

Trabajo Práctico 2: Límites y Derivadas

Sección 2.2

1) Explique con sus palabras qué significan las siguientes expresiones:

a) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$.

¿Es posible que se cumpla esta proposición y $f(2)=3$? Dé una explicación.

b) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 3$ y $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 7$.

En esta situación, ¿es posible que $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ exista? Dé una explicación.

c) $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \infty$

d) $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = -\infty$

2) Para la función f cuya gráfica se da, proporcione el valor de la cantidad dada, si existe. Si no la hay, explique por qué.

a) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

b) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$

c) $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$

d) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

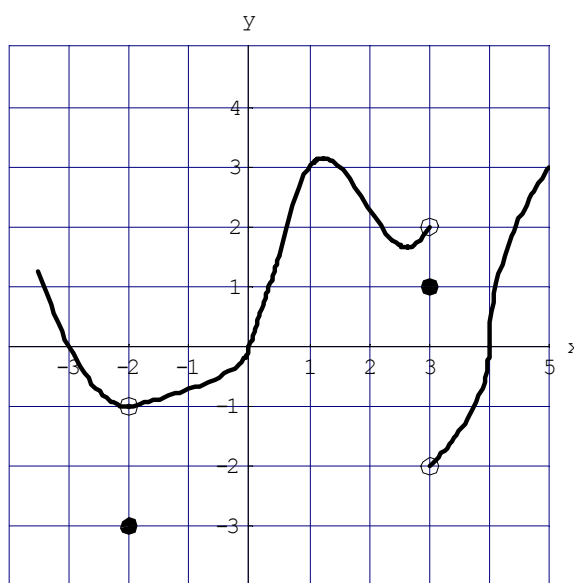
e) $f(3)$

f) $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)$

g) $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$

h) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$

i) $f(-2)$



3) Para la función f cuya gráfica se muestra, conteste a lo que se pide en cada inciso.

a) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

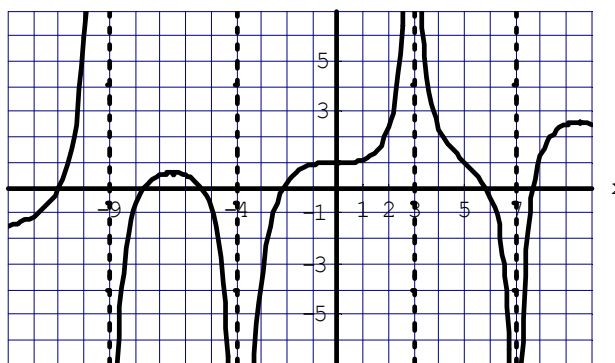
b) $\lim_{x \rightarrow 7} f(x)$

c) $\lim_{x \rightarrow -4} f(x)$

d) $\lim_{x \rightarrow -9^-} f(x)$

e) $\lim_{x \rightarrow -9^+} f(x)$

f) Las ecuaciones de las asíntotas verticales.



4) Trace la gráfica de un ejemplo de una función f que satisfaga todas las condiciones dadas:

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 4, \quad \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2, \quad f(3) = 3, \quad f(-2) = 1.$$

5) Evalúe la función en los números dados correctamente hasta el sexto decimal. Use los resultados para conjeturar el valor del límite o explique por qué no existe.

Trabajo Práctico 2: Límites y Derivadas

$$g(x) = \frac{x-1}{x^3-1}; \quad x = 0,2; 0,4; 0,6; 0,8; 0,9; 0,99; 1,8; 1,6; 1,4; 1,2; 1,1; 1,01;$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^3-1}$$

6) Determine los siguientes límites.

a) $\lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{6}{x-5}$

b) $\lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{6}{x-5}$

c) $\lim_{x \rightarrow 5^+} \ln(x-5)$

7) Determine $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x^3-1}$ y $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x^3-1}$ como se indica en cada inciso.

a) Evaluando $f(x) = \frac{1}{x^3-1}$ para valores de x que se aproximen a 1 por la derecha y por la izquierda.

b) A partir de la gráfica de f .

8) a) Evalúe la función f dada por $f(x) = x^2 - \frac{2^x}{1000}$ para $x = 1; 0,8; 0,6; 0,4; 0,2; 0,1$ y $0,05$, y estime el valor de

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(x^2 - \frac{2^x}{1000} \right)$$

b) Evalúe $f(x)$ para $x = 0,04; 0,02; 0,01; 0,005; 0,003$ y $0,001$. Vuelva a estimar el valor del límite anterior.

