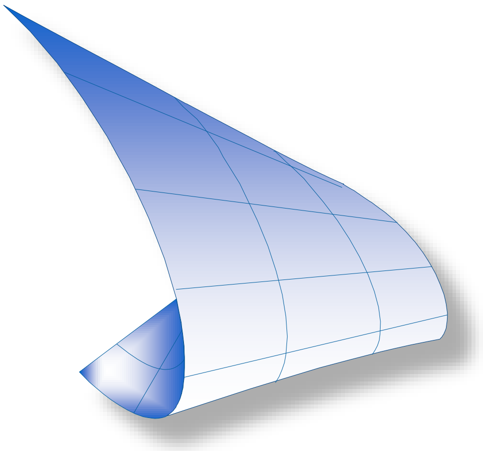
GEOMETRÍA ANALÍTICA

2026



Programa de la asignatura y bibliografía
Planificación – Trabajo Integrador de Contenidos
Guía de Trabajos Prácticos

EQUIPO DE CÁTEDRA

Profesora Responsable

Raichman, Silvia R. sraichman@fcen.uncu.edu.ar

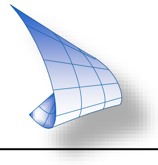
Equipo Docente

Raichman, Silvia R. sraichman@fcen.uncu.edu.ar
Fitt, Gisela P. gfitt@fcen.uncu.edu.ar
La Fuente, Carla karlita9318@hotmail.com
Molina, Mariela marielamoli07@gmail.com

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Mendoza
Marzo de 2026



PROGRAMA DE LA ASIGNATURA

La *Geometría Analítica* permite hallar y estudiar los lugares geométricos de forma sistemática y general. Provee de métodos para transformar los problemas geométricos en problemas algebraicos, resolverlos analíticamente e interpretar geométricamente los resultados.

OBJETIVOS

Objetivos generales:

- ✓ Proveer al alumno de los conocimientos de la Geometría Analítica del plano y del espacio necesarios para su formación.
- ✓ Promover el desarrollo del pensamiento lógico, reflexivo y crítico.
- ✓ Promover el desarrollo de la capacidad de observación, análisis, abstracción, generalización y sistematización.
- ✓ Promover el desarrollo de habilidades para: formular preguntas precisas; tomar adecuados datos de lo que escuche, observe o lea; frecuentar las fuentes originales; extraer de las fuentes bibliográficas los contenidos importantes; ser metódico en la exposición y en el registro de la información; comunicarse con precisión y claridad en forma oral y escrita.
- ✓ Alentar el esfuerzo de la consulta bibliográfica.
- ✓ Estimular las conductas apropiadas para un profesional que se desenvolverá en un medio en constante evolución: creatividad, curiosidad, objetividad, flexibilidad, espíritu crítico, energía exploratoria.
- ✓ Generar o consolidar actitudes ético-científicas.

Objetivos específicos de conocimientos:

Al finalizar el curso los alumnos conocerán:

- ✓ Distintos sistemas de coordenadas.
- ✓ El concepto de Espacio Vectorial, sus propiedades y las relaciones entre sus elementos.
- ✓ Los conceptos, definiciones, ecuaciones, propiedades y aplicaciones de la Geometría Analítica plana.
- ✓ Los conceptos, definiciones, ecuaciones, propiedades y aplicaciones de la Geometría Analítica espacial.
- ✓ Las formas de evaluar ángulos, distancias y proyecciones en el plano y en el espacio.
- ✓ Las expresiones analíticas de curvas y superficies.

Objetivos específicos de aptitudes:

Se busca que al finalizar el curso los alumnos sean capaces de:

- ✓ Definir y utilizar distintos sistemas de coordenadas.
- ✓ Definir y utilizar el concepto de espacio vectorial, sus propiedades y las relaciones entre sus elementos.
- ✓ Operar con vectores en el plano y en el espacio.
- ✓ Hallar y estudiar lugares geométricos.
- ✓ Calcular ángulos, distancias y proyecciones en el plano y en el espacio.
- ✓ Reconocer y describir distintos tipos de superficies.
- ✓ Obtener y emplear las expresiones analíticas de curvas y superficies.
- ✓ Planificar estrategias para la resolución de problemas geométricos a partir de la identificación de los datos, la representación de los mismos y el establecimiento de relaciones, integrando los conocimientos adquiridos.
- ✓ Analizar e interpretar los resultados.

CONTENIDOS

UNIDAD 1: VECTORES. ÁLGEBRA VECTORIAL

Revisión de contenidos: Vectores. Adición de vectores. Propiedades. Multiplicación de un vector por un escalar. Propiedades. Espacios vectoriales reales. Definición. Ejemplos. Propiedades. Combinación Lineal. Dependencia e independencia lineal. Conjunto generador. Base. Dimensión. Coordenadas de un vector respecto de una base dada. Módulo o norma de un vector. Vector unitario o versor. Cosenos directores de un vector. Producto escalar. Propiedades. Ángulo entre dos vectores. Condición de ortogonalidad. Proyección ortogonal de un vector sobre un eje. Producto vectorial. Propiedades. Producto mixto. Propiedades. Bases ortonormales. Aplicaciones.

UNIDAD 2: PLANOS Y RECTAS.

Planos. Distintas formas de la ecuación de un plano. Distancia de un punto a un plano. Posiciones relativas de dos planos. Ángulo entre dos planos. Familias de planos. Familias de planos que pasan por la intersección de dos planos dados. Rectas en el plano y en el espacio. Distintas formas de la ecuación de la recta. Posiciones relativas de dos rectas. Distancia de un punto a una recta. Distancia entre dos rectas. Ángulo entre dos rectas. Ángulo entre recta y plano. Familias de rectas. Familias de rectas que pasan por la intersección de dos rectas dadas. Aplicaciones en Ciencias.

UNIDAD 3. CÓNICAS.

Definición general de cónica. Circunferencia. Ecuaciones paramétrica, vectorial y cartesiana de la circunferencia. Traslación de los ejes coordenados. Ecuación general de la circunferencia. Familias de circunferencias. Parábola, elipse e hipérbola: ecuaciones vectoriales, cartesianas, paramétricas. Familias de parábolas, de elipses y de hipérbolas. Traslación de ejes coordenados. Ecuaciones generales. Posiciones relativas entre una recta y una cónica. Ecuación de la recta tangente a una cónica por un punto perteneciente a la misma y por un punto exterior. Propiedades y aplicaciones de las cónicas.

UNIDAD 4. SUPERFICIES.

Superficie esférica. Plano tangente a una esfera. Superficies cilíndricas. Superficies cónicas. Superficies regladas. Superficies de revolución. Superficies cuádricas con y sin centro. Elipsoide. Hiperboloide de una hoja. Hiperboloide de dos hojas. Paraboloide elíptico. Paraboloide hiperbólico. Ecuaciones paramétricas. Aplicaciones en Ciencias.

UNIDAD 5. COORDENADAS POLARES, CILÍNDRICAS Y ESFÉRICAS.

Sistema de coordenadas polares. Relaciones entre coordenadas cartesianas ortogonales y coordenadas polares. Ecuaciones polares de rectas y circunferencias. Ecuaciones polares de las cónicas. Gráficas de ecuaciones en coordenadas polares. Otras curvas: espirales, lemniscatas, caracoles, rosas. Coordenadas cilíndricas. Relaciones entre coordenadas cartesianas ortogonales y coordenadas cilíndricas. Coordenadas esféricas. Relaciones entre coordenadas cartesianas ortogonales y coordenadas esféricas. Aplicaciones en Ciencias.

UNIDAD 6. ECUACIÓN GENERAL DE SEGUNDO GRADO.

Ecuación general de segundo grado en 2 variables: forma matricial; forma cuadrática asociada; rotación de los ejes coordenados; teorema de los ejes principales. Identificación de secciones cónicas. Ecuación general de segundo grado en 3 variables: forma matricial; forma cuadrática asociada; rotación de los ejes coordenados; teorema de los ejes principales. Identificación de superficies cuádricas. Aplicaciones en Ciencias.

BIBLIOGRAFÍA

Bibliografía básica

Autor	Título	Editorial	Año
A. Engler, D. Müller, S. Vrancken, M. Hecklein	Geometría Analítica	Ediciones UNL	2005
G. Fuller, D. Tarwater	Geometría Analítica	Addison Wesley Iberoamericana	1999
J. Kindle	Teoría y Problemas de Geometría Analítica Plana y del Espacio	Mc Graw Hill	2005
A.M. Kozac, S. P. Pastorelli, P. E. Vardanega	Nociones de Geometría Analítica y Álgebra lineal	Mc Graw Hill Interamericana. EdUtecNA	2007
Ch. Lehman	Geometría Analítica	Limusa	1993
Z. Menna Goncalves	Geometría Analítica del Espacio. Enfoque Vectorial	Limusa	1981
E. Oteyza, E. Lam, C. Hernández, A. Carrillo, A. Ramirez	Geometría Analítica	Pearson Educación	2005
S. Raichman, E. Totter	Geometría Analítica para Ciencias e Ingenierías	Ex-Libris	2013
D. Riddle	Geometría Analítica	Thomson International	1997
L. Santaló	Vectores y Tensores con sus Aplicaciones	Eudeba	1977
A. Sunkel	Geometría Analítica en forma vectorial y matricial	Nueva Librería	2005

Libro electrónico: *Geometría analítica para Ciencias e Ingenierías.* Raichman, S.R.; Totter, E.; (2023). 1a. edición ilustrada. Mendoza, Argentina: Editorial Qellqasqa. 338 p.; ISBN 978-987-4026-83-5 Dirección URL del libro: http://qellqasqa.com/omp/index.php/qellqasqa/catalog/book/ISBN%20978-987-4026-83-5.

Libro electrónico:. S.R. Raichman *Geometría analítica* para Ciencias e Ingenierías: Problemas integradores y de aplicación, E. Totter, D. Videla, L. Collado, F. Codina, G. Molina, A.I. Cascone, G. Fitt. Febrero de 2022. Mendoza, Argentina: Editorial Qellqasqa. 103 p.; ISBN 978-987-4026-62-0 Dirección URL del libro: http://qellqasqa.com/omp/index.php/qellqasqa/catalog/book/ISBN%20978-987-4026-62-0.

Bibliografía complementaria

Autor	Título	Editorial	Año
H. Anton, C. Rorres	Introducción al Álgebra Lineal	Limusa Wiley	2011
J.W. Downs	Practical Conic Sections	Dover Publications	2003
S.I., Grossman, J. Flores Godoy	Algebra Lineal	Mc. Graw Hill	2012
G. Nakos, D. Joyner	Algebra Lineal con Aplicaciones	International Thomson Editores	1999
J. Trias Pairó	Geometría para la informática gráfica y CAD	Alfaomega	2005

METODOLOGÍA DE ENSEÑANZA Y DE EVALUACIÓN DURANTE EL CURSADO

Se toman como puntos de partida los conceptos del aprendizaje como construcción, el aprendizaje significativo y la autogestión del aprendizaje. Las actividades se desarrollan en base al planteo de situaciones problema, la observación, el análisis, la reflexión, la integración, la aplicación, la interacción, la síntesis, la inventiva y la búsqueda de información bibliográfica.

