UNCUYO
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO

FCEN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

2016
Módulo Matemática

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad Nacional de Cuyo
Cuadernillo de Ingreso 2016

facebook.com/fcen.uncu
4290824
www.fcen.uncu.edu.ar

UNCUYO
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO

FCEN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

2016
Módulo Matemática

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad Nacional de Cuyo
Cuadernillo de Ingreso 2016

facebook.com/fcen.uncu
4290824
www.fcen.uncu.edu.ar

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Autoridades:

Decano:
Dr. Manuel Tovar

Vicedecano:
Dr. Néstor F. Ciocco

Secretraria Académica:
Lic. María Florencia Tarabelli

Secretario de Relaciones Institucionales y Comunicación:
Lic. Damián Ignacio Berridy

Directores de Carrera:
Dr. Luis Marone
(Licenciatura en Ciencias Básicas con orientación Biología)

Dr. Mario Del Pópolo
(Licenciatura en Ciencias Básicas con orientación Química)

Lic. Yanina González
(Licenciatura en Ciencias Básicas con orientación Matemática)

Dr. Eduardo Bringa
(Licenciatura en Ciencias Básicas con orientación Física)

Dra. Lilia Dubini
(Profesorados Universitarios en Ciencias Básicas)

Dr. Rául Marino
(Director de Ciclo Básico)

Subsecretario de Asuntos Estudiantiles:
Mgter. Ing. Carlos Adriano Garcia Pujadas

Coordinador de Ingreso:
Dr. Jorge Rubén Santos

Delegado de Ciencia y Técnica:
Dr. Eduardo Marcial Bringa

Delegado de Posgrado:
Dr. Rodolfo Wuilloud

Indice:

Conjuntos numéricos:

1 Números Reales 4

1.1 Números Naturales 4

1.2 Números Enteros 13

1.3 Números Racionales 19

1.4 Números Irracionales 34

Funciones:

Funciones 61

Función lineal 61

Función cuadrática 63

Formas de expresar la función cuadrática 73

Expresiones algebráicas:

Expresiones algebráicas 84

Expresiones algebráicas enteras, Monomios 86

Polinomios 91

Regla de Ruffini 106

Teorema del resto 107

Factorización de expresiones algebraicas enteras 113

Polinomios primos 117

Expresiones racionales fraccionarias 131

Sistemas de ecuaciones lineales

Ecuaciones lineales 137

Sistemas de ecuaciones lineales: definición y expresión simbólica 143

Trabajos Prácticos 173

Conjuntos numéricos

1. Números Reales

Piedras usadas por los Sumerios en el intercambio comercial.
(Aprox. en el año 9000 AC)

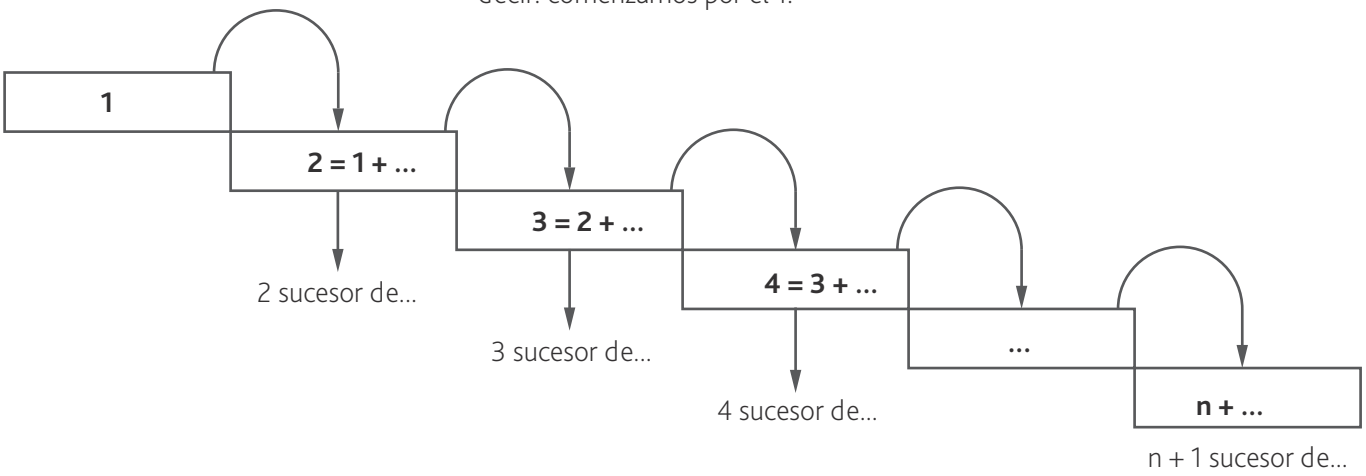
La noción de número y la de contar han acompañado a la humanidad desde la prehistoria. La causa para que el ser humano comenzara a contar surgió, fundamentalmente, de la necesidad de adaptarse al medio ambiente, proteger sus bienes y distinguir los ciclos de la naturaleza, porque percibían y observaban con cuidado los ritmos que ésta posee y su fina relación con las oportunidades de alimentación y, en general, con la conservación de la vida. Por ejemplo, los cazadores marcaban señales en un palo para saber cuántos animales habían abatido en la cacería.

Tuvieron que pasar muchos años para que el hombre fuera cambiando su forma de vida: de cazador y recolector, pasó a ser, además, agricultor y ganadero. Por ejemplo, cuando un pastor llevaba sus ovejas a pastar al campo, metía una piedra en su alforja. Luego, cuando las encerraba después del pastoreo, la cantidad de animales debía coincidir con la cantidad de piedras guardadas. Por cada oveja que encerraba, sacaba una piedra de su alforja, si había más piedras que ovejas, significaba que alguna se había perdido. Comparando cantidades es como el hombre comenzó a construir el concepto de número.

1.1. Números Naturales

Los números Naturales son los que usamos para contar. Son los primeros que aprendimos siendo niños. Para contar un árbol, una bicicleta o simplemente un elemento utilizamos el símbolo 1, la unidad. Para contar dos elementos utilizamos el símbolo 2, tres elementos el 3 y así sucesivamente.

Este es el concepto que introdujo el matemático Peano[1] para construir los números naturales, a cada número natural le sigue otro que se obtiene agregándole o sumándole una unidad a este y obteniendo su sucesor, es decir: comenzamos por el 1:



[1] Peano, Giuseppe (1858-1932) fue un matemático y filósofo italiano, conocido por sus contribuciones a la Teoría de conjuntos. Peano publicó más de doscientos libros y artículos, la mayoría en matemáticas.

Un número natural y su sucesor se llaman consecutivos.

De esta manera se construye "el conjunto de los Números Naturales", al cual lo denotamos con la letra $\mathbb{N}$.

$$I = \{1, 2, 3, K, n, n + 1, K\}$$

La suma de una unidad se puede extender a la suma y al producto de dos números naturales cualesquiera.

La suma de dos números naturales a y b se obtiene de agregarle al número a tantas unidades como representa b. Se denota como a + b, y también es un número natural.

El producto o multiplicación de dos números naturales a y b se obtiene de sumar el número a tantas veces como representa b. Se denota por **a.b**, y también es un número natural.

Propiedades de la suma y el producto

No importa qué números naturales se elijan, todos se comportan del mismo modo cuando las operaciones se realizan de cierto modo.

Es famosa la frase: "El orden de los factores no altera el producto", es decir, no importa en qué orden multipliquemos los números Naturales (factores), su resultado (el producto) será el mismo.

Este comportamiento general se enuncia en forma de propiedades. Además de esta conocida propiedad, la suma y el producto de números naturales tienen otras propiedades que daremos a continuación:

Para todo a, b y c números naturales, la suma y el producto satisfacen las siguientes propiedades:

Nombre	Propiedad	Ejemplo	
Ley Asociativa:	$(a+b) + c = a + (b+c)$	$(5+2) + 3 = 7 + 3 = 10$ $5 + (2+3) = 5 + 5 = 10$	Esta propiedad nos permite sumar o multiplicar tres o más números naturales entre sí.
	$(a+b) + c = a + (b+c)$	$(7 . 4) . 5 = 28 . 5 = 140$ $7 . (4 . 5) = 7 . 20 = 140$	
Ley Conmutativa:	$a + b = b + a$	$4 + 5 = 9$ $5 + 4 = 9$	Esta propiedad nos permite sumar o multiplicar números naturales sin tener que preocuparnos del orden de ls mismos.
	$a . b = b . a$	$4 . 7 = 28$ $7 . 4 = 28$	
Ley Distributiva del producto con respecto a la suma:	$a . (b + c) = a . b + a . c$	$5 . (7 + 3) = 5 . 10 = 50$ $5 . 7 + 5 . 3 = 35 + 15 = 50$	Esta propiedad relaciona las operaciones y determina un orden de prioridad en las operaciones.