Sección 2.3

9) Dado que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -3$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = 8$,

encuentre los límites que existan. Si el límite no existe, explique por qué.

a) $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + h(x)]$

d) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)}$

g) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$

b) $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^2$

e) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)}$

h) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{2f(x)}{h(x) - f(x)}$

c) $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[3]{h(x)}$

f) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{h(x)}$

10) Evalúe el límite y justifique cada paso indicando la(s) ley(es) de los límites apropiada(s).

a) $\lim_{x \rightarrow 4} (5x^2 - 2x + 3)$

c) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x-2}{x^2 + 4x - 3}$

b) $\lim_{x \rightarrow 3} (x^3 + 2)(x^2 - 5x)$

d) $\lim_{x \rightarrow 4^-} \sqrt{16 - x^2}$

11) Evalúe el límite, si existe.

a) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - x + 12}{x + 3}$

c) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x + 2}{x^2 - x - 6}$

b) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - x - 12}{x + 3}$

d) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(h-5)^2 - 25}{h}$

Trabajo Práctico 2: Límites y Derivadas

e) $\lim_{t \rightarrow 9} \frac{9-t}{3-\sqrt{t}}$

f) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{2}}{x-2}$

12) Si $1 \leq f(x) \leq x^2 + 2x + 2$ para toda x , encuentre $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

13) Pruebe que $\lim_{x \rightarrow 0} \left[x^4 \cos\left(\frac{2}{x}\right) \right] = 0$.

14) Encuentre el límite, si existe. Si no lo hay, explique por qué.

a) $\lim_{x \rightarrow -4} |x+4|$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x-2|}{x-2}$

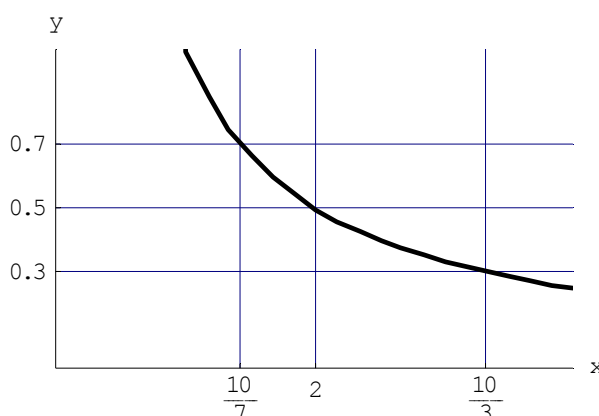
15) Muestre por medio de un ejemplo que $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)]$ puede existir aunque ni $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ni $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ existan.

Sección 2.4

16) ¿Cuánto se debe acercar x a 2 para que $5x+3$ quede a una distancia menor que a) 0,1 y b) 0,01 de 13?

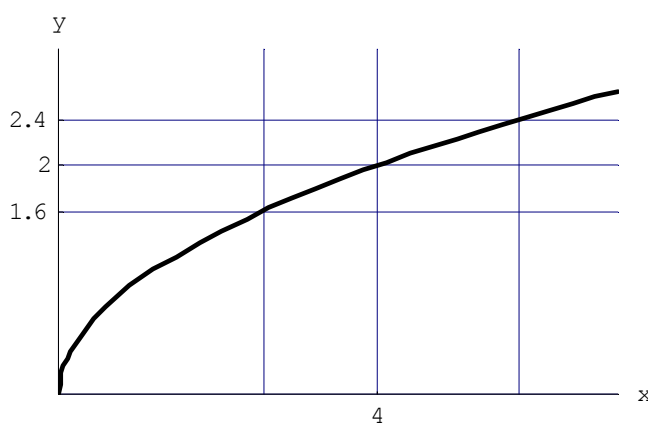
17) Con la siguiente gráfica de la función f dada por $f(x) = 1/x$, halle un número δ tal que

$$\left| \frac{1}{x} - 0,5 \right| < 0,2 \quad \text{siempre que} \quad |x - 2| < \delta.$$



18) Use la gráfica de la función f dada por $f(x) = \sqrt{x}$ para encontrar un número δ tal que

$$|\sqrt{x} - 2| < 0,4 \quad \text{siempre que} \quad |x - 4| < \delta.$$



Trabajo Práctico 2: Límites y Derivadas

?

?