Se establece como espacio virtual de trabajo, el Espacio Virtual de Geometría Analítica en Plataforma Moodle FCEN: https://virtual.fcen.uncu.edu.ar/. En dicho espacio virtual, se ponen a disposición de los estudiantes recursos específicos de acuerdo a los contenidos a abordar en cada eje temático. En una Guía de Estudio y Actividades por eje temático se dan indicaciones de los pasos a seguir, referidas a lecturas en el texto, utilización de los recursos y actividades disponibles en el aula virtual, actividades incluidas en la Guía de Trabajos Prácticos y tareas a entregar. En la Guía de Estudio se indican también las fechas de cierre de los cuestionarios y/o entregas del período correspondiente. Los videos que se ponen a disposición de los estudiantes, están asociados a la integración de conceptos y procedimientos y a la interpretación geométrica de contenidos que se desarrollan en el curso. Los recursos denominados Tests son cuestionarios con retroalimentación inmediata para los estudiantes. Se realizan actividades sincrónicas para la revisión de contenidos conceptuales y procedimentales, que enriquecen la interacción y potencian el aprendizaje. En las mismas, se plantea la resolución de problemas, habilitando la participación activa, comprometida y responsable del estudiante.

Se dispone del Libro Interactivo Geometría Dinámica, realizado con el software Geogebra (https://www.geogebra.org/m/zsvdbqju 2024), que incluye una serie de actividades de aprendizaje para ser elaboradas con la utilización de herramientas computacionales interactivas, incluidas en cada uno de ellos, denominadas Recursos Geométricos Interactivos (RGIs). Dichos Recursos Geométricos Interactivos han sido diseñados para favorecer la visualización y comprensión de conceptos de la Geometría Analítica plana y espacial. Las actividades mencionadas están destinadas a potenciar el aprendizaje, desarrollando capacidades de tipo exploratorio, de visualización, de comprensión y de reflexión.

Se estimula el razonamiento, el pensamiento crítico y la confrontación de ideas como procesos en la construcción de conocimientos. Se trabaja con una guía de trabajos prácticos para cada unidad temática, con el propósito de orientar las actividades de los alumnos a los objetivos planteados. A partir de las actividades y de los recursos didácticos y comunicacionales disponibles, se promueve el desarrollo de las capacidades lógico-matemáticas y de resolución de problemas de la geometría analítica plana y espacial. Los estudiantes elaboran un Trabajo Integrador de Contenidos (TIC), en forma individual o de a dos, que es presentado como requisito para la acreditación del espacio curricular. Cada Trabajo Integrador debe cumplir con los requisitos establecidos para el presente ciclo lectivo.

Evaluación durante el cursado:

A los efectos de obtener la condición de regularidad de la asignatura, se plantean exámenes parciales a lo largo del curso y exámenes de recuperación. Las instancias de evaluación mencionadas son escritas y de carácter teórico-práctico. Se realizan en función de los contenidos enseñados, en las fechas previstas y con el nivel de dificultad desarrollado en clase y en las guías de trabajos prácticos. Se evalúa la capacidad de transferir y aplicar conocimientos, al mismo tiempo que se estimula al estudiante a mejorar su capacidad de comunicación escrita. Así mismo, se plantea la resolución y exposición por parte de los estudiantes, de problemas integradores de contenidos en cada eje temático, durante las actividades sincrónicas. Se evalúa la capacidad de resolución de problemas de la geometría analítica plana y espacial, promoviendo la mejora en la comunicación oral.

El sistema de evaluación permite hacer correcciones durante el proceso de enseñanza y aprendizaje, ratificar o rectificar estrategias durante el desarrollo de la asignatura y da la oportunidad de reajustar la dirección de los esfuerzos, tanto de los docentes como de los alumnos. Las instancias de evaluación son:

- ✓ *Dos exámenes parciales*: son exámenes escritos de carácter teórico-práctico en los que se incluyen los temas desarrollados hasta la semana previa a la instancia de evaluación. Se aprueban con un mínimo de 60 puntos.
- ✓ *Recuperación de uno de los dos exámenes parciales*: en el caso de haber desaprobado sólo una de los dos exámenes parciales, el alumno rinde un examen recuperatorio del examen parcial desaprobado, que se aprueba con un mínimo de 60 puntos.
- ✓ *Un examen Global*: en el caso de no haber aprobado los dos exámenes parciales, el alumno tiene la posibilidad de rendir un examen recuperatorio Global, en el que se incluyen todos los temas evaluados en los dos parciales. Este examen Global se aprueba con un mínimo de 60 puntos.
- ✓ *Tests en el Espacio Virtual*: Se plantea la elaboración y presentación de actividades implementadas en el Espacio Virtual de Geometría Analítica, cada una de las cuales se aprueba con un mínimo de 60 puntos.
- ✓ *Presentaciones y exposiciones de problemas:* se plantea la resolución y exposición de problemas integradores de contenidos en cada eje temático, durante las actividades sincrónicas. Se aprueban con un mínimo de 60 puntos y se requiere la aprobación de un mínimo del 60% de estas actividades.

CRONOGRAMA DE EVALUACIONES 2026

Instancia de Evaluación	Sede Mendoza	Sedes Valle de Uco - San Martín – Gral Alvear	Sede Malargüe
Primer Examen Parcial	10/4/2026	8/4/2026	10/4/2026
Segundo Examen Parcial	15/5/2026	13/5/2026	15/5/2026
Recuperatorios	5/6/2026	3/6/2026	5/6/2026
Examen Escrito para Promoción	5/6/2026	3/6/2026	5/6/2026
Coloquios para Promoción	10/6/2026	10/6/2026	10/6/2026
Test 1 Espacio Virtual GA	28/3/2026	28/03/2026	28/3/2026
Test 2 Espacio Virtual GA	4/4/2026	4/4/2026	4/4/2026
Test 3 Espacio Virtual GA	9/5/2026	9/5/2026	9/5/2026
Test 4 Espacio Virtual GA	30/5/2026	30/5/2026	30/5/2026

CONDICIONES DE REGULARIDAD TRAS EL CURSADO

Para obtener la condición de alumno regular en la asignatura, el alumno debe cumplir con:

- ✓ Elaboración y presentación en las actividades sincrónicas de los ejercicios de las Guías de Trabajos Prácticos.
- ✓ Resolución y exposición de problemas integradores de contenidos en cada eje temático, durante las actividades sincrónicas.
- ✓ Elaboración y presentación de avances del Trabajo Integrador de Contenidos.
- ✓ Elaboración y presentación de los Tests implementados en el Espacio Virtual de Geometría Analítica en la plataforma Moodle FCEN.
- ✓ Aprobación de las instancias de evaluación de acuerdo a lo descripto en el punto anterior.

Aquel alumno que no cumpla con estas condiciones quedará en condición de alumno Libre.

SISTEMA DE APROBACIÓN DE LA ASIGNATURA

Habiendo cumplido las condiciones especificadas para obtener la regularidad de la asignatura, el alumno está en condiciones de rendir un examen final para lograr la aprobación de la misma. Para el examen final, el alumno presenta el Trabajo Integrador de Contenidos (TIC) y la resolución completa de los ejercicios complementarios, ya que éstos forman parte de esta instancia de evaluación. El examen final es escrito y oral, teórico y práctico. Se evalúan la totalidad de los temas desarrollados durante el cursado, independientemente que se hayan evaluado o no en las instancias de evaluación parciales. Esta instancia de evaluación está planteada como una actividad de síntesis e integradora de los contenidos. La condición de aprobación implica el dominio de los contenidos conceptuales y procedimentales de todas las unidades temáticas del programa de la asignatura, así como también de las aplicaciones prácticas y la articulación de contenidos entre sí, trabajados durante el cursado.

Para aquellos estudiantes que hayan cumplido con un mínimo del 75% de las actividades implementadas en el Espacio Virtual de Geometría Analítica, y hayan aprobado en primera instancia los exámenes parciales para acceder a la condición de regularidad, podrán rendir un examen escrito y oral, a los efectos de alcanzar la condición de promoción de la asignatura, que se aprueba también con un puntaje mínimo de 60 puntos. En caso de no aprobar el examen de promoción, el estudiante no pierde la condición de regularidad y accede a un examen final para acreditar la asignatura. En la instancia de coloquio para promoción el alumno presenta el Trabajo Integrador de Contenidos y los desarrollos correspondientes a los ejercicios complementarios.

El alumno Libre debe rendir un examen final que consta de un examen escrito que se aprueba con un puntaje mínimo de 60 puntos en cada eje temático y un examen oral que se aprueba con un mínimo de 60 puntos.

Los siguientes **criterios de evaluación** se aplican en todas las instancias de evaluación del proceso educativo, con niveles acordes al grado de avance del desarrollo de la asignatura, en cuanto a la resolución de problemas geométricos en el plano y en el espacio y a la aplicación de la geometría analítica plana y espacial para la modelización y resolución de problemas:

- Precisión en el empleo de vocabulario específico.
- Pertinencia de las hipótesis que se formulan.
- Exactitud en los cálculos.
- Suficiencia en la argumentación de procedimientos, evidenciando comprensión.
- Coherencia gráfico - analítica en los resultados obtenidos y en la interpretación del problema.
- Calidad de la producción: correcta identificación e interpretación de datos e incógnitas; adecuada integración de contenidos conceptuales, procedimentales y actitudinales; desarrollo completo, ordenado y coherente de los procedimientos de resolución de problemas geométricos en el plano y en el espacio; establecimiento de una propuesta variada de estrategias de resolución; uso apropiado de software de representación gráfica, como apoyo tanto para la interpretación del problema como sus posibles caminos de resolución; análisis reflexivo y crítico de soluciones evidenciando comprensión.
- Consistencia y pertinencia en el análisis e interpretación de resultados.
- Claridad y coherencia en la comunicación oral y escrita.

TRABAJO INTEGRADOR DE CONTENIDOS

Se trata de un trabajo a elaborar en forma individual por cada estudiante durante el curso, con la guía y el acompañamiento de los docentes. Dicho trabajo se presenta en la instancia de acreditación de la asignatura, ya sea en el Coloquio para la condición de Promoción o bien en el Examen Final para alumnos que alcanzaron la condición de regularidad.