Divisibilidad

Dados dos número naturales **a** y **b**, decimos que **b divide a** y existe un número natural **c** tal que **a = b.c** . En este caso también se dice que **b** es un divisor de **a** o que **a** es múltiplo de **b**.

Ejemplo:

- 2 divide a 6 pues 6 = 2.3
- Además 6 es múltiplo de 2 y de 3.

Por otro lado el número 1 divide a cualquier natural a, pues **a = 1.a** .

Un número natural **p** distinto de 1 se dice primo si sus únicos divisores son 1 y **p**.

Ejemplo: Los números 2, 3 y 5 son primos.

Los números distintos de 1 que no son primos se llaman compuestos.

Ejemplo: Los números 4 y 15 son compuestos pues 4 = 2.2 y 15 = 3.5 .

Un resultado, que es tan importante que recibe el nombre de Teorema Fundamental de la Aritmética, establece que todo número natural distinto de 1 tiene una única representación como producto de factores primos, salvo orden. Por ejemplo 12 y 650 se factorizan como producto de números primos de la siguiente manera:

$\mathbf{12 = 2 \,.\, 2 \,.\, 3 = 2^2 \,.\, 3}$ y $\mathbf{650 = 2 \,.\, 5 \,.\, 5 \,.\, 13 = 2 \,.\, 5^2 \,.\, 13}$

Divisibilidad

Dados dos número naturales **a** y **b**, decimos que **b** divide divide a **a** y existe un número natural **c** tal que **a = b . c**. En este caso también se dice que **b** es un divisor de **a** o que **a** es múltiplo de **b**.

Ejemplo:

- 2 divide a 6 pues 6 = 2.3,
- Además 6 es múltiplo de 2 y de 3.

Por otro lado el número 1 divide a cualquier natural **a**, pues **a = 1 . a**.

Un número Natural **p** distinto de 1 se dice primo si sus únicos divisores son 1 y **p**.

Ejemplo: Los números 2, 3 y 5 son primos.

Los números distintos de 1 que no son primos se llaman compuestos.

Ejemplo: Los números 4 y 15 son compuestos pues 4 = 2 . 2 y 15 = 3 . 5.

Un resultado, que es tan importante que recibe el nombre de **Teorema fundamental de la aritmética**, establece que todo número natural distinto de 1 tiene una única representación como producto de factores primos, salvo orden. Por ejemplo 12 y 650 se factorizan como producto de números primos de la siguiente manera:

$\mathbf{12 = 2 \,.\, 2 \,.\, 3 = 2^2 \,.\, 3}$ y $\mathbf{650 = 2 \,.\, 2 \,.\, 5 \,.\, 13 = 2 \,.\, 5^2 \,.\, 13}$

Orden de los números Naturales

Dados dos números naturales a y b podemos determinar que:

- a es igual a b, **a= b**,
- a es mayor que b, **a>b**, si existe un número natural **c** tal que **a= b+c**,
- a es menor que b, **a < b**, si existe un número natural **c** tal que **b= a+c**.

Cada una de estas posibilidades excluye las otras dos. Esta propiedad se denomina **Ley de Tricotomía**.

Con este orden, el conjunto de los números Naturales que es infinito, posee un primer elemento, que es el número 1, pero no posee un último elemento. Por construcción entre un número natural y su sucesor no existe ningún otro número natural, es por eso que decimos que el conjunto de los números naturales es *discreto*.

Máximo común divisor y Mínimo común divisor

El máximo común divisor dos números naturales **a** y **b** , es el mayor número natural que divide tanto a **a** como a **b** y se denota con: **mcd (a,b)**

Ejemplo: el **mcd (6,15) = 3**, pues 3 divide a 6 y a 15 y además es el mayor número con esta propiedad.

La manera directa calcular el máximo común divisor de dos números naturales, es calcular todos sus divisores comunes y quedarse con el mayor de ellos, pero puede llegar a ser engorroso por la cantidad de cuentas a realizar. Una manera más práctica es la siguiente:

- Factorizar cada uno de los números como producto de factores primos y escribir los factores que se repiten como potencias

• Tomar los factores comunes con menor exponente y multiplicarlos entre sí, de esta manera el resultado es el máximo común divisor buscado.

Ejemplo: para calcular el **mcd (126, 2.100)** primero descomponemos 126 y a 2.100 como producto de primos.

$252 = 2^2 . 3^2 . 7$ y **$2.100 = 2^2 . 3 . 5^2 . 7$**

Ahora consideramos los factores comunes con menor exponente y obtenemos que:

mcd (252, 2.100) = $2^2 . 3 . 7 = 84$

Si **mcd (a, b) = 1** diremos que los números Naturales **a** y **b** son **coprimos** o **primos relativos**.

Ejemplo: si a = 140 = $2^2 . 5 . 7$ y b = 99 = $3^2 . 11$, enotnces a y b son coprimos pues mcd (140, 99) = 1.

El mínimo común múltiplo de dos números Naturales a y b, es el menor número natural que es múltiplo de tanto de a como de b, y se denota con **mcd (a,b)**.

Ejemplo:
Si a = 6 y b = 10. Los múltiplos de a = 6 son:
6 = 6.1, 12 = 6.2, 18 = 6.3, 24 = 6.4, **30 = 6.5**, 36 = 6.6, ...

y los múltiplos de b = 10 son:
10 = 10.1, 20 = 10.2, **30 = 10.3**, 40 = 10.4, 50 = 10.5, ...

entonces el **mcm (6, 10) = 30**.

Un modo más sencillo para calcular el mínimo común múltiplo de dos números naturales **a** y **b**, consiste en factorizar a ambos números con factores primos y luego calcular el producto de los factores no comunes y comunes con el mayor exponente de las factorizaciones realizadas. El resultado es el mínimo común múltiplo de a y b.

Por ejemplo si a = 63 = $3^2 . 7$ y b = 600 = $2^2 . 3 . 5^2$, entonces:

mcm (63, 600) = $2^3 . 3^2 .5^2 . 7 = 12600$.

Ejercitación:

Ejercicio 1:
Resolver las siguientes operaciones con números naturales

a) 2.(6+3.4)+(1+4).3+2.(2+3.1).(4+2)

b) 16 . (2 + 3)

c) 11 + (4 + 3) . 5 + 1

d) 4 . 2 . 3 + 2 . (3 + 1)

e) 9+ 2.(3 + 7).(2 + 1) + 5.(3+ 2.4)

f) (5 + 7 . 2) . (7 + 3)

g) (6 + 4 . 3) [(2 + 3) . 5 + 5 . 3]

h) 13 + 4 . 5 - 23

i) 2 . 12 + 5 + 45 . 5 + 1

j) 3 . (3 . 5 + 12) . (6 + 4)

Ejercicio 2:
Completar con = ó ≠ según corresponda.

a) 123 + (14 + 345) **.....** (123 + 14) + 345

b) 19 . (13 + 24) **.....** 19 . 13 + 19 . 24

c) 1029 . 457 **.....** 457 . 1029

d) 13 + 2 . 40 **.....** 2 . (13 + 40)

e) 105 + (12 . 45) **.....** (105 + 12) . 45

f) (12 + 3 - 4) . 2 **.....** 4 . (6 + 3 - 2)

Ejercicio 3:
Determinar los divisores de 12, 15, 36 y 47.

Ejercicio 4:
Escribir los múltiplos de 15 menores que 100.

Ejercicio 5:
¿Cuáles de los siguientes números son múltiplos de 6?
89, 9, 22, 48, 6, 88, 86, 53, 42, 3.

Ejercicio 6:
¿Cuáles de los siguientes números son múltiplos de 35?
70, 5, 53, 35, 49, 125, 10, 24, 32.