19) Demuestre cada una de las siguientes afirmaciones utilizando la definición de límite. En el inciso (e) realice, además, un diagrama representando ε y δ en el gráfico de la función.

a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x}{5} = \frac{3}{5}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$

b) $\lim_{x \rightarrow -5} \left(4 - \frac{3x}{5} \right) = 7$

e) $\lim_{x \rightarrow 2} (3x - 2) = 4$.

c) $\lim_{x \rightarrow a} x = a$

20) Indique cuánto se debe acercar x a -3 para que $\frac{1}{(x+3)^4} > 10.000$.

21) Con la definición de límite infinito, pruebe que $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{1}{(x+3)^4} = \infty$.

22) Demuestre:

a) Las siguientes propiedades de límites. Si c es una constante y existen los límites $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ y

$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$, entonces:

i) $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$

ii) $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x)$

iii) $\lim_{x \rightarrow a} c f(x) = c \lim_{x \rightarrow a} f(x)$

iv) $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$

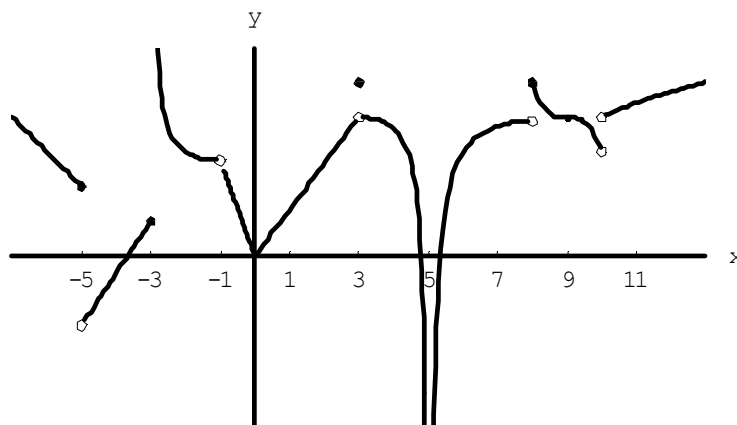
v) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$ si $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$.

b) El teorema de la compresión.

Sección 2.5

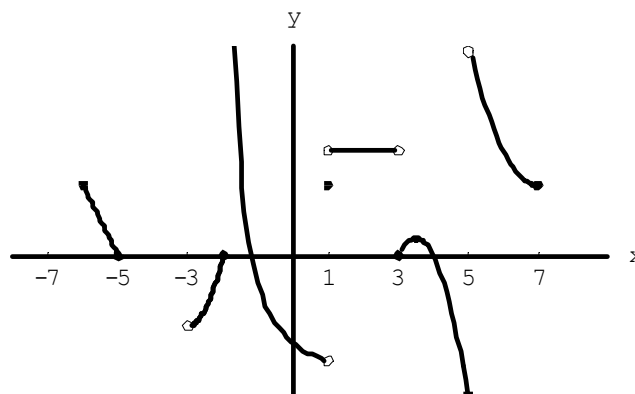
23) a) A partir de la gráfica de la función f , dé los valores de x en que f es discontinua y explique por qué.

a) Para cada uno de los valores de x que se den en el inciso (a), determine si f es continua por la derecha, por la izquierda o por ninguno de los dos lados.



Trabajo Práctico 2: Límites y Derivadas

24) A partir de la gráfica de la función g , dé los intervalos sobre los que g es continua.



25) Trace la gráfica de una función que sea continua en todas partes, excepto en $x = 3$, y sea continua desde la izquierda en 3.

26) Use la definición de continuidad y las propiedades de los límites para mostrar que:

a) la función dada por $f(x) = (x + 2x^3)^4$ es continua en -1 ,

b) la función dada por $g(x) = x\sqrt{16 - x^2}$ es continua en $[-4, 4]$.

27) Explique por qué la función es discontinua en el punto dado. Bosqueje la gráfica.

a) $f(x) = \ln|x - 2|$, $a = 2$.

b) $g(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$, $a = -1$.

