un cono circular es de $30cm.$ en un instante y crece a razón de $2cm/seg.$, el radio de la base es de $20cm.$ y crece a razón de $1cm/seg.$ ¿A qué velocidad crece el volumen en ese instante? Escriba dV. $\left(V=\frac{1}{3}\pi r^2h\right)$

13. Si la distribución de temperatura en cada punto (x,y,z) de la esfera sólida de radio 3 centrada en el origen es dada por $T(x,y,z)=yz+zx+xy$, encuentre la dirección en la cual T crece más rápidamente en $(1,2,2)$ y en $(3,2,1)$

14. Considerando el **Teorema de la función inversa:** Sea $A\subset\mathbb{R}^n$ un abierto y sea $F:A\to\mathbb{R}^n$ una función C_1. Sea $\mathbf{x}_0=(a_1,...,a_n)$ y $\mathbf{y}_0=(b_1,...,b_n)$ tal que $\mathbf{y}_0=F(\mathbf{x}_0)$. Si

$$DF(\mathbf{x}_0)=\frac{\partial(f_1,..,f_n)}{\partial(x_1,..,x_n)}(\mathbf{x}_0)=\begin{vmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0)\\ \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0)\end{vmatrix}\neq 0$$

entonces

i) existen conjuntos abiertos U y V en $\mathbb{R}^n$ tal que $\mathbf{x}_0\in U$ y $\mathbf{y}_0\in V$ donde $F:U\to V$ es uno a uno sobre U, $F(U)=V$

ii) si G es la inversa de F, $G:V\to U$ tal que $G(F(\mathbf{x}))=\mathbf{x}$, $\mathbf{x}\in\mathbf{U}$ entonces G es C^1 .
Analice cada uno de los incisos siguientes:

(a) Sea $(x,y)=F(r,\theta)=(r\cos\theta,r sen\theta)$, ¿es posible escribir r y θ en términos de x,y para $r=0$? ¿cerca de qué puntos (r,θ) podemos realizarlo ?

(b) Considerando la función $(x,y,z)=F(\rho,\alpha,\beta)=(\rho\cos\alpha\, sen\beta,\rho\, sen\alpha\, sen\beta,\rho\cos\beta)$, ¿cerca de qué puntos (ρ,α,β) podemos resolver para escribir ρ,α y β en términos de x,y,z?

15. **Divergencia.**

(a) Calcule la divergencia de la función vectorial $\overrightarrow{F}(x,y,z)=\left(3x^2y-z^3\right)\mathbf{i}+\left(x^2y^2+y^3z\right)\mathbf{j}+\left(xz^3-yz^2\right)\mathbf{k}$ en el punto $(-2,3,2)$.

(b) Sea $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (x+3y)\,\mathbf{i} + (y-2z)\,\mathbf{j} + (x+\alpha z)\,\mathbf{k}$. Halle el valor de $\alpha \in \mathbb{R}$ de modo que el campo $\overrightarrow{F}$ sea solenoidal, es decir, div $\overrightarrow{F}(x,y,z) = 0\ \forall (x,y,z) \in Dom\overrightarrow{F}$.

16. **Rotor.** Halle el rotor de los siguientes campos vectoriales.

    (a) $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (senx - y)\,\mathbf{i} + \left(x^2 + z\right)\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$

    (b) $\overrightarrow{F}(x,y,z) = \left(x^2 - \ln y\right)\mathbf{i} + xyz\,\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$ en el punto $(-1,1,0)$.

17. Una ecuación para una función $f(x,y)$ desconocida que relaciona derivadas parciales con respecto a al menos dos variables diferentes se llama **Ecuación diferencial parcial**. Si sólo aparecen derivadas con respecto a una variable se llama **Ecuación diferencial ordinaria**. Una función $g(\mathbf{x})$ es solución de la ecuación diferencial si verifica dicha ecuación.

    Considerando la **Ecuación de Laplace**

    $$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = 0$$

    y la **Ecuación de ondas**

    $$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = 0$$

    Decide en cada caso si las siguientes funciones son solución de la Ecuación de Laplace, de la Ecuación de ondas o de ninguna de las dos.

    a) $f(x,y) = 2x^2 - 2y^2$

    b) $f(x,y) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4$

    c) $f(x,y) = sen\,(5x)\,sen\,(5y)$

    d) $f(x,y) = \ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$

Ejercicios adicionales

1. Sea $f(x,y) = y^{\alpha} e^{-\frac{x^2}{4y}}$ para $x \geq 0$ e $y > 0$. Halle el valor de la constante α tal que $f(x,y)$ satisfaga la ecuación

   $$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{x^2}\left(\frac{\partial}{\partial x} x^2 \frac{\partial f}{\partial x}\right), \qquad x, y > 0$$

2. (Final febrero 2017) Homero Simpson se durmió sobre el panel de control de la estación nuclear de Springfield y como resultado de ello, la planta emanó radiación. Suponiendo que la intensidad de radiación está dada por la función $f(x,y) = 2x + x^2y + y^2$, donde x e y son medidas en kilómetros.

   (a) Suponiendo que estás localizado en $(1,1)$. En qué dirección debes moverte para que decrezca la intensidad de radiación tanto como sea posible?

   (b) Suponiendo que parte de la posición $(1,1)$ en la dirección del vector $(1,2)$ con una velocidad de 10km/h ¿Cuál es la razón de cambio de la intensidad de radiación en función del tiempo?

   (c) Utilice la aproximación lineal para estimar el nivel de radiación de un vecino localizado en $(1.1, 1.2)$

3. Encuentre la aproximación lineal $L(x,y)$ de la función $f(x,y) = \sqrt{10 - x^2 - 5y^2}$ en $(2,1)$ y estime $f(1.95, 1.04)$.

4. Si sabemos que la linealización de la función $f(x,y) = \sqrt{y + \cos^2 x}$ en el punto (x_0, y_0) es $L(x,y) = 1 + \frac{1}{2}y$. Encuentre (x_0, y_0)

5. Sean las siguientes ecuaciones diferenciales

   (a) La Ecuación de onda $\frac{\partial^2 f(t,x)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f(t,x)}{\partial x^2}$ rige el movimiento de la luz o del sonido, verifique que la función $f(t,x) = sen(x-t) + sen(x+t)$ satisface la ecuación.

   (b) La Ecuación del calor $\frac{\partial f(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial^2 f(t,x)}{\partial x^2}$ describe la difusión del calor o la propagación de una epidemia, verifique que la función $f(t,x) = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-x^2/4t}$ satisface la ecuación.

   (c) La Ecuación de Laplace $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = 0$ determina la forma de una membrana, verifique que la función $f(t,x) = x^3 - 3xy^2$ satisface la ecuación.

6. Escriba al Laplaciano en coordenadas polares y en coordenadas esféricas.

2020, FCEN, UNCuyo