El trabajo consiste en un proceso de integración, aplicación y transferencia de contenidos, a partir de la implementación en GeoGebra de propiedades trabajadas durante el curso y sus aplicaciones; o bien a partir del desarrollo analítico de propiedades de lugares geométricos estudiados en el curso, sus aplicaciones e implementación en GeoGebra; o bien a partir de la resolución justificada de actividades planteadas en recursos seleccionados del Texto *Libro Interactivo Geometría Dinámica*, (https://www.geogebra.org/m/zsvdbqju 2024). Se espera que el estudiante demuestre habilidades en la formulación de hipótesis, identificación y análisis de datos, resolución de problemas y la interpretación de resultados. Los criterios de evaluación se corresponden con los criterios definidos en el punto anterior para todas las instancias de evaluación de la asignatura y se detallan en la siguiente rúbrica:

Aspecto a evaluar	**Indicadores**	**No Presenta**	**Bajo**	**Regular**	**Muy bueno**	**Excelente**
Planteo del Problema	Claridad y coherencia en el planteo (datos-hipótesis-posible tesis) del problema de integración y transferencia de contenidos en el contexto de la asignatura.					
Formulación/Desarrollo	Adecuado uso de conceptos y principios de la Geometría Analítica plana y especial en la formulación del problema.					
	Precisión en los procedimientos matemáticos utilizados. (notación, cálculos, resolución)					
	Apropiado uso de herramientas tecnológicas y software matemático					
	*Correcta resolución utilizando caminos diferentes.					
	*Creatividad en el planteo y resolución del problema. Aspectos didácticos.					
Análisis de Resultados	Coherencia entre lo gráfico y lo analítico. Análisis de resultados					
	Coherencia en las conclusions.					
Presentación	Claridad en la organización y presentación del informe escrito					
	Claridad para defender, argumentar y comunicar las conclusiones oralmente.					

GUÍA DE TRABAJOS PRÁCTICOS

Guía de Trabajo Nº 1

1. Demuestre que:

   Si S es un conjunto de uno o más vectores de un espacio vectorial *V*, entonces S es un *subespacio* de *V* sí y sólo sí se cumplen las siguientes condiciones:

   a) Si **u** ε *S* y **v** ε S, entonces **u**+**v** ε *S*.
   b) Si **u** ε S y k es un escalar, entonces k**u** ε *S*.

2. Determine, justificando su respuesta, si los siguientes conjuntos son *subespacios* de R^3:
   a) $S_1=\{(x, y, z) \in R^3 / x = z = 0\}$
   b) $S_2=\{(x, y, z) \in R^3 / x + 2y - z = 0\}$
   c) $S_3=\{(x, y, z) \in R^3 / x + 3y + 5z - 6 = 0\}$
   d) $S_4=\{(x, y, z) \in R^3 / (x,y,z) = t\,(1,-1,1), t \in R\}$
   e) $S_5=\{(x, y, z) \in R^3 / (x,y,z) = t\,(2,1,-2) + (2,0,3), t \in R\}$

3. a) Defina conjunto de vectores *linealmente independiente* (LI) en un espacio vectorial *V*.
   b) Enuncie y demuestre una de las propiedades de los conjuntos de vectores *linealmente independientes*.

4. a) Defina conjunto de vectores *linealmente dependiente* (LD) en un espacio vectorial *V*.
   b) Enuncie y demuestre una de las propiedades de los conjuntos de vectores *linealmente dependientes*.

5. Sean $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_n}$, un conjunto de vectores linealmente independientes de un espacio vectorial R^n.
   Demuestre que cualquier vector de R^n se puede escribir como una única combinación lineal de ellos.

6. Demuestre que todo conjunto de n vectores linealmente independientes en R^n genera a R^n.

7. Dados los siguientes conjuntos de vectores de R^3 linealmente independientes, determine el espacio por generado por cada uno de ellos:
   a) { **a** }
   b) { **a** , **b** }
   c) { **a** , **b** , **c** }

8. Indique una *base* y la *dimensión* de los *subespacios* vectoriales del ejercicio 2.

9. Dados los vectores **a** = (2,2), **b** = (1,4), **c** = (-2,0)
   a) Evalúe las coordenadas del vector **u** = **a** +2 **b** + **c** en la base B = { **a** ; **c** }
   b) Represente gráficamente los vectores.
   c) Interprete gráfica y analíticamente $(\mathbf{u})_B$
   d) Indique, justificando su respuesta, si los vectores **b** y **u** forman una base de R^2.

10. Indique verdadero (V) o falso (F) según corresponda:

a) Todo subespacio vectorial es espacio vectorial.

b) Todo subconjunto de R^2 es subespacio de R^2.

c) Todo subespacio de R^n tiene dimensión $\leq$ n

d) Todas las bases de un espacio vectorial tienen el mismo número de vectores.

e) El vector **0** es linealmente independiente.

f) Todo conjunto de n vectores LI en R^n es una base de R^n.

g) Si el espacio vectorial V es de dimensión n, todo conjunto de vectores de V que es LI tiene como mínimo n vectores.

h) Un conjunto de n vectores en R^m siempre es LD si n > m.

i) Si los vectores columnas de A son LD, entonces det (A) $\neq$ 0.

j) Todo conjunto de n vectores LI en R^n genera a R^n.

k) Sea dim V = n y un conjunto de m vectores LI en V, entonces m>n.

l) Si V es un espacio vectorial de dimensión n, entonces n vectores cualesquiera de V linealmente independientes constituyen una base de V.

Guía de Trabajo Nº 2

1. a) Demuestre que el *vector proyección* **w** de un vector dado **u** sobre la dirección de otro vector dado **v** no nulo, está dado por: $\mathbf{w} = \dfrac{\mathbf{u}.\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}\dfrac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$

b) Dados los vectores **a** = (1,2), **b** = (1,-1), **c** = (-6,2) determine el *vector proyección* del vector **c** sobre la dirección del vector 2**a** + **b**

c) Represente gráficamente todos los vectores del inciso anterior.

d) Indique, justificando su respuesta, si { **a** , **b** , 2**a** - **b** } y { **c** , **b** } son cada uno de ellos, conjuntos de vectores LD o LI.

2. Demuestre que si **u** y **v** son vectores ortogonales en R^n con producto euclidiano interior, se cumple el teorema de Pitágoras generalizado.

3. La columna de una antena de 5 m de altura está colocada sobre el eje z. Está sostenida por tres tensores que parten del extremo superior y se dirigen a los puntos
P_1(–5 m, –5 m, 0), P_2(0, 5 m, 0) y P_3(10 m, –5 m, 0). Los tensores ejercen sobre la columna una fuerza de 600 N, hacia abajo.
a) Demuestre que los tensores son mutuamente perpendiculares.
b) Determine la proyección del vector fuerza **F** en cada uno de ellos.

c) Verifique que se cumple el Teorema de Pitágoras en R^3, para las componentes ortogonales del vector **F** en las direcciones de los tensores.

4. Dado el vector **u** = (2,-1,1) Encuentre el *subespacio* de R^3 formado por los vectores ortogonales a **u**. Interprete geométricamente.

5. Indique, justificando su respuesta, si los siguientes conjuntos son o no *conjuntos ortonormales*. Justifique cuál o cuáles de ellos son base del E.V. correspondiente:

$$A_1 = \{(1, 0, 0); (0,-1, 0)\} \;\; ; \;\; A_2 = \{(1, 1); (-1, 1)\} \;\; ; \;\; A_3 = \{(-4/5, 0, 3/5); (3/5, 0, 4/5)\}$$

6. Demuestre que, si $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, ..., \mathbf{v_n}\}$ es un conjunto ortogonal de vectores no nulos en R^n con el producto euclidiano interior, entonces es conjunto linealmente independiente.

7. Sea B = $\{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, ..., \mathbf{u_n}\}$ una *base ortonormal* (BON) de R^n y sea $\mathbf{v} \in R^n$. Demuestre que,

$$\mathbf{v} = (\mathbf{v} \,.\, \mathbf{u_1})\, \mathbf{u_1} + (\mathbf{v} \,.\, \mathbf{u_2})\, \mathbf{u_2} + \ldots + (\mathbf{v} \,.\, \mathbf{u_n})\, \mathbf{u_n}$$

8. Dados los vectores $\mathbf{u} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $\mathbf{v} = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$

   a) Indique, justificando su respuesta, si { **u** ; **v** } es o no una *base ortonormal* (BON) de R^2.

   b) Determine las coordenadas del vector **w** = (2,6) en la base B = { **u** ; **v** }, usando el resultado del ejercicio 7.

   c) Represente gráficamente todos los vectores.

9. a) Verifique que B = {**u**, **v**, **w**} es BON para R^3 con el producto euclidiano interior, siendo:

$$\mathbf{u} = (0, 1, 0) \; ; \; \mathbf{v} = (-4/5, 0, 3/5) \; ; \; \mathbf{w} = (3/5, 0, 4/5)$$

   b) Determine las coordenadas de **r** = (2,2,2) en la base B, usando el resultado del ejercicio 7.
   c) Evalúe la proyección ortogonal de **r** en la dirección del vector **v**.

10. a) Verifique que la matriz **Q** es *matriz ortogonal*:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

   b) Calcule $\mathbf{Q.U} = \mathbf{U}^{`}$, siendo $\mathbf{U} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ y $\mathbf{U}^{`} = \begin{bmatrix} x^{`} \\ y^{`} \end{bmatrix}$

   c) Verifique que la multiplicación por la matriz ortogonal preserva la longitud. Es decir,

$$\|\mathbf{QU}\| = \|\mathbf{U}\|$$

   d) Interprete geométricamente.

Guía de Trabajo Nº 3

1. Enuncie y demuestre las propiedades del *producto vectorial* o *producto cruz* de dos vectores de R^3.

2. Demuestre que el área de un paralelogramo con vectores **u** y **v** como lados adyacentes está dada por:

$$A = \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{v} \times \mathbf{u}\|$$

3. Sean los vectores **u** = (1, -1, 2); **v** = (0, 1, -1) :
   a) Determine las componentes del vector **w** tal que **w** es perpendicular a los vectores **u** y **v** y el módulo de **w** es igual a 3.
   b) Calcule el área del paralelogramo con vectores **u** y **v** como lados adyacentes.

4. Dados los vectores **a** = (1,2,3), **b** = (3,-2,1), **c** = **i** + 3**j** –6 **k** :
   a) Determine el vector **v**, sabiendo que **v** es perpendicular a los vectores **a** y **b**, y satisface la condición **v. c** = 40
   b) Indique, justificando su respuesta, si los vectores **a**, **b** y **v** forman una base de R^3.