28) Explique por qué la función es continua en todo punto en su dominio, aplicando los teoremas correspondientes. Dé el dominio.

a) $F(x) = \frac{x}{x^2 + 5x + 6}$

b) $h(x) = \sqrt{16 - x^2} (x^2 - 2)$

c) $f(x) = e^x \sin 5x$

29) Aplique la continuidad para evaluar el límite.

a) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{5 + \sqrt{x}}{\sqrt{5 + x}}$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} e^{x^2 - x}$

30) ¿Cuál de las siguientes funciones tiene una discontinuidad evitable en a ? Si es evitable, halle una función g que coincida con f para todo $x \neq a$ y que sea continua en toda la recta real $\mathbb{R}$.

a) $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 8}{x + 2}$, $a = -2$

c) $f(x) = \frac{x^3 + 64}{x + 4}$, $a = -4$

b) $f(x) = \frac{x - 7}{|x - 7|}$, $a = 7$

d) $f(x) = \frac{3 - \sqrt{x}}{9 - x}$, $a = 9$

31) Suponga que una función f es continua sobre $[0, 1]$, excepto en $0,25$ y que $f(0) = 1$ y $f(1) = 3$. Trace dos gráficas posibles de f , una en que se muestre que f podría no satisfacer la conclusión del teorema del valor intermedio (considere $N=2$) y la otra que muestre que f todavía podría satisfacer ese teorema, aún cuando no satisfaga la hipótesis.

Sección 2.6

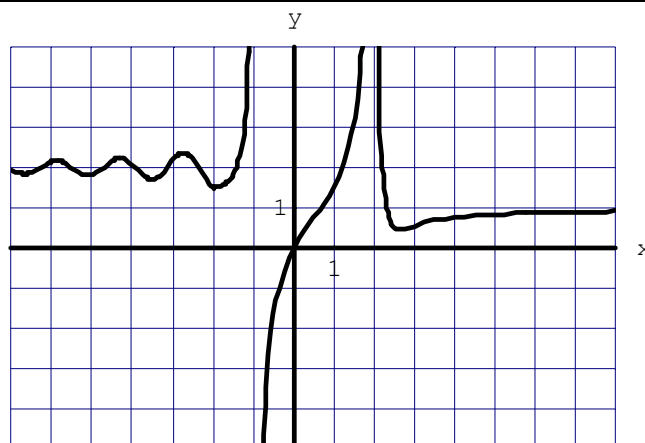
32) Para la función f cuya gráfica se exhibe, determine:

a) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

b) $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$

Trabajo Práctico 2: Límites y Derivadas

- c) $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$
 d) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$
 e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
 f) Las ecuaciones de las asíntotas.



33) Bosqueje la gráfica de un ejemplo de una función f que satisfaga todas las condiciones dadas en cada inciso.

- a) $f(0)=0$, $f(1)=1$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$, f es impar.
 b) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$.

34) Evalúe el límite.

- a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+4}{x^2-2x+5}$
 b) $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r^4-r^2+1}{r^5+r^3-r}$
 c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+4x^2}}{4+x}$
 d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2+3x+1} - x \right)$
 e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1} \right)$
 f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \cos x$
 g) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x}$
 h) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x})$

35) Determine las asíntotas horizontales y verticales de cada curva. Compruebe su trabajo graficando la curva y estimando las asíntotas.

- a) $y = \frac{x}{x+4}$
 b) $h(x) = \frac{x}{\sqrt[4]{x^4+1}}$

36) Halle $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2(x-2)(1-x)$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2(x-2)(1-x)$. Con esta información, y las coordenadas al origen, realice un esquema aproximado de la gráfica de la función.

37) Use el “teorema del emparedado” para evaluar $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}$.

38) a) ¿De qué magnitud debe ser x para que $1/x^2 < 0,0001$?

- b) Demuestre que $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = 0$ a partir de la definición de límite.

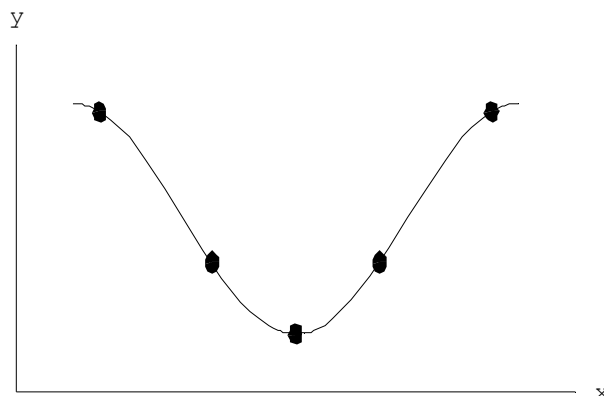
Sección 2.7

2) Una curva tiene la ecuación $y = f(x)$.