Ejercicio 7:
¿El número 22680, es divisible por 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 81?

Ejercicio 8:
Descomponer los siguientes números en factores primos:

a) 32
b) 180
c) 225
d) 392
e) 468
f) 1260

Ejercicio 9:
Utilizando los resultados del ejercicio anterior, calcular:

a) mcd (32, 392)
b) mcd (186, 468)
c) mcd (1260, 225)
d) mcd (392, 468)
e) mcm (32, 180)
f) mcm (225, 1260)
g) mcm (468, 392)
h) mcm (180, 468)
i) mcm (392, 392)

Ejercicio 10:
Calcular el d = mcd(15,18), el m = mcm(15,18) y el producto entre m y d. Comparar este último resultado con el producto 15.18.
¿Qué conclusión observa?

Ejercicio 11:
Expresar una generalización del ejercicio anterior. Justifique por qué es posible.

Ejercicio 12:
Encontrar, si es posible, dos números primos cuyo producto sea:

a) 35
b) 72
c) 36

Ejercicio 13:
Tengo una colección de 105 insectos, cada uno guardado en una cajita cuadrada de igual tamaño. Deseo poner esas cajitas en exposición de manera que formen un rectángulo completo. ¿De cuántas maneras lo puedo hacer?

Ejercicio 14:
Si tenemos dos ruedas dentadas formando un engranaje, de 40 y 16 dientes, respectivamente. ¿Cuántos dientes de cada rueda deben pasar para que vuelvan a coincidir en el mismo punto? ¿Cuántas vueltas habrá dado cada una de ellas?

Ejercicio 15:
Si tengo 120 esmeraldas, 160 rubíes y 200 zafiros. ¿Cuántas piedras debo emplear en cada collar? y ¿Cuántos collares puedo hacer de cada piedra preciosa?, si quiero montar collares lo más grandes que sea posible. Cada collar con el mismo número de piedras, sin que sobren, y sin mezclar colores.

Ejercicio 16:
Ana viene a la biblioteca de la UNCuyo, abierta todos los días, cada 4 días y Juan, cada 6 días. Si han coincidido hoy. ¿Dentro de cuántos días vuelven a coincidir?

Ejercicio 17:
Las alarmas de tres relojes suenan cada 4 minutos, 10 minutos y 15 minutos, respectivamente. Si acaban de coincidir las tres alarmas dando la señal. ¿Cuánto tiempo pasará para que vuelvan a coincidir?

A través de la suma podemos definir la resta o sustracción de la siguiente manera:

a-b= c si y sólo si **a= b+c**

donde a, b y c son números naturales. Por ejemplo:

8-5= 3 pues 8= 5+3

Pero esta operación no siempre se puede llevar a cabo en el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$. Por ejemplo:

5-8 no está definida, no existe un número natural c tal que 5= 8+c !!!

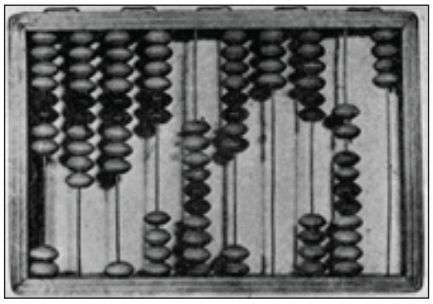
Por esta razón surge la necesidad de ampliar el conjunto de los números naturales a los números enteros. Este conjunto numérico es el que describiremos en la próxima sección.

1.2 Números Enteros

Los números que hoy llamamos negativos, durante muchísimos años, fueron conocidos como "Números Falsos". En el Siglo V, en Oriente, se manipulaban números positivos y negativos utilizando ábacos, tablillas o bolas de diferentes colores. Cuando los grandes matemáticos de la época resolvían ecuaciones que daban resultados negativos, solían llamarlos absurdos porque aquéllas soluciones eran imposibles.

Ya, mucho antes que ellos, los comerciantes chinos usaban en sus cuentas dos colores: los números de las deudas en color rojo y los que no lo eran en color negro. Sin embargo, los indios fueron los primeros en interpretar los números positivos y negativos, como créditos y débitos, respectivamente, distinguiéndolos simbólicamente.

A partir del siglo XV, algunos matemáticos muy conocidos comenzaron a utilizar los números negativos en sus trabajos. Stifel[2], popularizó el uso de los signos "+" y " " para diferenciar los números positivos y negativos. Hasta entonces, se utilizaba la palabra latina *minus* que significa menos, o su abreviatura **m**.



Ábacos Antiguos

Como ya vimos, la operación diferencia 5-8, no puede efectuarse en los números naturales. Para superar esta dificultad introducimos el número cero, 0, y para cada número Natural a, el número negativo -a, llamado opuesto de a. Los números naturales se denominan *enteros positivos* y sus opuestos, *enteros negativos*. Por ejemplo el opuesto del número 2 es el número negativo -2 y el opuesto de 125 es -125.

Los números enteros positivos, los números enteros negativos y el número cero, dan lugar al "*conjunto de los Números Enteros*", al cual notaremos con $\mathbb{Z}$.

$\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...\}$

En este nuevo conjunto, 0 es el elemento neutro para la suma, es decir:

$0 + a = a + 0$ para todo número entero a.

Extendemos la definición de suma mediante la convención:

$(-a) + a = a + (-a) = 0$ para todo número natural a.

Por ejemplo, -4 es por definición, el único número que sumado a 4 da 0.

$(-4) + 4 = 4 + (-4) = 0$

La diferencia 5 - 8 es ahora calculable:

$5 - 8 = 3$ pues $3 + (5-8) = (3 + 5) - 8 = 8 + (-8) = 0$

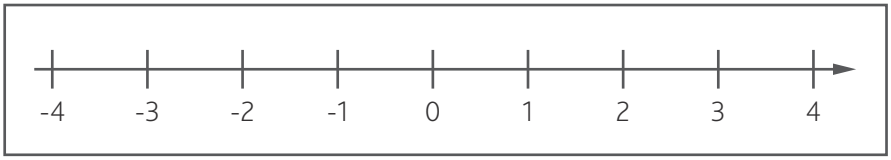
[2] Stifel, Michael (1487-1567) fue un matemático alemán que descubrió los logaritmos e inventó una primigenia forma de tablas logarítimicas. Su trabajo más importante es Arithmetica integra que, contiene importantes innovaciones en anotación matemática.

Es decir, 5 - 8 es el opuesto del 3. Como vimos anteriormente, se nota -3. Además, - 0 = 0 pues 0 + 0 = 0. Es decir, 0 es su propio opuesto y además no es un número positivo ni negativo.

Respresentación gráfica

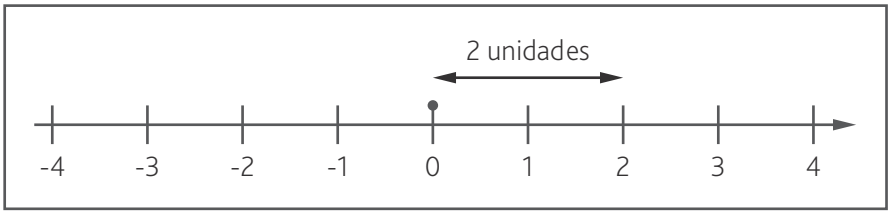
Tomemos una línea recta, marquemos un punto particular de ella y asociémoslo con el número cero, este punto se denomina *origen*.

A continuación, escogemos una unidad de medición y la marcamos un número indefinido de veces en ambas direcciones a partir del origen, asociando los números positivos a la derecha y los negativos a la izquierda, tal como lo indica la siguiente gráfica:

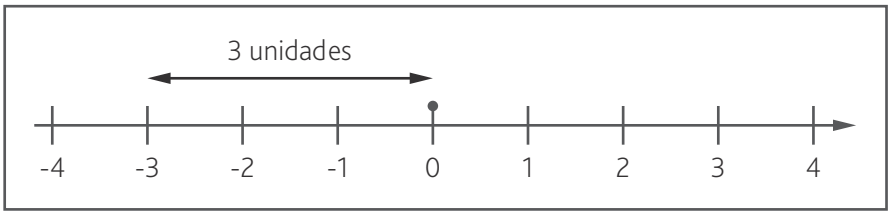


Todo número entero consta de un signo, + ó -, dependiendo si es un entero positivo o negativo, y de un número natural denominado *valor absoluto* que representa cuántas unidades dista del cero. Es decir:

Ejemplo: El número 2 tiene signo + y valor absoluto 2, pues:



Ejemplo: El número -3 tiene signo - y valor absoluto 3, pues:



El valor absoluto de un número entero **a** indica cuántas unidades dista **a** del **0** y lo simbolizamos con **|a|**.