5. El producto vectorial entre dos vectores de R^3 puede reiterarse multiplicando vectorialmente por otro vector. Esta operación se llama *doble producto vectorial*.
   a) Resuelva el siguiente doble producto vectorial y verifique que el vector **d** es perpendicular al vector **a** y al vector (**b** x **c**):

   d = **a** x (**b** x **c**), siendo **a** = (1, 2, 1), **b** = (0, 3, 2) y **c** = (2, 0, 3).

   b) Verifique que se cumple la siguiente relación: **a** x (**b** x **c**) = (**a**.**c**) **b** – (**a**.**b**) **c** .Interprete geométricamente.

   c) Indique, justificando su respuesta, si cada uno de los siguientes conjuntos es LD o LI :
   c.i) { **a** , **b** , **c** } ; c.ii) { **b** , **c** , **b** x **c** } ; c.iii) { **b** , **c** , **a** x (**b** x **c**) }

6. El *vector momento de una fuerza* se define como $\mathbf{M_0}$ = **OP** x **F**, siendo **OP** el vector posición del punto de aplicación de la fuerza.
   a) Encuentre el momento de la fuerza **F**=(20, 40, 50) N, aplicada en el punto P(2, 3, 2) m. b) Verifique que el vector momento obtenido es perpendicular tanto a **F** como a **OP**.

7. Una fuerza puede trasladarse sobre su recta de acción. Teniendo en cuenta ello, demuestre que el vector momento de fuerza no depende del punto de aplicación de la misma.

8. Se llama *producto mixto* de tres vectores **u**, **v** y **w** al producto escalar de **u** x **v** por **w**.
   Dados los vectores **u**, **v** y **w** expresados como:

$$\mathbf{u} = u_1\breve{\mathbf{i}} + u_2\breve{\mathbf{j}} + u_3\breve{\mathbf{k}};$$
$$\mathbf{v} = v_1\breve{\mathbf{i}} + v_2\breve{\mathbf{j}} + v_3\breve{\mathbf{k}};$$
$$\mathbf{w} = w_1\breve{\mathbf{i}} + w_2\breve{\mathbf{j}} + w_3\breve{\mathbf{k}};$$

   i. Evalúe el producto mixto (**u** x **v**).**w**

   ii. Verifique que el resultado anterior es precisamente el desarrollo del determinante formado por las componentes de los tres vectores:

$$(\mathbf{u}\times\mathbf{v}).\mathbf{w}=\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

iii. ¿A qué es igual el producto mixto de tres vectores paralelos a un mismo plano?

9. Demuestre que si **u**, **v** y **w** son tres vectores que no están situados en el mismo plano, el valor absoluto del producto mixto (**u** x **v**).**w**, es igual al *volumen del paralelepípedo* construído sobre los mismos, una vez llevados a un origen común.

10. Dados los puntos A(0, 1, 1), B(–2, 1, 1), C(4, 1, 0) y D(3, 5, 2):
    a) Calcule el volumen del prisma de base triangular de aristas AB, AC y AD.
    b) Indique, justificando su respuesta, si {**AB**, **AC**, **AD**} es conjunto LD o LI.

11. a) Sean A, B, C y D, 4 puntos del espacio que determinan un tetraedro. Determine una expresión que permita evaluar vectorialmente el volumen del tetraedro.
    b) Calcule el volumen del tetraedro de vértices A(0,0,0); B(0,0,1); C(1,2,3); D(2,3,0). Represente gráficamente.

12. a) Sean $\mathbf{b_1}$ y $\mathbf{b_2}$ dos vectores no nulos, no colineales de R^3 Si $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ es un vector unitario que biseca el ángulo entre $\mathbf{b_1}$ y $\mathbf{b_2}$, demuestre que:

$$\left(\frac{\mathbf{b_1}}{\|\mathbf{b_1}\|}-\frac{\mathbf{b_2}}{\|\mathbf{b_2}\|}\right).\mathbf{u}=0$$

$$\mathbf{u}.(\mathbf{b_1}\times\mathbf{b_2})=0$$

    b) Indique, justificando su respuesta, si los vectores **u**, $\mathbf{b_1}$ y $\mathbf{b_2}$ forman una base de R^3.

13. Vincule los conceptos de dependencia e independencia lineal con las operaciones entre vectores : producto escalar, producto vectorial y producto mixto.

Guía de Trabajo Nº 4

1. Determine las distintas formas de la ecuación de un *plano* en R^3 de vector normal $\mathbf{n}_\pi$ (no nulo) y que pasa por el punto P_0 (x_0, y_0, z_0): ecuación vectorial, forma punto-normal de la ecuación del plano, ecuación cartesiana general, ecuación vectorial paramétrica y la forma segmentaria de la ecuación del plano.

2. Dada la *ecuación general cartesiana* del plano: Ax+By+Cz+D = 0, complete las siguientes expresiones y represente gráficamente:

a) Si D=0:	Ax+By+Cz= 0	El plano pasa por ....
b) Si A = B = 0:	Cz+D = 0	El plano es paralelo al plano ....
c) Si A = C = 0:	By+D = 0	El plano es paralelo al plano ....
d) Si B = C = 0:	Ax+D = 0	El plano es paralelo al plano ....
e) Si A=0:	By+Cz+D = 0	El plano es perpendicular al plano ....
f) Si B=0:	Ax+ Cz+D = 0	El plano es perpendicular al plano ....

g) Si C=0: $Ax+By+D=0$ El plano es perpendicular al plano ....

3. Determine la ecuación general cartesiana de los siguientes planos:

a) Que pasa por el punto P (2, 1,3) y es perpendicular al vector (2, -2, 3)
b) Que pasa por los puntos P (2, -3,1), Q (1, 2, 1) y R (0, 1, 4)
c) Que pasa por el punto R (2, 1, -1) y es paralelo al plano $3x-2z=9$

4. a) Encuentre la *ecuación vectorial paramétrica* y *cartesianas paramétricas* del plano que es paralelo a los vectores **u** = (1,2,1) y **v** = (0,-3,2) y pasa por el punto Q (2,0,4).
b) Eliminando los parámetros de las ecuaciones cartesianas paramétricas, determine la ecuación cartesiana general del plano.
c) Verifique la respuesta del inciso anterior trabajando con el vector normal al plano.

5. a) Deduzca una fórmula para determinar la mínima *distancia* del punto Q (x_Q, y_Q, z_Q) al plano de ecuación: $Ax+By+Cz+D=0$

b) Calcule la distancia del punto Q (1,1,6) al plano $2x - 3y + z - 2 = 0$

6. a) Calcule la distancia desde el punto A(1, 3, 3) hasta el plano de ecuación:

$$OP = (3, 2, 4) + \mu\,(1, 2, 1) + \beta\,(3, 2, 4). \qquad \mu, \beta \in R$$

b) Encuentre las ecuaciones de los planos que disten 3 unidades del plano dado.

7. a) Demuestre que la ecuación vectorial del plano determinado por tres puntos no alineados $P_1\,(x_1, y_1, z_1)$, $P_2\,(x_2, y_2, z_2)$ y $P_3\,(x_3, y_3, z_3)$ es:

$$\mathbf{P_1 P} \,.\, (\mathbf{P_1 P_2} \times \mathbf{P_1 P_3}) = 0$$

b) Halle la ecuación vectorial y cartesiana del plano determinado por los puntos

$$P_1\,(2,1,3);\ P_2\,(1,3,2) \text{ y } P_3\,(-1,2,4)$$

8. Dados dos planos:

$$\pi_1: A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$$

$$\pi_2: A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$$

Demuestre que: $A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 + k\,(A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2) = 0$ $\quad k \in R$, es la ecuación de la *familia reducida de planos* que pasa por la intersección de π_1 y π_2

9. a) Determine la ecuación de la *familia de planos* que pasa por la intersección de los planos de ecuaciones:

$$\pi_1: 3x + y - 2z + 2 = 0 \quad ; \quad \pi_2: x - 3y - z - 1 = 0$$

b) Determine la ecuación del plano π_3 que pertenece a la familia de planos del inciso anterior y pasa por el punto R (1,1,0). Grafique.
c) Evalúe el ángulo que forma π_3 con π_1 y el ángulo que forma π_3 con π_2.

10. Halle la ecuación del plano que pasa por la intersección de los planos de ecuaciones:

$$\pi_1: 3x + y - 2z + 2 = 0 \quad ; \quad \pi_2: x - 3y - z + 3 = 0$$

y es perpendicular al plano *xy*. Represente gráficamente.

11. a) Aplique el resultado del problema 12 de la Guía de Trabajo 3, para determinar un vector unitario que biseque el ángulo que forman $\mathbf{n_1} = (1,1,1)$ y $\mathbf{n_2} = (0,1,0)$.
b) Encuentre una ecuación del plano que biseca los planos $x + y + z = 3$ y al plano *xz*.
c) Determine ecuaciones de planos bisectores de los planos coordenados. Justifique su respuesta.

12. Escriba la ecuación de la familia de planos que tienen traza común en el plano *yz* a la recta:
$2z + 3y - 6=0$

Guía de Trabajo Nº 5

1. *Rectas en R^3*. Determine las distintas formas de la ecuación de una recta en R^3 de vector director $\mathbf{d_L} =(a,b,c)$ (no nulo) y que pasa por el punto $P_0 (x_0, y_0, z_0)$.

2. a) Halle la ecuación vectorial paramétrica, cartesianas paramétricas y simétricas de la recta L_1 que pasa por el punto Q(2,2,-2) y es paralela al vector $\mathbf{v} = (2,-1,3)$.
b) Halle su intersección con los planos coordenados;
c) Encuentre dos puntos de la recta L_1, distintos a los determinados en el inciso anterior;
d) Determine el ángulo que forma la recta L_1 con la recta: $L_2 : x = 4 – 2t,\ y = 3 + 2t,$
$z = -7 + 3t,\ t \in R$.

3. a) Encuentre una expresión que permita calcular la distancia entre un punto y una recta en R^3. Justifique su desarrollo.
b) Calcule la distancia de la recta L_1 del ejercicio 2, al punto M (4, –1, 3).

4. *Rectas en R^2*. a) Determine las distintas formas de la ecuación de una recta en R^2 de vector director $\mathbf{d_L} =(a,b)$ (no nulo) y que pasa por el punto $P_0 (x_0, y_0)$.
b) Halle la ecuación vectorial paramétrica de la recta que pasa por el punto A(2,-1) y es paralela a la recta determinada por los puntos (3,1) y (-4,2). Represente gráficamente.

5. Halle la ecuación vectorial paramétrica de la recta que pasa por el punto Q(1, 1) y es perpendicular a la recta L_1: $3x + y -6 = 0$. Represente gráficamente.

6. Sean dos rectas no paralelas en R^2, L_1: $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$ y L_2: $A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$
Demuestre que: $A_1 x + B_1 y + C_1 + k (A_2 x + B_2 y + C_2) = 0$, $k \in R$, es la ecuación de la *familia reducida* de rectas que pasan por la intersección de L_1 y L_2.