- a) Encuentre una expresión para la ecuación de la recta secante a la curva en los puntos $P(3, f(3))$ y $Q(x, f(x))$, siendo x un número real.
 b) Escriba una expresión para la pendiente de la recta tangente a la curva en P .

Trabajo Práctico 2: Límites y Derivadas

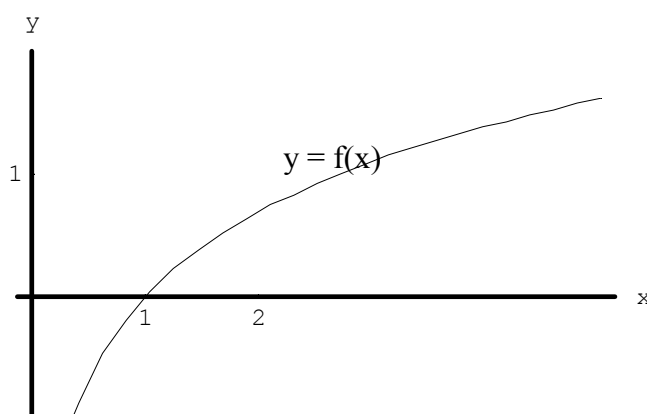
- 39) Considere la pendiente de la curva en cada uno de los cinco puntos que se muestran en la gráfica. Enumere estas cinco pendientes en orden decreciente y explique su razonamiento.



- 40) a) Encuentre la pendiente de la recta tangente a la parábola $y = x^2 + 2x$, en el punto $(-3, 3)$.
 b) Encuentre la ecuación de la recta tangente a la parábola del inciso (a), en el punto $(-3, 3)$.
 c) Grafique ambas curvas.
- 41) En cada caso, halle la ecuación de la recta tangente a la curva, en el punto dado.
 a) $y = 1 - 2x - 3x^2$, $(-2, -7)$.
 b) $\frac{1}{x^2}$, $\left(-2, \frac{1}{4}\right)$.
- 42) a) Encuentre la pendiente de la recta tangente a la curva $y = 2/(x+3)$ en el punto $x = a$.
 b) Halle las pendientes de las rectas tangentes en los puntos donde x vale i) -1 , ii) 0 y iii) 1 .
- 43) Se lanza una pelota hacia el aire con una velocidad de 40 pies/s, su altura (en pies) después de t segundos se expresa con $y = 40t - 16t^2$. Encuentre la velocidad cuando $t = 2$.

Sección 2.8

- 44) En la gráfica dada de f , represente $f(2)$, $f(2+h)$, $f(2+h)-f(2)$ y h (Tome $h > 0$). ¿Cuál recta tiene la pendiente $\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$?

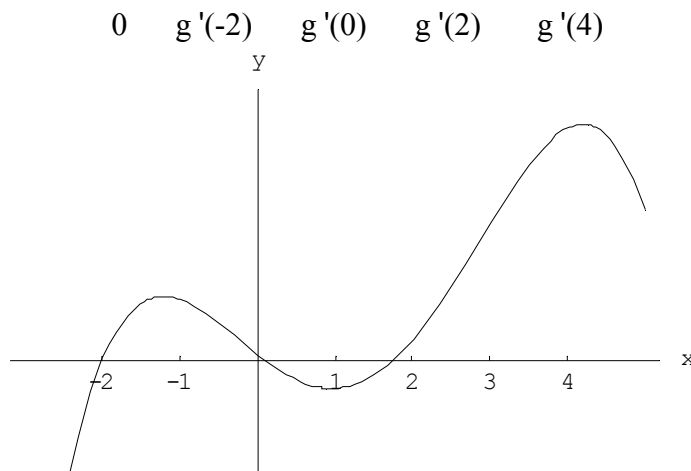


- 45) Para la función f cuya gráfica se muestra en el ejercicio anterior, disponga los números siguientes en orden creciente y explique su razonamiento:

$$0, \quad f'(2), \quad f(3) - f(2), \quad \frac{1}{2}[f(4) - f(2)].$$

Trabajo Práctico 2: Límites y Derivadas

- 46) Para la función g cuya gráfica se da, disponga los números siguientes en orden creciente y explique su razonamiento:



- 47) Si la recta tangente a $y = f(x)$, en $(4,3)$, pasa por el punto $(0,2)$, encuentre $f(4)$ y $f'(4)$.
 48) Grafique una función f para la cual $f(0) = 0$, $f'(0) = 3$, $f'(1) = 0$ y $f'(2) = -1$.
 49) Si $f(x) = 3x^2 - 5x$, encuentre $f'(2)$ y úsela para hallar la ecuación de la recta tangente a la parábola $y = 3x^2 - 5x$, en el punto $(2,2)$.
 50) Encuentre $f'(a)$, si $f(x) = 1 + x - 2x^2$.
 51) Cada límite representa la derivada de alguna función f , en algún número a . Establezca f y a en cada caso.

a) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+h} - 1}{h}$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^9 - 1}{x - 1}$

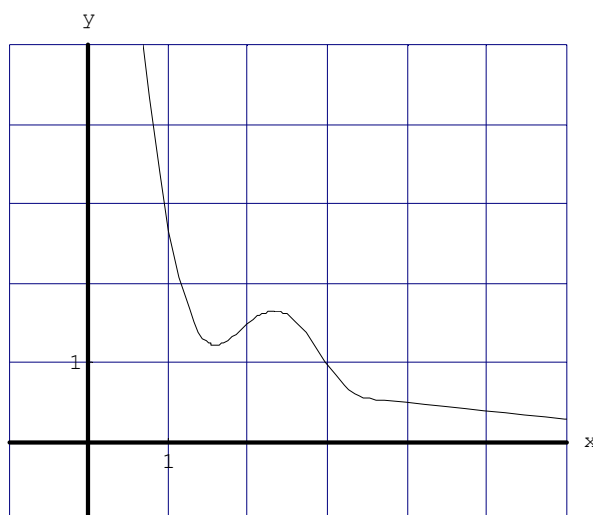
- 52) Una partícula se mueve a lo largo de una línea recta con la ecuación del movimiento $s(t) = t^2 - 6t - 5$, donde s se mide en metros y t en segundos. Encuentre la velocidad de la partícula cuando $t = 2$.
 53) Determine si $f'(0)$ existe o no, sabiendo que

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Sección 2.9

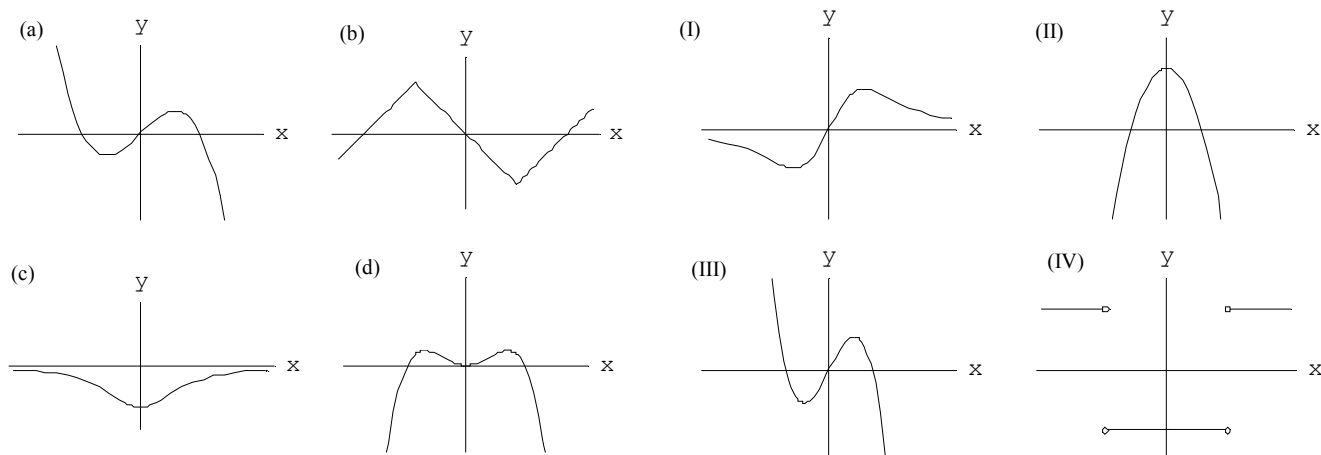
- 54) Use la gráfica dada para estimar el valor de cada derivada. Luego, grafique f' .