Suma de números Enteros

Cada vez que se suman números enteros se obtiene otro número entero, pero para facilitar la realización de esta operación lo analizamos en dos casos distintos:

La suma de dos números enteros a y b del mismo signo es un número entero que tiene el signo de a y de b, y cuyo valor absoluto es igual a la suma de los valores absolutos de a y b.

La suma de dos números enteros a y b de distinto signo es un número entero **a + b** que tiene el signo del número de mayor valor absoluto; y cuyo valor absoluto es la diferencia entre los valores absolutos. Al mayor le restamos el menor.

Ejemplos:

$-8 + (-5) = -(8 + 5) = -13$

la suma de -8 y -5 es un número con signo negativo, cuyo valor absoluto es la suma del valor absoluto del -8, es decir 8, y del valor absoluto del -5, es decir 5.

$9 + (-17) = -(17 - 9) = -8$

pues el valor absoluto de -17 es 17 y el de 9 es 9, como $17 > 9$ la suma tiene signo negativo, y su valor absoluto es 17.

Producto de números Enteros

También sucede que cada vez que se sumen números enteros se obtiene un número entero y conviene analizar dos casos posibles:

El producto de dos números enteros a y b del mismo signo es el número entero que tiene signo positivo, cuyo valor absoluto es el producto de los valores absolutos de a y b.

El producto de dos números enteros a y b de distintos signos es el número entero a . b que tiene signo negativo, cuyo valor absoluto es el producto de los valores absolutos de a y b.

Ejemplos:

(-7) . (-5) = 7 . 5 = 35

3 . (-5) = -(3 . 5) = -15

Propiedades de la suma y la resta

Dado que la suma y el producto de números enteros son una extensión natural de la suma y el producto de los números naturales, dichas operaciones siguen satisfaciendo las leyes asociativa, conmutativa y distributiva del producto con respecto a la suma.

Además, para todo número entero **a** se verifica que:

Propiedad	Ejemplo	
a + 0 = 0 + a = a	(-7) + 0 = 0 + (-7) = -7	Cualquier número entero sumado a 0 (el neutro) es el mismo número.
(-a) + a = a + (-a) = 0	(-8) + 8 = 0 8 + (-8) = 0	Para cada número entero que se considere, siempre se puede encontrar otro número entero (su opuesto) que sumado a él da 0, sin importar en qué orden se haga.
a . 0 = 0 . a = 0	-3 . 0 = 0 . (-3) = 0 5 . 0 = 0 . 5 = 0	Cualquier número entero multiplicado por 0, es 0. Esta propiedad se llama *ley de absorción*.
a .1 = 1 . a = a	- 7 . 1 = 1 . (-7) = -7 4 . 1 = 1 . 4 = 4	Cualquier número entero multiplicado por 1 (la unidad) es el mismo número.
- (-a) = a	- (-13) = 13	El opuesto del opuesto de un número, es el mismo número.

Relación de orden de los números Enteros

Dados a y b dos números enteros diferentes, diremos que:

a es mayor que b, $a > b$, sí y sólo sí $a - b$ es un entero positivo.

Caso contrario, diremos que a es menor que b, $a < b$.

Ejemplos:

$5 > -7$, pues $5 - (-7) = 5 + 7 = 12$.

$-4 > -5$, pues $-4 - (-5) = -4 + 5 = 1$.

Como consecuencia del orden que acabamos de definir se tiene que:
1) Todo entero negativo es menor que cero.
2) Todo entero positivo es mayor que cero.

Ejercitación:

Ejercicio 18:
Efectuar las siguientes operaciones en el conjunto de los números enteros.

a) 63 - 84

b) 63 - (-84)

c) -63 - 84

d) -63 + 84)

e) -63 - (-84)

f) 113 + (8 - 131)

g) (-2) . (3 + 4 . 6)

h) (-4) . (-1 + 3 . 2)

i) [2.(1-2) +12].(12-4.2).(-2-4)

j) (-3) . (-2) . (-5)

k) (4 + 5 . (-2)) . (-1 + 2 . (-5))

l) 14.(-7) - 14

m) 11.[-5.8+2(13-6.2)-3.(4.(2-3)+4)]+(4-20).3

n) (-13 + 11) - (6 - 8)

o) - [-10+2.(21-24)] -2.[(3+5).3-5(-)]+1

p) (-1) . (-4) + 3 . 2

q) 1024.(12+(8-6).(7-13)).[65-(43-2).3+1]

Ejercicio 19:
Resolver las siguientes operaciones combinadas

a) 5. 4. 7 + (6 + 5 - 3) - 12 : 4

b) 2. 5 + 5 .(2 . 3)³

c) 6. 33 - [8 + 6 (19 - 12)]

d) 7.2{4.[7+4.(5.3-9)]-3.(40-8)}

e) 10 - 9 - [- (3 + 2) - (7 - 9)]

f) - 6 + [8 - (-3 + 5)] . 2

g) 9 - [24 - (-1 - 2)] : (-9)

h) (10 -15) + 3 . [3 - (2 + 1)]

i) 2.[8 - 4.(10 - 6) - (-3 - 2)]

j) (-9+7).(3-2.4):[6-(-9+10)]

k) [8 - (-10 + 14)]: [9 - (4 + 2.3)]

l) -5.[4 - (3 - 2.5 + 8)] - [15 -(-5)]

Ejercicio 20:
Representar en la recta los siguientes números enteros

a) -4

b) 2

c) 0

d) -5

e) 7

f) -1

Ejercicio 21:
Completar con los signos > o <.

a) 2 3

b) -4 0

c) 5 ..... -7

d) 1 ..... -1

e) 5 + 14 ..... 2 . 17

f) 2 . 3 ..... 3 + 4

Ejercicio 22:
Ordenar de mayor a menor los siguientes números enteros

{1, -4, 0, 2, -7, 5, -10, -1, 8}

Ejercicio 23:
Ordenar de menor a mayor los siguientes números enteros

{-8, 7, -10, 0, 6, 3, -2, 10, -1, -2}

Ejercicio 24:
Indicar cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas:

a) Si dos números enteros son negativos, el mayor de ellos es el que está más alejado del cero.

b) Dados dos números enteros, uno positivo y otro negativo, el mayor es siempre el positivo.

c) El cero es mayor que cualquier número entero negativo y menor que cualquier número entero positivo.

Ejercicio 25:
Representar con números enteros los siguientes datos:

a) 32 grados centígrados bajo cero.
b) Una deuda de mil pesos.
c) Una altitud de seis mil novecientos sesenta y cinco metros s.n.m.

Ejercicio 26:
Completar en cada caso con un número entero de tal manera que la proposición resulte verdadera:

a) 2 + ……. = -7	c) -5 + ……. = 0	e) -3 < ……. < -1
b) -2 < ……. < 4	d) 3 – (-3) = …….	

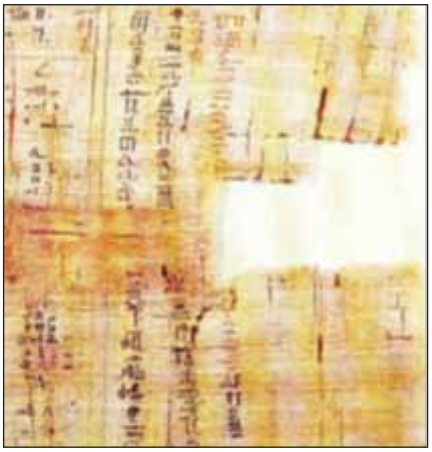
Ejercicio 27:
Mediante una flecha, conectar la operación combinada con su correspondiente resultado.