7. *Familias de rectas*:
a) Obtenga la ecuación de la familia de rectas que tiene ordenada al origen $b = –4$.
b) Calcule el ángulo entre las rectas L_1: $3x – 3y + 1 = 0$ y L_2: $x = –y – 3$
c) Encuentre la ecuación de la familia de rectas que pasan por la intersección de las dos rectas dadas en el inciso anterior. d) Obtenga la ecuación de la recta perteneciente a la familia de rectas del inciso anterior, que pasa por el origen de coordenadas. e) Represente gráficamente.

8. a) Determine un procedimiento que permita calcular la distancia entre dos rectas paralelas en R^2, L_1: $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$ y L_2: $A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$. Justifique su procedimiento.
b) Determine la distancia entre las rectas L_1: $2x + 3y - 5 = 0$ y L_2: $2x + 3y - 8 = 0$

9. a) Indique un procedimiento que permita determinar si dos rectas dadas en R^3, son paralelas, secantes (se cortan en un punto), o alabeadas.
b) Indique un procedimiento que permita calcular la distancia ente dos rectas dadas en R^3. Justifique su respuesta.

10. Dadas las rectas: $\begin{cases} x = 2-2t \\ y = -1+2t \ , \ t \in R \\ z = -1+4t \end{cases}$ $\quad L_2 : \begin{cases} -x+y+1=0 \\ -6y+3z-3=0 \end{cases}$

a) Encuentre las ecuaciones simétricas de la recta L_2 e identifique los números directores.
b) Indique justificando su respuesta, si las rectas dadas son paralelas, secantes (se cortan en un punto) o alabeadas.
c) Determine la ecuación de la recta L_3 que es perpendicular simultáneamente a las rectas L_1 y L_2 y que pasa por el punto Q(1,3,-4)
d) Encuentre la proyección del punto Q(2,2,2) sobre el plano 2x + y – z + 6 = 0 paralela a la dirección dada por el vector **v** = (1,1,-2).

11. Dadas las siguientes rectas:
L_1: **OP**= (1,1,-1) + t_1 (2,3,1), $t_1 \in$ R y L_2: **OP**= (–1,–2,–2) + t_2 (1,4,2) ; $t_2 \in R$
a) Demuestre que las rectas L_1 y L_2 se cortan en un punto.
b) Halle las coordenadas del punto de intersección.
c) Determine la ecuación del plano que ellas definen.
d) Calcule el ángulo que forman las dos rectas.

12. Dado el plano $\pi_1 : 2x - y + z + 3 = 0$
a) Escriba la ecuación vectorial paramétrica de la recta L_1 que es perpendicular al plano π_1 y pasa por el punto Q(2,-1,3).
b) Determine, justificando su respuesta, si la recta L_2: (x,y,z) = (0,1,1) + k (2,0,-4) , $k \in R$, y el plano π_1 son paralelos, o se cortan en un punto, o la recta está contenida en el plano.
c) Determine la ecuación plano π_2, que contiene a la recta L_2 y el origen de coordenadas.

Guía de Trabajo Nº 6

1. Determine las distintas formas de la ecuación de una *circunferencia* de radio r y centro C(h,k).

2. Halle la ecuación de la circunferencia cuyo centro es (3, –2) y pasa por el punto A(3, 7). Determine además la ecuación en su forma vectorial paramétrica.

3. Halle la ecuación general de la circunferencia que pasa por los puntos A(0, 0), B(2, 3) y C(5, 1). Represente gráficamente.

4. Halle la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto (–3, 2) y tiene su centro en la intersección de las rectas L_1: 3x – y + 15 = 0 y L_2: 4x + y + 13 = 0. Represente gráficamente.

5. Demuestre que la recta tangente a una circunferencia de centro C(h,k) y radio r, en un punto cualquiera T(x_T,y_T), es perpendicular al segmento de recta que une el centro C con el punto de tangencia T.

6. Determine analíticamente la ecuación de la circunferencia cuyo centro es el punto C(4, 3) y es tangente a la recta L: $3x – 4y + 1 = 0$. Represente gráficamente.

7. Halle la ecuación de las rectas tangentes a la circunferencia $4x^2 + 4y^2 + 8x + 4y – 47 = 0$ y que tengan pendiente $–3/2$. Represente gráficamente.

8. Dadas las ecuaciones: C_1: $x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1 = 0$; C_2: $x^2 + y^2 + D_2x + E_2y + F_2 = 0$

a) Demuestre que: $x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1 + k\,(x^2 + y^2 + D_2x + E_2y + F_2) = 0$, $k \in R$,
es la ecuación de la *familia reducida de circunferencias* que pasan por la intersección de C_1 y C_2
b) Demuestre que para k=-1 se obtiene una recta que es perpendicular a la recta que une los centros de las dos circunferencias dadas.

9. a) Halle la ecuación de familia de circunferencias que pasan por la intersección de C_1 y C_2

$$C_1: x^2 + y^2 - 2x - 10y + 10 = 0 \; ; \; C_2: 4x^2 + 4y^2 - 32x - 12y + 36 = 0$$

b) Halle la ecuación del eje radical de las circunferencias dadas y demuestre que es perpendicular a la recta que une sus centros. c) Obtenga la ecuación de la circunferencia C_3 que pertenece a la familia de circunferencias que pasan por la intersección de C_1 y C_2, para k=3. d) Obtenga la ecuación de la circunferencia C_4 que pertenece a la familia dada y pasa por el punto (0,0). e) Obtenga la ecuación de la circunferencia C_5 cuyo centro pertenece al eje radical de las dos circunferencias dadas y es tangente a la recta que une los centros de dichas circunferencias. ¿La respuesta es única? ¿la respuesta pertenece a la familia de circunferencias que pasan por la intersección de las dos circunferencias C_1 y C_2? f) Represente gráficamente todos los lugares geométricos de los incisos anteriores.

10. Con la utilización de software apropiado, verifique los resultados de dos ejercicios a su elección de la presente Guía.

Guía de Trabajo Nº 7

1. Defina *parábola* como lugar geométrico.

2. Deduzca la ecuación de la parábola de vértice en V(0,0) y determine todos sus elementos, si:
a) el eje focal coincide con el eje x. b) el eje focal coincide con el eje y.

3. Deduzca la ecuación de la parábola de vértice en V(h,k) y determine todos sus elementos, si:
a) el eje focal es paralelo al eje x. b) el eje focal es paralelo al eje y.

4. Defina *lado recto* de una parábola. Determine su longitud.

5. Halle la ecuación de la parábola cuyo vértice es V(–4, 3) y su foco es F(–1, 3). Represente gráficamente.

6. Las torres de una línea de alta tensión están separadas 100 m y tienen una altura de 16 metros. Los cables de la línea no deben estar a menos de 6 m sobre el nivel de suelo. Suponiendo que estos cables determinan una parábola, halle la ecuación de la misma. Encuentre la altura de un punto situado a 25 m del vértice. Represente gráficamente.

7. El cable de suspensión de un puente colgante puede aproximarse mediante la forma de un arco parabólico. Las columnas que lo soportan están separadas 500 m y tienen una altura de 60 m. El punto más bajo del cable queda a una altura de 10 m sobre la calzada del puente. Determine la ecuación de la parábola, considerando como eje de abscisas la horizontal que define el puente y como eje de ordenadas el eje de simetría de la parábola. Calcule la altura de un punto situado a 80 m del centro del puente. Represente gráficamente.

8. Halle desde el punto R(–1, –1) las dos rectas tangentes a la parábola $y^2 - x + 4y + 6 = 0$. Calcule el ángulo que determinan estas rectas. Represente gráficamente.

9. Dada la ecuación cuadrática $y^2 - 8x - 2y + 9 = 0$
   a) Identifique la cónica y todos sus elementos.
   b) Determine la ecuación de la recta L_2 tangente a la cónica y que además es paralela a la recta $L_1 : x - y + 4 = 0$
   c) Grafique la cónica y las rectas L_1 y L_2
   d) ¿Cuál es el valor de la mínima distancia de la recta L_1 a la cónica dada?

10. Indique *ecuaciones paramétricas* de la parábola de vértice V (1,1), parámetro p=4 y eje focal paralelo al eje *x*.

11. Determine la *familia de parábolas* de eje focal coincidente con el eje *y* y cuyo vértice es el punto V(0,4). Grafique al menos dos parábolas de dicha familia.

12. Sea L_T la recta tangente a la parábola en un punto P_0 (x_0 , y_0) cualquiera de la misma. Demuestre que los ángulos α y β que dicha recta determina con el segmento FP_0 y con la recta paralela al eje de simetría que pasa por P_0, son congruentes.

13. Con la utilización de software apropiado, verifique los resultados de dos ejercicios a su elección de la presente Guía.

Guía de Trabajo Nº 8

1. Defina *elipse* como lugar geométrico.

2. Deduzca la ecuación de la elipse de centro en C(0,0) y determine todos sus elementos, si: a) el eje focal coincide con el eje x. b) el eje focal coincide con el eje y.

3. Deduzca la ecuación de la elipse de centro en C(*h*,*k*) y determine todos sus elementos, si: a) el eje focal es paralelo al eje *x*. b) el eje focal es paralelo al eje *y*.

4. Defina *lado recto* de una elipse. Determine su longitud.

5. Halle la ecuación del lugar geométrico de los puntos P(x, y) cuya suma de sus distancias a los puntos fijos (4, 3) y (–2, 3) sea igual a 10. Represente gráficamente.

6. Una ruta es cruzada por un puente cuyo arco tiene la forma de media elipse. En el centro del arco la altura es de 6 m. El ancho total del arco semi-elíptico es de 18 m. a) Determine la ecuación de la elipse que describe este puente. b) Los bordes de los carriles de circulación están indicados por líneas

que se encuentran a 2.5 m de los extremos del arco. ¿Cuál es la altura a la que se encuentra el puente en correspondencia con estas líneas?

7. Dada la ecuación cuadrática: $3x^2 + y^2 + 4x - 2y - 3 = 0$
a) Identifique la cónica y todos sus elementos.
b) Halle las ecuaciones de las rectas tangentes a la cónica, y que son perpendiculares a la recta L: $x + y - 5 = 0$.
c) Represente gráficamente.

8. a) Dada la ecuación de la cónica $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1$, determine el ángulo que forma la recta L_1: $x - 2y + 6 = 0$ con la recta L_2, siendo la recta L_2 tangente a la cónica en el punto S de abscisa 4 y ordenada positiva.
b) Grafique la cónica y las rectas L_1 y L_2 .

9. Indique *ecuaciones paramétricas* de la elipse de centro C(-1,1), semiejes 6 y 4, y eje focal paralelo al eje *y*.

10. Determine la *familia de elipses* cuyos focos son: $F_1(3,-2)$ y $F_2(3,6)$. Grafique al menos dos elipses de dicha familia.