- a) $f'(1)$
 b) $f'(2)$
 c) $f'(3)$
 d) $f'(4)$

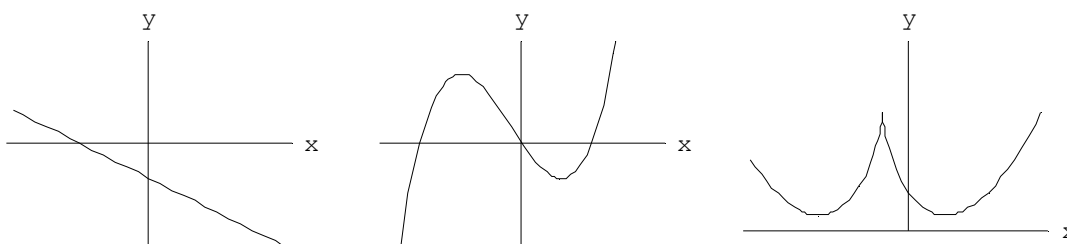


Trabajo Práctico 2: Límites y Derivadas

55) Correlacione la gráfica de cada función dada en las figuras (a)-(d) con las gráficas de sus derivadas (figs. I-IV). Dé las razones para sus selecciones.



56) A partir de la gráfica de la función f dada, suponiendo que los ejes tienen escalas iguales, trace la gráfica de f' .



57) Trace una gráfica cuidadosa de la función f dada por $f(x) = \sin(x)$ y, debajo de ella, la gráfica de f' . ¿Puede conjeturar una fórmula para $f'(x)$ a partir de su gráfica?

58) Sea $f(x) = x^2$.

- Estime los valores de $f'(0)$, $f'(1/2)$, $f'(1)$ y $f'(2)$.
- Aplique la simetría para deducir los valores de $f'(-1/2)$, $f'(-1)$ y $f'(-2)$.
- Con los resultados de los incisos (a) y (b), proponga una fórmula para $f'(x)$.
- Aplique la definición de derivada para probar que su proposición del inciso (c) es correcta.

59) Encuentre la derivada de la función f dada aplicando la definición. Dé dominios de la función y su derivada.

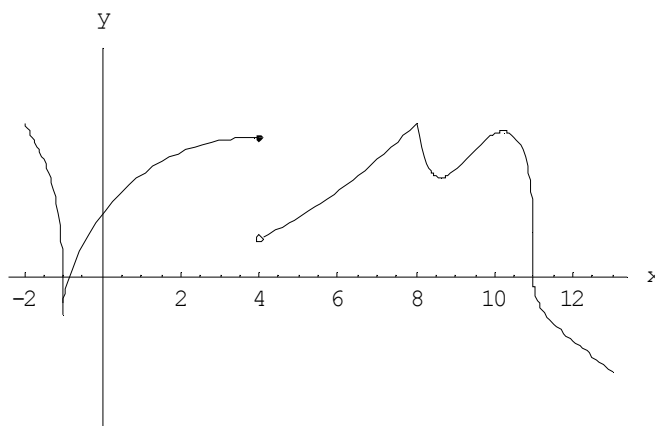
- $f(x) = 5x + 3$
- $f(x) = x^3 - x^2 + 2x$

60) a) Si $f(x) = x - (2/x)$, encuentre $f'(x)$.

- Vea si su respuesta del inciso (a) es razonable comparando las gráficas de f y f' .

Trabajo Práctico 2: Límites y Derivadas

61) Se da la gráfica de f . Indique los valores de x en que f no es diferenciable. Justifique su respuesta.



62) Demuestre que la función f dada por $f(x) = |x - 6|$ no es diferenciable en 6. Encuentre una fórmula para f' y trace su gráfica.

63) La derivada izquierda y la derivada derecha de una función f en a se definen como sigue:

$$f'_-(a) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \text{y} \quad f'_+(a) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

en caso de que existan estos límites. Entonces $f'(a)$ existe si y sólo si estas derivadas laterales existen y son iguales.

a) Halle $f'_-(4)$ y $f'_+(4)$ para la función f dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 5 - x & \text{si } 0 < x < 4 \\ \frac{1}{5 - x} & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

b) Trace la gráfica de f .

c) ¿En qué valores es discontinua f ?

d) ¿En qué valores la función f no es derivable?

Ejercicios

64) Demostrar que

a) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(a+h)$.

b) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ si y sólo si $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - l] = 0$.

c) Dar un ejemplo en el que exista $\lim_{x \rightarrow 0} f(x^2)$, pero no $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

65) Si $f(x) < g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, ¿se sigue de ello necesariamente que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) < \lim_{x \rightarrow a} g(x)$?