-5+ (-3) + 2 + 1 + (-4)	33
-1 – 4 - (-8) + (-3) + 5	16
10 -[-6 + (-8) -4] - (-3 - 2)	-88
9 + [15 +(7 - 10)] - [8 - (7 + 3) + (-2)]	-9
-4 •(4 •3 + 10)	2
-5 •[4-(3 -2•5 +8)]-[15 -(-5)]	5
4 - 8 + 7 • (-2) - (-20)	25
15 + (-3) • (-7) -10	0
-4 . (-3) - 6 . (-2)	-35

A través del producto, podemos definir la división de la siguiente manera:

$$\frac{a}{b} = c \text{ si y sólo si } a = b \cdot c$$

donde a, b y c son números enteros.



Papiro de Rhind: Tabla de fracciones dobles (1650 A.C.)

Ejemplo:

$\frac{-8}{2} = -4$ pues $-8 = 2 \cdot (-4)$

Observación importante:
Que esta operación no siempre se puede llevar a cabo en el conjunto de los números enteros, por ejemplo:

$\frac{1}{2}$

No está definida, pues no existe ningún número entero **c**, tal que **1 = 2 . c**.

Por esta razón surge la necesidad de ampliar el conjunto de los números enteros a los números Racionales.

Números Racionales

Todos los años, en el Antiguo Egipto, hacia el mes de julio, el río Nilo crecía e inundaba todas las tierras de labranza. Esto, por muy raro que parezca, era esperado con mucha alegría porque gracias a las inundaciones, el río dejaba sobre los campos una fina capa de elementos fertilizantes (el limo) que traía en sus aguas. La inundación duraba hasta el mes de septiembre.

Leonardo de Pisa, izquierda.
Piña de Fibonacci, derecha.

En esas fechas, el faraón enviaba a los agrimensores a repartir los terrenos entre los campesinos, para lo que se ayudaban con cuerdas anudadas a una misma distancia. A estos medidores les asaltó un gran problema: Había veces que, al medir un campo, sobraba o faltaba un trozo de cuerda

Los campos no podían medir lo que ellos quisieran. Las cuerdas eran unidades de medida y ellos tenían que verificar que cada campo tenía un determinado número de cuerdas por cada lado. Solucionaron este problema inventando un nuevo tipo de número, el fraccionario, que era la razón de dos números naturales.

En el siglo XIII, Leonardo de Pisa, llamado Fibonacci[3], introdujo en Europa la barra horizontal para separar numerador y denominador en las fracciones. A principios del siglo XV, el árabe Al Kashi[4] fue el que generalizó el uso de los números decimales tal y como los conocemos hoy.

[3] Leonardo de Pisa, (1170-1250), fue un matemático italiano, famoso por haber difundido en Europa el sistema de numeración actualmente utilizado, el que emplea notación posicional (de base 10) y un dígito de valor nulo: el cero; también es famoso por idear la sucesión de Fibonacci (surgida como consecuencia del estudio del crecimiento de las poblaciones de conejos) y que describe muchos fenómenos biológicos.

[4] Ghiyaseddin Jamsheed Kazan, se le conoce también más abreviado como Al-Kashi (1380-1429) fue un astrónomo y matemático Persa. Elaboró un tratado sobre la circunferencia en 1424, en este trabajo calcula el número con dieciséis posiciones decimales (2 π=6.2831853071795865).

A finales del siglo XVI, Simon Stevin[5] desarrolló y divulgó las fracciones decimales que se expresaban por medio de números decimales: décimas, centésimas, milésimas, etc., pero los escribía de una forma complicada. Por ejemplo: al número 456,765 lo escribía 456 (0) 7(1) 6(2) 5(3).

En el siglo XVII, aparecieron los números decimales tal y como los escribimos hoy: separando con un punto o una coma la parte entera de la parte decimal. Los números decimales se impusieron, en casi todos los países, al adoptarse el Sistema Métrico Decimal en el siglo XVIII, concretamente en 1792.

Como vimos, la operación de dividir no siempre es posible en el conjunto de los números enteros, para salvar este inconveniente definimos "*el conjunto de los números Racionales*" de la siguiente manera:

$$\left\{ \frac{a}{b} \Big/ \text{a y b son números enteros y } b = 0 \right\}$$

Los *números racionales* o *fraccionarios* se representan por el cociente de dos números enteros, llamados numerador y denominador, respectivamente, siendo el denominador distinto de cero.

Notemos que todo número entero a es racional, pues se puede representar como la fracción $\frac{a}{1}$.

Igualdad de números Racionales

Dos números racionales $\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}$ y $\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}}$ se dicen iguales o equivalentes si y sólo si **a . d = c . b**

Ejemplo:

$\frac{1}{2}$ es equivalente a $\frac{3}{6}$, pues 1 . 6 = 2 . 3

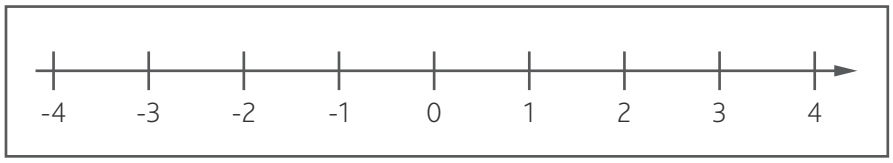
Un número racional $\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}$ se dice irreducible si **a** y **b** no tienen divisores en común.

En el ejemplo anterior, $\frac{1}{2}$ es una fracción irreducible, mientras que $\frac{2}{4}$ no, ya que el 2 es un divisor común de 2 y 4.

[5] Simon Stevin (1548-1620), publicó "La aritmética de Simón Stevin, de Brujas", breve tratado sobre las fracciones decimales, en donde se exponía con suma claridad el empleo de fracciones decimales para la extracción de la raíz cuadrada de un número. También introdujo una nueva notación para describir los números decimales, de escaso éxito dada su complejidad.

Representación gráfica de los números Racionales

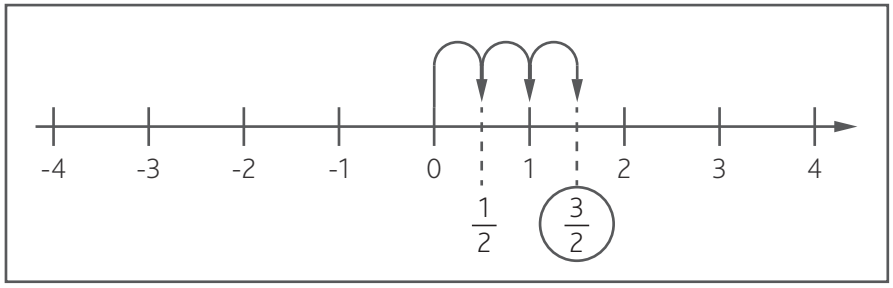
Procediendo de la misma forma que en el caso de los enteros, construimos la siguiente gráfica:



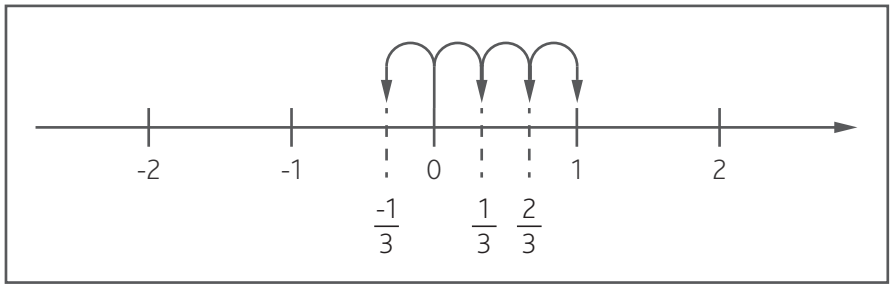
Para determinar el punto de la recta que representa la fracción irreducible $\frac{a}{1}$, y $b>0$, dividimos el segmento con extremos en 0 y 1 en b partes iguales. Tomamos a de esas partes a partir del cero, hacia la derecha si $a>0$, y hacia la izquierda si $a<0$.