11. Sea L_T la recta tangente a la elipse en un punto P_0 (x_0 , y_0) cualquiera de la misma. Demuestre que los ángulos α y β que dicha recta forma con los segmentos determinados por el punto P_0 y cada uno de los focos de la elipse, son congruentes.

12. Con la utilización de software apropiado, verifique los resultados de dos ejercicios a su elección de la presente Guía.

Guía de Trabajo Nº 9

1. Defina *hipérbola* como lugar geométrico.

2. Deduzca la ecuación de la hipérbola de centro en C(0,0) y determine todos sus elementos, si:
a) el eje focal coincide con el eje *x*.   b) el eje focal coincide con el eje *y*.

3. Deduzca la ecuación de la hipérbola de centro en C(*h*,*k*) y determine todos sus elementos, si:
a) el eje focal es paralelo al eje *x*. b) el eje focal es paralelo al eje *y*.

4. Defina *lado recto* de una hipérbola. Determine su longitud.

5. El centro de una hipérbola es el punto C(4, 2), uno de sus focos es F(–6, 2) y su excentricidad de es e = 5/4.
a) Halle su ecuación general e indique todos sus elementos.
b) Obtenga los puntos de intersección con el eje x.
c) Represente gráficamente.

6. a) Halle la ecuación de la hipérbola cuyo centro es el origen de coordenadas, pasa por el punto Q (3, –1), su eje focal es el eje x y una de sus asíntotas es la recta $2x + 3\sqrt{2}\,y = 0$.
b) Represente gráficamente.

7. Dada la ecuación cuadrática: $9x^2 - 4y^2 - 18x - 16y + 29 = 0$
a) Identifique la cónica y todos sus elementos.
b) Determine el ángulo que forman entre sí las rectas que son tangentes a la hipérbola en los puntos en los que ésta intersecta al eje *y*.
c) Grafique la cónica, identificando todos sus elementos, y las rectas del inciso anterior.

8. a) Dada la ecuación de la cónica $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$, determine el ángulo que forma la recta $L_1 : 2x - y + 4 = 0$ con la recta L_2, siendo la recta L_2 tangente a la cónica en el punto Q de abscisa –4 y ordenada positiva.
b) Grafique la cónica y las rectas L_1 y L_2 .

9. Indique *ecuaciones paramétricas* de una hipérbola de centro C(0,1), semiejes 5 y 2 y eje focal paralelo al eje *y*.

10. Determine la *familia de hipérbolas* cuyos vértices son $V_1(1,1)$ y $V_2(1,5)$.

11. Sea L_T la recta tangente a la hipérbola en un punto P_0 (x_0 , y_0) cualquiera de la misma. Se dirige un haz de luz en dirección de uno de los focos, por ejemplo F_1 . Demuestre que el ángulo de incidencia que forma el rayo con la recta tangente en el punto P_0 es congruente con el ángulo de reflexión formado por dicha recta y el segmento determinado por P_0 y el otro foco F_2.

12. Con la utilización de software apropiado, verifique los resultados de dos ejercicios a su elección de la presente Guía.

Guía de Trabajo Nº 10

1. Halle la ecuación de la *superficie esférica* de centro C(1,-2,2) y que pasa por el origen de coordenadas.

2. Dada la ecuación de la *superficie esférica*: $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z - 2 = 0$
a) Indique las coordenadas del centro y radio .
b) Determine la ecuación del plano tangente a la esfera en el punto $A(\sqrt{3} - 1 , 1 , 1)$.
c) Indique una ecuación vectorial paramétrica de la recta normal a la esfera en el punto A.

3. a) Dada la superficie *esférica* $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, determine la ecuación vectorial paramétrica de la curva intersección con el plano $-0.5y + 2z - 6 = 0$. Grafique.

b) Indique la ecuación cartesiana de la superficie cilíndrica cuya intersección con el casquete esférico es la curva encontrada en el inciso anterior. Represente gráficamente.

c) Determine la ecuación vectorial paramétrica de la curva que resulta de la proyección sobre el plano *xy* de la curva hallada en el inciso (a). Grafique.

d) Verifique sus respuestas graficando los lugares geométricos y usando los comandos *Interseca Recorridos* y *Curva* del software GeoGebra.

4. Dada la ecuación $x^2 - y^2 - 6z = 0$

a) Determine las intersecciones con los ejes coordenados, con los planos coordenados (trazas) y con planos paralelos a los planos coordenados.
b) Estudie las condiciones de simetría.
c) Represente gráficamente.

5. a) Defina *superficie cilíndrica*.
b) Determine un procedimiento que permita encontrar la ecuación de dicha superficie, dados un vector paralelo a la *generatriz* y la ecuación de la curva *directriz*.

6. a) Halle la ecuación de la *superficie cilíndrica* de generatriz paralela al vector **v**=(1,3,2) y cuya directriz es: $\begin{cases} 4y^2 = 16(z-2) \\ x = 0 \end{cases}$. Represente en forma cualitativa.

b) Determine la ecuación vectorial paramétrica de la recta geneatriz que pasa por el vértice de la curva directriz.
c) Determine la ecuación vectorial paramétrica de la curva de intersección de la superficie cilíndrica con el plano $z = 0$ y con el plano $x = 0$.

7. a) Defina *superficie cónica.*
b) Determine un procedimiento que permita encontrar la ecuación de dicha superficie, dadas las coordenadas del *vértice* y la ecuación de la curva *directriz*.

8. a) Halle la ecuación de la *superficie cónica* cuya directriz es: $\begin{cases} (x-2)^2 + (z-1)^2 = 16 \\ y = 0 \end{cases}$

y su vértice es el punto V(0,9,0). Realice un gráfico cualitativo.
b) Determine la ecuación vectorial paramétrica del eje de dicha superficie.
c) Identifique la curva de intersección de la superficie cónica con el plano $y = 3$ e indique su ecuación vectorial paramétrica.

9. a) Defina *superficie de revolución.*
b) Determine un procedimiento que permita encontrar la ecuación de dicha superficie, dada la ecuación de la curva *generatriz y el eje de revolución*.

10. Determine la ecuación de la *superficie de revolución* que tiene por generatriz una elipse de semiejes a=6 y b=2, en el plano yz y eje de revolución el eje y. b) Realice un gráfico cualitativo. c) Verifique su respuesta con el software GeoGebra, utilizando el comando *Superficie*.

11. Se desea construir una cubierta de generatriz semielíptica para un centro deportivo, que cubra un espacio circular de 120 m de diámetro con una altura en el centro de dicho espacio de 30m. Seleccione un sistema de coordenadas adecuado al problema y halle la ecuación cartesiana de la cubierta de dicho centro deportivo.

12. Dada la ecuación $\frac{(x)^2}{25} + \frac{(y)^2}{9} - \frac{z^2}{36} = 1$

a) Determine las intersecciones con los ejes coordenados, con los planos coordenados (*trazas*) y con planos paralelos a los planos coordenados.

b) Estudie las condiciones de simetría.

c) Represente gráficamente.

13. Indique justificando su respuesta, si los ejes de las superficies cónicas dadas por los siguientes datos, son rectas paralelas, secantes o alabeadas. Represente gráficamente.

i) Directriz D_1: $\begin{cases} 4(x-10)^2+9(z-2)^2-36=0 \\ y=0 \end{cases}$ con vértice $V_1\,(10, 20, 2)$.

ii) Directriz D_2: $\begin{cases} 16(x-3)^2+9(y-10)^2-144=0 \\ z=0 \end{cases}$ con vértice $V_2\,(3, 10, 20)$.

14. Indique *ecuaciones vectoriales paramétricas* de las curvas de intersección de la superficie dada por la ecuación: $49x^2 + 49y^2 + 9z^2 - 441 = 0$ con cada uno de los siguientes planos:

i) $x= 1$; *ii*) $x + z = 0$

b) Verifique sus respuestas graficando los lugares geométricos y usando el comando *Interseca Recorridos* del software GeoGebra.

15. Indique las ecuaciones correspondientes a las siguientes superficies cuádricas, con semiejes *a*, *b* y *c*. Represente gráficamente.

a) Hiperboloide de una hoja de revolución, con eje de revolución el eje *y*.
b) Paraboloide de revolución, con eje de revolución el eje *x*.
c) Elipsoide de revolución, con eje de revolución el eje *z*.
d) Hiperboloide de dos hojas de revolución, con eje de revolución el eje *x*.

16. Con la ayuda de un software apropiado, grafique al menos un ejemplo de cada una de las superficies cuádricas con y sin centro e indique sus correspondientes ecuaciones.

Guía de Trabajo Nº 11

1. Deduzca fórmulas de transformación que expresen coordenadas polares en términos de coordenadas rectangulares y viceversa.

2. Determine la forma polar de las siguientes ecuaciones:

$$y = 3x; \qquad x^2 + y^2 = 36; \qquad x^2 + y^2 - 2x - 15 = 0$$

3. Dada la ecuación expresada en coordenadas polares: $\rho\,(\text{sen}\varphi + \cos\varphi) = 1$, escríbala en coordenadas cartesianas. Determine qué tipo de curva representa y grafique.

4. a) Deduzca la ecuación de una circunferencia de centro $C(\rho_C,\varphi_C)$ y radio r, en coordenadas polares.
b) Determine las coordenadas polares del centro y el radio de la circunferencia de ecuación: $\rho^2 - 8\rho\cos(\varphi - 60^\circ) + 12 = 0$. Grafique.

5. Deduzca las *ecuaciones polares de las secciones cónicas* para los siguientes casos:
a) directriz perpendicular al eje polar, a *p* unidades a la izquierda del polo.
b) directriz perpendicular al eje polar, a *p* unidades a la derecha del polo.

c) directriz paralela al eje polar, a p unidades arriba del eje polar.
d) directriz paralela al eje polar, a p unidades debajo del eje polar.

6. a) Dada las ecuaciones en coordenadas polares, indique para cada una de ellas, de qué cónica se trata, justificando su respuesta:

(I) $\rho = \dfrac{6}{1+\frac{1}{2}\cos\theta}$ (II) $\rho = \dfrac{12}{2-sen\,\theta}$ (III) $\rho = \dfrac{12}{2-4sen\,\theta}$ (IV) $\rho = \dfrac{12}{2+4\cos\theta}$

b) Represente gráficamente las cónicas (I), (II), (III) y (IV), en coordenadas polares, indicando las coordenadas polares del centro y de los focos.
c) Verifique la respuesta con la ayuda del *Escenario Geométrico Interactivo EGI – EGI– Cónicas en coordenadas polares*, contenido en el Capítulo 4 del Libro Interactivo Geometría Dinámica: https://www.geogebra.org/m/zsvdbqju

7. Indique las ecuaciones y las gráficas de las siguientes curvas:
a) Curvas de trébol ; b) Limacon ; c) Lemniscatas.

8. Deduzca fórmulas de transformación que expresen *coordenadas cilíndricas* en términos de coordenadas rectangulares y viceversa.

9. Trace la gráfica de cada una de las siguientes ecuaciones en *coordenadas cilíndricas*, donde c es una constante: a) $\rho = c$; b) $\varphi = c$; c) $z = c$

10. Deduzca fórmulas de transformación que expresen *coordenadas esféricas* en términos de coordenadas rectangulares y viceversa.

11. Trace la gráfica de cada una de las siguientes ecuaciones en *coordenadas esféricas*, donde c es una constante: a) $\rho = c$; b) $\varphi = c$; c) $\phi = c$

12. Dada la ecuación en *coordenadas cilíndricas*: $\rho\,(4\cos\varphi + 3\text{sen}\varphi) + 5z = 0$
a) Obtenga la ecuación en *coordenadas cartesianas*.
b) Obtenga la ecuación en *coordenadas esféricas*.

Guía de Trabajo Nº 12

1. Enuncie y demuestre el *Teorema de los Ejes Principales en* R^2.

2. Indique, justificando su respuesta, qué condiciones deben cumplir los valores propios de la matriz de la forma cuadrática asociada, para cada una de las secciones cónicas.

3. Para cada una de las siguientes ecuaciones:
I) $x^2 + 2\,xy + y^2 - 8\sqrt{2}\,x + 8 = 0$
II) $2x^2 + \sqrt{3}\,xy + y^2 - 4 = 0$
III) $2x^2 - 4\,xy - y^2 + 8 = 0$

a) Indique la cónica que representa a través de los valores propios de la matriz asociada a la forma cuadrática.
b) Encuentre la matriz P que diagonaliza ortogonalmente la matriz de la forma cuadrática.
c) Encuentre la ecuación de la cónica referida al sistema rotado.
d) Calcule el ángulo que han rotado los ejes.
e) Represente gráficamente.

4. Enuncie y demuestre el *Teorema de los Ejes Principales en* R^3.

5. Indique, justificando su respuesta, qué condiciones deben cumplir los valores propios de la matriz de la forma cuadrática asociada, para cada una de las superficies cuádricas.

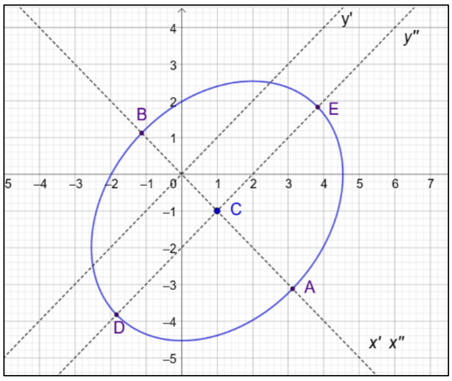
6. Para cada una de las siguientes ecuaciones:

I) $5x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 2xy - 2xz - 2yz - 16x + 4y - 4z + 19 = 0$

II) $-x^2 + yz + 2x - 4z - 5 = 0$

a) Indique la cuádrica que representa a través de los valores propios de la matriz asociada a la forma cuadrática.
b) Encuentre la matriz P que diagonaliza ortogonalmente la matriz de la forma cuadrática.
c) Encuentre la ecuación de la cuádrica referida al sistema rotado.

7. Teniendo en cuenta la información del gráfico y conociendo que $\|\boldsymbol{AB}\| = 6\ y\ \|\boldsymbol{DE}\| = 8$, halle la ecuación de la cónica en términos de las variables *x* e *y* :



GUÍA DE TRABAJOS PRÁCTICOS COMPLEMENTARIOS

para repaso previo a las instancias de evaluación

C1. Sean $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, ..., \mathbf{v_n}$, n vectores en R^n y sea A la matriz de nxn cuyas columnas son $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, ..., \mathbf{v_n}$ Demuestre que $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, ..., \mathbf{v_n}$ son LI sí y sólo sí, la única solución del sistema AX = 0 es la solución trivial X = 0.

C2. Sea A una matriz de nxn. Demuestre que det(A) ≠ 0 sí y sólo sí las columnas de A son LI.

C3. a) Determine el *espacio solución* del siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 3x + 6y - 3z = 0 \end{cases}$$

b) Encuentre una *base* y la *dimensión* del espacio solución.

C4. a) Obtenga un vector **w** tal que **w** = 2**v**, siendo **v** = (4,1,3)
b) Indique una base de R^3 que incluya al vector **v**. Justifique su respuesta.
c) Encuentre las coordenadas de **v** y de **w** en la base del inciso (b).

d) Explique por qué el conjunto de vectores (**v**, **w**, **a**) no es base del espacio, cualquiera sea el vector **a**.

C5. Demuestre, usando álgebra vectorial, que las diagonales de un rombo son perpendiculares.

C6. Demuestre, usando álgebra vectorial, el *teorema de las tres perpendiculares*:

Si una recta es perpendicular a un plano, y una recta de ese plano que pase por el pie, es perpendicular a otra recta del mismo plano, esta última es perpendicular a la recta determinada por un punto cualquiera de la primera y la intersección de las otras dos.

C7. Sean los vectores **a** = (1, –2, 3) y **b** = (3, 1, 2). Encuentre un vector **c**, no nulo, que sea combinación lineal de **a** y de **b** y perpendicular al vector **a**. Interprete geométricamente.

C8. Sean los puntos P=(2,1,-1); Q=(3,2,2) y R=(x,1,2) en R^3

a) Encuentre los valores que debe tomar x para que los vectores **PR** y **QR** sean ortogonales.

b) ¿Existe algún valor de x para el cual {**PR**, **QR**} sea una base ortogonal de R^3?. ¿Por qué?

C9. Sea { **u, v** } un *conjunto ortonormal* de vectores en R^n con producto euclidiano interior

i) Evalúe $<(\mathbf{u} + \mathbf{v}), (\mathbf{u} + \mathbf{v})>$

ii) Evalúe $<(\mathbf{u} + \mathbf{v}), (\mathbf{u} - \mathbf{v})>$

iii) Muestre que $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \sqrt{2}$

C10. a) Sea Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ vectores no nulos de R^n. Demuestre que $\left(\vec{u} - \overrightarrow{proy_{\vec{v}}^{\vec{u}}}\right).\vec{v} = 0$

b) Interprete geométricamente esta igualdad.

c) Determine el valor de a de modo que el ángulo comprendido entre $\vec{v} = a\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}$ y $\vec{w} = 2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j}$ sea $\frac{\pi}{2}$.

C11. Halle la proyección del vector **a** = (4, –2, –4) sobre la dirección del vector **b** = (–2, 1, 2). Determine además el vector proyección de **a** en la dirección de **b**.

C12. Dos cuerdas, AB y CB, sujetan un cable vertical en B (3,3) que soporta un objeto. Las cuerdas están fijas en los puntos A (0,6) y C (7,7). En el punto B actúa una fuerza vertical hacia abajo de 4 kN.

a) Represente gráficamente e indique las componentes de los vectores ***AB***, ***CB***, y ***F***.

b) Determine las longitudes de ambas cuerdas.

c) Evalúe el vector proyección de ***F*** en la dirección de cada una de las dos cuerdas.

C13. Dados los puntos A (0, 0, 0) m, B (3 , 0 , 6) m, C (- 3 , 0 , 6) m y D (0 , 9 , 0) m, usando vectores y las operaciones apropiadas, evalúe:
a) El área del triángulo de vértices A, B y C.
b) El volumen del prisma de base triangular de aristas AB, AC y AD.
c) Indique, justificando su respuesta, si { **AB**, **AC**, **BC** } es conjunto linealmente dependiente o linealmente independiente.

C14. a) Dados tres vectores **a**, **b** y **c** de R^3 demuestre que:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\, \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\, \mathbf{c}$$

b) Verifique el resultado del inciso anterior para los siguientes vectores:

$$\mathbf{a} = (-2, 1, 4),\ \mathbf{b} = (4, 3, -1) \text{ y } \mathbf{c} = (0, 2, 4)$$

C15. Verifique las siguientes expresiones usando propiedades:

a) $(3\mathbf{u} - \mathbf{v}) \times (\mathbf{u} - 2\mathbf{v}) = 5\,(\mathbf{v} \times \mathbf{u})$

b) $2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (2\mathbf{v} \times \mathbf{w} \cdot \mathbf{u})$

C16. Dados los planos:

$$\pi_1:\ \frac{x}{\frac{3}{2}} - \frac{y}{3} + \frac{z}{3} = 1$$

$$\pi_2:\ x - 2z + 6 = 0$$

$$\pi_3:\ (x, y, z) = (3,0,1) + t(2,0,-4) + k(2,5,1,) \qquad t, k \in R$$

a) Indique, justificando su respuesta, dos de los planos dados que sean paralelos.

b) Indique, justificando su respuesta, dos de los planos dados que sean perpendiculares.

c) Determine la intersección del plano π_1 con los planos coordenados (trazas). Grafique.

C17. Dado el plano $\pi: a(x - x_1) + b(y - x_2) + c(z - x_3) = 0$ con

$$\mathbf{n} = a\,\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j} + c\boldsymbol{k} = \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} \boldsymbol{i} - \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} \boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} \boldsymbol{k}$$

siendo Q (x_1, x_2, x_3) un punto del plano. Demuestre que el vector $\mathbf{n}$ es perpendicular al plano π, es decir, perpendicular a todos los vectores del plano π dados por $\mathbf{w} = \alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{u}$ donde $\alpha, \beta \in R$, $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$.

C18. Dados los planos: $\pi_1:\ 2x - y + z + 1 = 0$ y $\pi_2:\ x + 2y - z - 4 = 0$

a) Usando el concepto de familia de planos, encuentre la ecuación del plano π_3 que pasa por la intersección de los planos dados y por el punto Q (–1, 1, 1).

b) Determine el ángulo que forman los dos planos dados.

c) Halle la ecuación del plano π_4 normal a los dos planos dados y que pasa por el punto Q. Encuentre el punto de intersección entre estos tres planos.