Ejemplos:

Si queremos representar el número $\frac{3}{2}$, dividimos cada segmento unidad en dos partes iguales y tomamos 3 de estas partes a partir del cero hacia la derecha, como lo indica el gráfico:



Si queremos representar el número $\frac{-1}{3}$, dividimos el segmento unidad en tres partes iguales y tomamos una de estas partes a partir del cero hacia la izquierda, como lo indica el gráfico:



El valor absoluto o módulo de un número racional representa la distancia en la recta numérica entre dicho número y el cero. Si **r** es un número racional, $|\mathbf{r}|$ denota su valor absoluto. Por ejemplo: $\left|\frac{3}{2}\right| = \frac{3}{2}$, mientras que $\left|-\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{3}$, como podemos observar en las figuras anteriores.

Suma de números Racionales

La suma de dos fracciones de igual denominador es otra fracción de igual denominador, cuyo numerador es la suma de los numeradores. Es decir:

$$\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{c}} + \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{c}} = \frac{\mathbf{a+b}}{\mathbf{c}}$$

Ejemplo:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{1+4}{3} = \frac{5}{3}$$

La suma de dos fracciones de distintos denominador se reduce a buscar dos fracciones equivalentes con igual denominador, y realizar la suma como en el caso anterior.

Una manera de encontrar dos fracciones equivalentes con igual denominador es:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a\,.\,d}{b\,.\,d} + \frac{c\,.\,b}{d\,.\,b} = \frac{a\,.d + c\,.\,b}{b\,.\,d}$$

Ejemplos:

$$\frac{4}{7} + \frac{3}{2} = \frac{4\,.\,2}{7\,.\,2} + \frac{3\,.\,7}{2\,.\,7} = \frac{8}{14} + \frac{21}{14} = \frac{29}{14}$$

$$\frac{5}{12} + \frac{7}{18} = \frac{5.18}{12.18} + \frac{7.12}{18.12} = \frac{90}{216} + \frac{84}{216} = \frac{174}{216} = \frac{29}{36}$$

Otra manera de calcular la suma (que nos permite operar con las cifras más pequeñas posibles, en cada caso) es hallar el mínimo común múltiplo **m** de los números de los denominadores de las fracciones, b y d, respectivamente. Éste número **m** cumple que **m= b.r** y **m= d.s**, y por lo tanto tenemos las siguientes igualdades:

$$\frac{a}{b} = \frac{a.r}{m} \quad \text{y} \quad \frac{c}{d} = \frac{c.s}{m}$$

Entonces:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a.r}{m}+\frac{c.s}{m}=\frac{a.r+cs}{m}$$

Ejemplos:

$$\frac{5}{4}+\frac{3}{6}=\frac{5.3}{12}+\frac{3.2}{12}=\frac{15\ +6}{12}=\frac{21}{12}$$

$$\frac{5}{12}+\frac{7}{18}=\frac{5.3}{36}+\frac{7.2}{36}=\frac{15\ +14}{36}=\frac{29}{36}$$

Dados dos números racionales $\frac{a}{c}$ y $\frac{c}{d}$, definimos la resta, $\frac{a}{c}-\frac{c}{d}$, de la siguiente manera:

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a}{b}+\frac{-c}{d}=\frac{a.d+-(c).b}{b.d}=\frac{a.d-c.b}{b.d}$$

Ejemplos:

$$\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}+\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1.2+4(-1)}{2.4}=\frac{2-4}{8}=\frac{-2}{8}=\frac{-1}{4}$$

Producto de números racionales

El producto de dos fracciones es igual a otra fracción, cuyo numerador es el producto de los numeradores y cuyo denominador es el producto de los denominadores. Es decir:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a.c}{b.d}$$

Ejemplos:

$$\frac{6}{5}\cdot\frac{7}{8}=\frac{6.7}{5.8}=\frac{42}{40}=\frac{21}{20}$$

$$\frac{-4}{3}\cdot\frac{5}{2}=\frac{(-4).5}{3.2}=\frac{-20}{6}=\frac{-10}{3}$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)(-8)=\frac{(-1).(-8)}{2.1}=\frac{8}{2}=4$$

Propiedades de la suma y el producto

Al igual que en el caso entero, la suma y el producto de números racionales satisfacen las leyes conmutativa, asociativa y distributiva de la suma con respecto al producto. Además la suma tiene elemento neutro 0, y el opuesto de cada $\frac{a}{b}$ es $\frac{-a}{b}$, pues:

$$\frac{a}{b} + \frac{-a}{b} = \frac{a + (-a)}{b} = \frac{0}{b} = 0$$

Por lo tanto:

$$\boxed{\frac{-a}{b} = -\frac{a}{b}}$$

Sólo aparece una nueva propiedad en $\mathbb{Z}$, respecto de las que ya se cumplían en $\mathbb{Z}$:

Propiedad	Ejemplo	
$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$ si $b \neq 0$	$\frac{3}{5} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{-1} = \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{3} = \frac{15}{15} = 1$	Para cada $\frac{a}{b}$ en $\mathbb{Z}$, con $b = 0$, existe su inverso $\frac{b}{a}$ en $\mathbb{Z}$, y lo denotamos con $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}$
	$\left(-\frac{7}{2}\right) \cdot \left(-\frac{7}{2}\right)^{-1} = \left(-\frac{7}{2}\right) \cdot \left(-\frac{2}{7}\right) = \frac{14}{14} = 1$	

La división por un número racional se define como el producto por su inverso. Es decir:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d}\right)^{-1} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

Ejemplos:

$$4 : \frac{2}{3} = 4 \cdot \frac{3}{2} = \frac{4}{1} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = \frac{12}{2} = \frac{6}{1} = 6$$

$$\frac{7}{9} : \frac{14}{6} = \frac{7}{9} \cdot \frac{6}{14} = \frac{7 \cdot 6}{9 \cdot 14} = \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Distancia entre dos números Racionales

La distancia entre dos números racionales r y s se define como el valor absoluto de su diferencia.

Ejemplo:

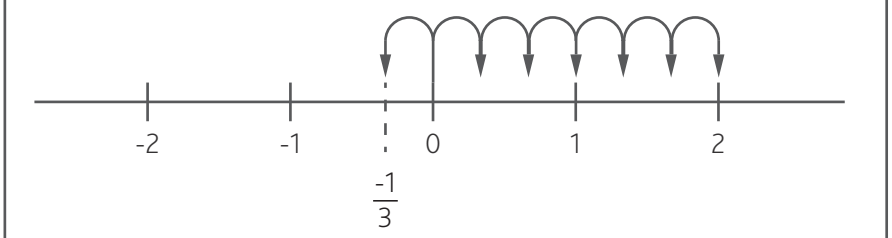
La distancia entre $-\frac{1}{3}$ y 2 es:

$$\left|-\frac{1}{3}-2\right| = \left|-\frac{7}{3}\right| = \frac{7}{3}$$

y la distancia entre 2 y $-\frac{1}{3}$ es:

$$\left|-2-\frac{1}{3}\right| = \left|-\frac{7}{3}\right| = \frac{7}{3}$$

entre $-\frac{1}{3}$ y 2 hay $\frac{7}{3}$ unidades.



Relación de orden de los números Naturales

Dados dos números racionales $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$, con $b,d > 0$, diremos que:

$\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ si y sólo si $a \cdot d < c \cdot b$

Importante: Esta relación es independiente de las fracciones que usemos para representar los números racionales, es decir $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ no necesariamente deben ser fracciones irreducibles

Ejemplos:

$\frac{7}{10} < \frac{8}{11}$ pues $77 = 7 \cdot 11 < 8 \cdot 10 = 80$

$-\frac{37}{32} > \frac{25}{23}$ pues $-851 = (-37) \cdot 23 < (-25) \cdot 32 = -800$

Expresión decimal y fraccionaria de un número Racional

Todo número racional tiene una representación decimal, que se obtiene al dividir el numerador por el denominador, por ejemplo $\mathbf{\frac{1}{2}}$ tiene como representación decimal **0,5** y $\mathbf{\frac{1}{3}}$ tiene como representación decimal **0,3333... = 0,$\widehat{3}$.**

Notemos que hay dos tipos diferentes de representación decimal, las *finitas* o *exactas* y las *infinitas periódicas*.

También, en este caso, es correcta la afirmación recíproca: toda representación decimal finita o infinita periódica corresponde a un número racional.