C19. a) Dada la recta L indique un procedimiento que le permita determinar un vector director y un punto de la misma. Justifique su respuesta. Realice un esquema que permita visualizar gráficamente los lugares geométricos y la información disponible. Escriba la ecuación vectorial paramétrica de dicha recta.

$$L\ :\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{cases}$$

b) Escriba la ecuación vectorial paramétrica de la siguiente recta L_1. Calcule la distancia de la misma al origen de coordenadas. Represente gráficamente.

$$L_1\ :\begin{cases} 5z + 20 = 0 \\ 4x - 20 = 0 \end{cases}$$

C20. Dadas las siguientes rectas:

$$L_1: \begin{cases} x = 2-\lambda \\ y = 1+2\lambda \\ z = -4-\lambda \end{cases} \quad \lambda \in R \qquad\qquad L_2: \begin{cases} 2x+y+z-1=0 \\ x-z=0 \end{cases}$$

a) Encuentre las ecuaciones simétricas de la recta L_2 e identifique los números directores.
b) Indique justificando su respuesta, si las rectas dadas son paralelas, secantes o alabeadas.
c) Determine la ecuación de un plano paralelo a las rectas L_1 y L_2 y que diste 10 unidades del punto Q(1, 0, 0). ¿Es único dicho plano?

C21. a) Determine la ecuación del plano π que contiene al punto R(2,-1,1) y a la recta L: $(x, y, z) = (2, -1, 0) + t(2, -2, 3),\ \ t \in R$

b) Calcule el ángulo que forma la recta dada L con el plano coordenado *yz*.

C22. Determine la ecuación de la circunferencia que es tangente a la recta L: x + 2y = 3 en el punto Q(-1,2) y el centro está en el eje y. Represente gráficamente.

C23. Halle la ecuación de la circunferencia cuyo centro está sobre la recta 2x + y – 14 = 0 y que pasa por la intersección de las circunferencias C_1: $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 11 = 0$ y C_2: $x^2 + y^2 - 4x + 4y - 8 = 0$. Utilice el concepto de familia de circunferencias. Represente gráficamente.

C24. a) Determine la ecuación de la recta L_2 que es tangente a la parábola $x^2 - 6x + 5y - 11 = 0$ y simultáneamente es perpendicular a la recta L_1 : -2x + 4y – 3 = 0

a) Grafique la parábola, identificando sus elementos, y las rectas L_1 y L_2

C25. Un arco tiene forma de una parábola con eje vertical, su altura es de 3 m y su abertura es de 7m.
a) ¿Cuál será la altura del arco a 2m del punto medio de la base?
b) Indique la ecuación paramétrica de la parábola que modela el arco.
c) Determine la ecuación de la parábola en coordenadas polares.

C26. La órbita de la Tierra alrededor del Sol es una elipse que tiene una excentricidad de aproximadamente 0,017. Sabiendo que la distancia media al Sol es de 150 millones de km, encuentre los radios mayor y menor de la trayectoria.

C27. Un arco de forma semielíptica tiene una amplitud en su base de 20 m. Su altura en el centro es de 9 metros. Seleccione un sistema de coordenadas cartesianas adecuado y determine la altura del puente desde un punto ubicado a 8 m del centro.

C28. Un barco envía una señal de auxilio en el momento en el que se encuentra a 80 millas de la costa. Dos estaciones guardacostas Q y R, ubicadas a 400 millas de distancia entre sí, reciben la señal. A partir de la diferencia entre los tiempos de recepción de la señal, se determina que la nave se encuentra 180 millas más cerca de la estación R que de la estación Q. ¿Dónde está ubicada la embarcación? Represente gráficamente.

C29. Con la utilización de software apropiado, verifique los resultados de dos ejercicios a su elección de la Guía de Trabajo Nº 9.

C30. Evalúe la pendiente de la recta tangente en un punto extremo de un lado recto para la parábola, la elipse y la hipérbola. Qué conclusiones obtiene?

C31. Determine gráfica y analíticamente las ecuaciones de las rectas tangentes a la elipse E por el punto exterior Q (10,4). La elipse E es tal que sus focos son los puntos F_1 (-4,5) y F_2 (2,5) y pasa por el punto P_0 (2,2). Verifique la respuesta con la ayuda del *Escenario Geométrico Interactivo EGI – Tangentes a una elipse por un punto exterior*, contenido en el Capítulo 4 del Libro Interactivo Geometría Dinámica: https://www.geogebra.org/m/zsvdbqju

C32. a) Determine la ecuación vectorial paramétrica del eje de la *superficie cónica* cuya directriz es:

$$\begin{cases} 9(y-10)^2+36(z-5)^2-324=0 \\ x=0 \end{cases}$$ y su vértice es el punto V(14, 5, 9).

b) In dique la posición relativa entre el eje de la superficie cónica y el eje z y determine el punto de intersección o la distancia entre ambas según corresponda. c) Indique el ángulo que forma el eje de la superficie cónica con el plano yz. d) Determine la ecuación de la superficie cónica. e) Represente gráficamente indicando todos los lugares geométricos y las respuestas anteriores.

C33. Se desea construir una cubierta de *generatriz semielíptica* para un centro cultural, que cubra un espacio circular de 100 m de diámetro con una altura en el centro de dicho espacio de 40m. a) Seleccione un sistema de coordenadas adecuado al problema y halle la ecuación cartesiana de la cubierta de dicho centro cultural. b) Determine la ecuación vectorial paramétrica de la curva intersección de la superficie con el plano z= 20. c) Represente gráficamente todos los lugares geométricos de los incisos anteriores.

C34. Se desea construir una cubierta de *generatriz parabólica* para un estadio deportivo que cubra un espacio circular de 120 m de diámetro con una altura en el centro de dicho espacio de 36m. Seleccione un sistema de coordenadas adecuado al problema y halle la ecuación cartesiana de la cubierta de dicho estadio. b) Determine la ecuación vectorial paramétrica de la curva intersección de la superficie con el plano z= 12. c) Represente gráficamente todos los lugares geométricos de los incisos anteriores.

C35. Represente gráficamente las siguientes *superficies cuádricas*, indicando en cada caso sus trazas y si se trata o no de una *cuádrica de revolución*. Justifique apropiadamente sus respuestas y verifique las mismas utilizando los *Escenarios Geométricos Interactivos EGI – Superficies*, del Libro Interactivo Geometría Dinámica: https://www.geogebra.org/m/zsvdbqju

a) Elipsoide de semiejes a=8, b=4, c=5

b) Hiperboloide de una hoja de semiejes a=3, b=3, c=2.5

c) Hiperboloide dos hojas de semiejes a=1.5, b=2, c=1.5

d) Paraboloide elíptico de semiejes a=1.75, b=1.25, c=4

e) Paraboloide hiperbólico de semiejes a=1.5, b=1.5, c=3

C36. Dada la ecuación cuadrática $x^2 - y^2 - z = 0$.

a) Identifique la superficie.

b) Determine intersecciones con los ejes coordenados.
c) Determine las intersecciones con los planos coordenados y con los planos paralelos a los mismos.
d) Estudie condiciones de simetría y de revolución.
e) Represente gráficamente.

C37. Dadas las siguientes ecuaciones:
a) $-36x^2 - 36x^2 + 16z^2 - 144 = 0$
b) $x^2 + z^2 + 3y = 0$
c) $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 98 = 0$
d) $6x - y + 3z - 12 = 0$
Para cada una de ellas:
i. Identifique de qué superficie se trata.
ii. Analice las condiciones de simetría.
iii. Represente gráficamente.

C38. a) Dada la superficie $x^2 + y^2 = -6\,(z - 4)$, determine la ecuación vectorial paramétrica de la curva intersección con el plano $x + 4z - 10 = 0$.

b) Determine la ecuación vectorial paramétrica de la curva que resulta de la proyección sobre el plano *xy* de la curva hallada en el inciso (a).

c) Represente gráficamente.

d) Verifique sus respuestas graficando los lugares geométricos y usando los comandos *Interseca Recorridos* y *Curva* del software GeoGebra.

C39. En coordenadas polares la expresión analítica de cierto lugar geométrico es: $\rho = \dfrac{6}{1 - \cos\theta}$.

Halle la expresión cartesiana rectangular de la misma e indique el nombre de la curva correspondiente. Represente gráficamente en coordenadas polares.

C40. a) Identifique la cónica cuya ecuación en coordenadas polares es: $\rho = \dfrac{9}{6 - 3\cos\phi}$. b) Determine los elementos fundamentales y halle las intersecciones con el eje polar y el eje a 90º. c) Indique en coordenadas polares la ecuación de una recta directriz de la cónica. d) Grafique indicando los elementos solicitados.

C41. Dada la ecuación en coordenadas cilíndricas: $\rho(2\cos\theta + 5\,sen\theta) + 8z = 0$

a) Obtenga la ecuación en coordenadas cartesianas
b) Obtenga la ecuación en coordenadas esféricas
c) Represente gráficamente.

C42. Para la siguiente ecuación: $3x^2 - 2\,xy + 3y^2 - 14\,x - 6\,y + 23 = 0$

a) Indique la cónica que representa a través de los valores propios de la matriz asociada a la forma cuadrática.
b) Encuentre la matriz P que diagonaliza ortogonalmente la matriz de la forma cuadrática.
c) Encuentre la ecuación de la cónica referida al sistema rotado.
d) Calcule el ángulo que han rotado los ejes.

e) Represente gráficamente.

C43. Para los siguientes valores y vectores propios correspondientes a la matriz de la forma cuadrática asociada a la ecuación de una cónica, y los datos indicados de dicha ecuación en el sistema coordenado *xy*:

$$\lambda_1 = 0 \;\text{ y }\; \lambda_2 = 1 \;;\; b_1 = \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix};\; b_2 = \begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix};\; K = [8 \quad 4] \;;\; f = 20$$

a) A partir de los valores propios y de la matriz K, ¿Qué puede inferir de la cónica?

b) Indique la ecuación de la misma en un nuevo sistema coordenado respecto del cual la cónica esté en su posición estándar.

c) Represente gráficamente indicando los sistemas de ejes coordenados empleados y todos los elementos de la cónica.

C44. Para los siguientes valores y vectores propios correspondientes a la matriz de la forma cuadrática asociada a la ecuación de una superficie cuádrica, y los datos indicados de dicha ecuación en el sistema coordenado xyz: identifique la superficie, indique la ecuación de la misma en el nuevo sistema coordenado y represente gráficamente en el nuevo sistema coordenado.

$$\lambda_1=-3 \;;\; \lambda_2=4 \;;\; \lambda_3=5 \;;\; \mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix}0\\-3/5\\4/5\end{bmatrix};\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix}0\\4/5\\3/5\end{bmatrix};\mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix};\;;\; K = [6 \quad 0 \quad 0] \;;\; j = 33$$

C45. Complete el siguiente cuadro:

Nombre y descripción de la superficie	Ecuación en coordenadas *rectangulares* de la superficie	Ecuación en coordenadas *cilíndricas* de la superficie	Ecuación en coordenadas *esféricas* de la superficie
Cilindro circular cuyo radio mide 3cm y su eje es el eje z.			
		$z = 6$	
	$3x + 6y - 12 = 0$		
			$\rho = 6$

c) Represente gráficamente las superficies indicadas en la Tabla anterior.