Para construir la forma fraccionaria número racional a partir de su representación decimal procedemos de la siguiente manera: Si la expresión decimal es finita multiplicar y dividir al número dado por 10 elevado a la cantidad de número que hay luego de la coma, por último si la fracción no es irreducible la simplificamos. Por ejemplo 12,329 tiene tres dígitos luego de la coma, entonces:

$$12{,}329 = \frac{10^3 \cdot 12{,}329}{10^3} = \frac{1000 \cdot 12{,}329}{1000} = \frac{12329}{1000}$$

Es decir, si x es un número decimal con n dígitos después de la coma entonces su expresión fraccionaria es

$$\frac{10^n \cdot x}{10^n}$$

Si la expresión decimal del número es infinita periódica, por ejemplo **q = 6,4232323...** el número se puede dividir en dos partes, el antiperíodo y el período:

q = 6,4232323... = {6 , 4 23}

parte entera

período

antiperíodo

La representación fraccionaria de q se puede determinar a partir de la siguiente fórmula:

$$\frac{\text{Número sin coma - Parte entera con el antiperíodo}}{\text{Tantos 9 como cifra tenga el período y tantos 0 como cifras el antiperíodo}}$$

en el ejemplo:

$$q = \frac{6423 - 64}{990} = \frac{6359}{990}$$

Veamos otro ejemplo, sea $p = 721{,}34\overset{\frown}{602}$ entonces tenemos que:

$p = 721{,}34602602... = \{721\ ,\ 34\ 602\}$

parte entera — antiperíodo — período

$$y\ p = \frac{72134602 - 72134}{9900} = \frac{72062468}{990}$$

Ejercitación:

Ejercicio 28:
Resolver los siguientes ejercicios con números racionales:

a) $(\frac{8}{14} + \frac{3}{14}) - \frac{4}{14}$

b) $\frac{5}{4} + (\frac{3}{4} - \frac{7}{4})$

c) $\frac{3}{2} - \frac{2}{3}$

d) $\frac{11}{15} + \frac{2}{3} - \frac{1}{5} - 1$

e) $\frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{6} - \frac{13}{12} - \frac{3}{2}$

f) $\frac{1}{2}(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}) + \frac{1}{3}(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}) - \frac{1}{4}(\frac{1}{4} - \frac{1}{8})$

g) $(\frac{1}{2} + \frac{1}{3})(-\frac{1}{3} - \frac{1}{4})(\frac{1}{4} + \frac{1}{5})$

h) $(2 - \frac{1}{2})(3 - \frac{1}{3})(\frac{1}{4} - 4)$

i) $\frac{8}{15} : \frac{4}{5}$

j) $\frac{-8}{49} : \frac{4}{14}$

k) $(1 + \frac{1}{2}(-\frac{4}{3})) : (\frac{1}{2} - \frac{2}{3} : 7)$

l) $\frac{49}{5} : 7 + (3 - \frac{11}{7}) : (\frac{14}{49} + \frac{3}{7} : \frac{7}{12})$

m) $\dfrac{3}{9 \cdot \frac{3}{4} + \frac{3}{9} : \frac{4}{3}}$

n) $\dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{1 + \frac{1}{3}}}$

o) $\frac{4}{9}\,\frac{(35 - 14)}{(35 + 49)}$

p) $-\frac{3}{4}\left[\frac{3}{5} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right)\right]$

q) $\dfrac{\frac{1}{2} - \left[-\frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{6}{7}\right) + \frac{5}{21}\right]}{2 \cdot \frac{1}{84} + \frac{1}{84}}$

r) $\dfrac{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}}$

Ejercicio 29:
Ordenar de menor a mayor los siguientes números racionales y representarlo en la recta numérica.

$\frac{2}{3}$; $\frac{3}{2}$; $\frac{5}{4}$; $\frac{6}{12}$; $\frac{55}{53}$; $-\frac{7}{3}$; 1 ; $\frac{3}{4}$; $\frac{5}{6}$; $\frac{10}{8}$;

Ejercicio 30:
Ordenar de mayor a menor los siguientes números racionales y representarlos en la recta numérica.

$-\frac{4}{8}$; $-\frac{1}{2}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{12}{24}$; $\frac{2}{5}$; $-\frac{6}{3}$; -2 ; $-\frac{3}{4}$; $-\frac{2}{6}$; $\frac{12}{8}$;

Ejercicio 31:
Algunos de los siguientes ejercicios están mal resueltos. Decir cuáles, por qué y dar el resultado correcto.

a) $\frac{9 \cdot 12 \cdot 13 + 81}{13 \cdot 14 \cdot 2 - 417} - \frac{3 \cdot 4 + 957}{105} = 123$

b) $\frac{36 \cdot 10^{-2} \cdot 25 \cdot 10^{-12}}{30 \cdot 10^{15} \cdot 10^{-6}} = 3 \cdot 10^{-22}$

c) $\frac{144 + 11^2}{3^2 \cdot 2^3} = \frac{417}{2}$

d) $\frac{6 \cdot 19^9 \cdot 5 \cdot 10^8}{10^2 \cdot 4 \cdot 10^{-11}} = 30 \cdot 10^{13}$

e) $\left(\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10}\right) \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right)\right)^2 = \frac{1}{400}$

Ejercicio 32:
Encontrar la expresión decimal de los siguientes números racionales.

a) $\frac{104}{57}$ a) $\frac{34}{108}$ a) $\frac{3021}{340}$ a) $\frac{11}{22}$ a) $\frac{3}{33}$

Ejercicio 33:
Encontrar la expresión decimal de los siguientes números racionales:

a) 3,236 b) 14,2469 c) $43,\overline{45}$ d) $32,2\overline{796}$ e) $0,46\overline{299}$

Ejercicio 34:
Expresar el resultado de la siguientes operaciones como una fracción:

a) $0,04 + 0,\overline{3}$ b) $5,04 + 0,\overline{23} + 5,\overline{71}$ c) $(- 0,06 + 0,0\overline{2}) \cdot 3,\overline{5}$

d) $\dfrac{2}{-0,8}$ e) $-\dfrac{0,\overline{36}}{-3}$ f) $\dfrac{0,\overline{02} - 0,\overline{1}}{1,5}$

Ejercicio 35:
Mediante una flecha, conectar los números racionales iguales, escritos con distintas notaciones.

$0,\overline{123}$	$\frac{1}{5}$
$0,2\overline{17}$	$\frac{254}{99}$
$2,\overline{56}$	$\frac{2}{5}$
$3,\overline{92}$	$\frac{123}{999}$
$0,\overline{19}$	$\frac{389}{99}$
$0,3\overline{9}$	$\frac{43}{333}$

Ejercicio 36:
Calcular el valor de x en las siguientes expresiones.

a) $\dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{x}$ b) $\dfrac{3}{5} = \dfrac{x}{12}$

c) $\dfrac{7}{2} = \dfrac{x}{6}$ d) $\dfrac{x}{3} = \dfrac{27}{x}$

Ejercicio 37:
Calcular mentalmente:

a) 25 % de 400 b) 20 % de 2.000 c) 75 % de 400

Ejercicio 38:
Completar el cuadro siguiendo el ejemplo de la primer fila.

Porcentaje	Fracción	Porcentaje
10 %	1/10	0,1
25 %		
	1/2	
		0,8
	3/4	

Ejercicio 39:
Completar las siguientes tablas para dos magnitudes:

a) Directamente proporcionales:

4	5		9	11	
20		95			35

b) Inversamente proporcionales:

6		12	2	1	
30	10				3

Ejercicio 40:
Una finca tiene una valla antigua sostenida por 650 postes que están colocados a intervalos de 1,20 m. ¿Cuántos postes se necesitarán para la nueva valla en la que los postes se colocarán a intervalos de 1,30 m?

Ejercicio 41:
Un camión que marcha a 24 km/h demora 5 horas en recorrer cierto trayecto. Si el conductor acelerara 8 km/h su velocidad, ¿en qué tiempo cubriría el trayecto?

Ejercicio 42:
Lucas reparte 540 caramelos entre cuatro niños de forma directamente proporcional a las edades de cada uno de ellos, que son 3, 4, 5 y 6 años. ¿Cuántos caramelos le da a cada niño?

Ejercicio 43:
Tres socios pusieron en marcha un negocio aportando, 5.000 pesos el primero, 25.000 pesos el segundo y 20.000 pesos el tercero. El primer año se obtiene un beneficio de 60.000 pesos, ¿cómo deben repartírselos?

Ejercicio 44:
El dueño de una fotocopiadora ha abonado una factura de 540 pesos por un pedido de 15 cajas de resmas de hojas. ¿A cuánto ascenderá la factura de un segundo pedido de 17 cajas? ¿Cuántas cajas recibirá en un tercer pedido que genera una factura de 2.232 pesos?

Ejercicio 45:
El censo electoral de una población es de 54.600 personas. En unas elecciones un partido político ha obtenido el 45% de los votos. ¿Cuántas personas lo han votado?

Ejercicio 46:
Al subir el precio de una bicicleta un 20%, el precio final es ahora de 3.600 pesos. ¿Cuál era el precio inicial?

Ejercicio 47:
Después de rebajar el precio de una computadora un 8%, me ha costado 2.596 pesos. ¿Cuál era su precio inicial?

Ejercicio 48:
Un juguete vale en una juguetería 140 pesos. Si durante la semana previa al Día del niño el juguete sube un 22% y una vez que éste ha pasado, baja un 9%. Calcule su precio final.

Ejercicio 49:
Si compro un celular de 420 pesos y me lo rebajan un 20% por pago contado. Pero después me cobran el 21% de I.V.A. ¿Cuánto me costó?

Ejercicio 50:
Un automóvil consume 56 litros de gasolina al recorrer 800 kilómetros, ¿cuántos litros de gasolina consumirá en un viaje de 500 kilómetros?

Ejercicio 51:
Se han vertido 3 litros de agua, a 15 °C, en una olla que contenía 6 litros de agua a 60 °C. ¿A qué temperatura está ahora el agua de la olla?

Ejercicio 52:
Se ha fundido un lingote de oro de 3 kg de peso y 80% de pureza, junto con otro lingote de 1 kg y 64% de pureza. ¿Cuál es la pureza del lingote resultante?

Ejercicio 53:
Un empleado ha tenido dos aumentos de sueldo en un año por un porcentaje de un 5% y un 4% respectivamente. El sueldo final es de 4.184 pesos. ¿Cuál era el sueldo a principios de año?

Ejercicio 54:
Calcule el beneficio obtenido de un capital de 5.000 pesos colocado al 2,5% anual durante 7 meses.

Ejercicio 55:
Un banco cobra un interés del 19% anual por los descubiertos en las cuentas. ¿Qué costo tiene para un cliente haber dejado su cuenta con un déficit de 75 pesos durante 15 días?

Ejercicio 56:
¿En cuánto se convertirá un capital de 80.000 pesos, colocado al 7% anual, si se mantiene en el banco durante tres años sin retirar los intereses?

Ejercicio 57:
Calcule el beneficio conseguido por un capital de 2.000 pesos colocados durante 2 años al 5% de interés compuesto anual.

Ejercicio 58:
En la actualidad, en la Argentina, si se realiza una compra de menos de 1.000 pesos con tarjeta de débito, luego se le reintegra en su cuenta bancaria el 5% del IVA pagado (es decir que efectivamente se paga un 16% de IVA, en vez del 21% usual). Calcule cuánto se le devuelve por cada 100 pesos de compra. Si usted realiza varias compras inferiores a 1.000 pesos, por un total de 5.000 pesos, calcule el monto total que recibirá de reintegro.

Notemos que se puede construir números reales cuyas expresiones decimales sean infinitas y que no contengan ningún período. Es decir, existen números reales que no son racionales.

Ejemplo:

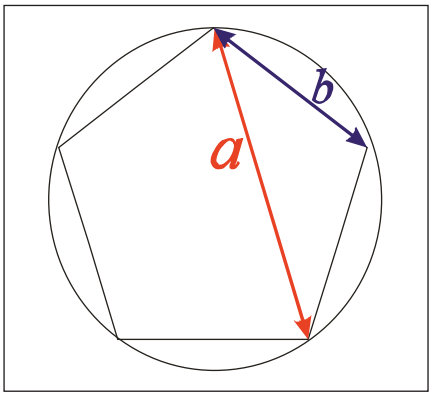
El número que se obtiene al yuxtaponer todos los números naturales:

0,123456789101112131415161718192 0...

tiene una expresión decimal infinita no periódica. Llamaremos a estos números irracionales, ya que no se pueden expresar como razón de dos números enteros.

Números Irracionales

Los griegos, en el siglo VII a.C., descubrieron las magnitudes irracionales. Son números que no pueden ser expresados a través de una fracción. La razón de origen de los números irracionales, fue motivada por el uso de cálculos geométricos que aparecían relacionados con el llamado número áureo o número de oro, que es el cociente entre la diagonal a, de un pentágono regular y el lado b del mismo.



El primer matemático en hacer un estudio formal sobre el número áureo fue Euclides[6], quién demostró que este número no puede ser descripto como la razón de dos números enteros, es decir, que es un número irracional.

Otros dos números irracionales muy conocidos son π y ***e***. El número π se define como la razón entre la longitud de una circunferencia y su diámetro. Los antiguos egipcios (hacia 1600 a.C.) ya sabían que existía esta relación. Recién en el año 1761, Lambert[7] demuestra formalmente que el número π es irracional. Este problema había permanecido sin resolver durante más de 2000 años. Los decimales de π constituyen una sucesión ilimitada, no periódica, que ni siquiera es la raíz de una ecuación algebraica.

La primera vez que se hace referencia al número irracional ***e*** fue en 1618 en una tabla que aparece en un apéndice de un trabajo sobre logaritmos de Napier[8]. No obstante, esta tabla no contenía el valor de la constante, sino que era simplemente una lista de logaritmos naturales calculados a partir de ésta. El "descubrimiento" de la constante está acreditado a Bernulli[9]. El primer uso conocido de ***e***, representado por la letra b, fue en una carta de Leibniz[10] a Huygens en 1690 y 1691. Euler[11] comenzó a utilizar la letra ***e*** para identificar la constante en 1727.

[6] Euclides (300 a.C. – 265 a. C.) fue un matemático y geómetra griego, se le conoce como "El Padre de la Geometría". Su obra Los elementos, es una de las obras científicas más conocidas del mundo; allí se presenta de manera formal, partiendo únicamente de cinco postulados, el estudio de las propiedades de líneas y planos, círculos y esferas, triángulos y conos, y hace el primer estudio formal sobre el número áureo.
[7] Lambert, Johann(1728-1777), fue un matemático, físico, astrónomo y filósofo alemán. Demostró que el número π era irracional. Además, adivinó que el número e y π eran números trascendentes. También hizo aportes al desarrollo de la geometría hiperbólica.
[8] Napier, John (1550-1617), barón de Merchiston, matemático escocés. En 1614 publicó su obra en la que da a conocer los logaritmos que él llamó números artificiales.
[9] Bernoulli, Jakob (1654-1705), fue un matemático y científico suizo. Descubrió el valor del número irracional e a partir del estudio del problema de interés compuesto.
[10] Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716) fue un filósofo, matemático, jurista, bibliotecario y político alemán. Descubrió el cálculo infinitesimal, independientemente de Newton, y su notación es la que se emplea desde entonces. También descubrió el sistema binario, fundamento de virtualmente todas las arquitecturas de las computadoras actuales.
[11] Euler, Leonhard (1707-1783) fue un respetado matemático y físico, y está considerado como el principal matemático del siglo XVIII y como uno de los más grandes de todos los tiempos. Euler trabajó prácticamente en todas las áreas de las matemáticas: geometría, cálculo, trigonometría, álgebra, teoría de números, además de física continua, teoría lunar y otras áreas de la física. Ha sido uno de los matemáticos más prolíficos de la historia.

Números Reales

Todos los números racionales e irracionales forman "el conjunto de los números Reales", al cual denotamos con la letra $\mathbb{R}$.

Existe una correspondencia biunívoca entre los números reales y los puntos de una recta. De esta manera es posible representar cada número real en la recta. Si el número real es racional, su expresión fraccionaria nos permite encontrar su ubicación sobre la recta, como lo hemos estudiado. En cambio, si el número real es irracional, encontrar su ubicación sobre la recta es no trivial, y en la mayoría de los casos son necesarios argumentos complejos de distintas ramas de la matemática.

Propiedades de la suma y el producto

La suma y el producto de números reales satisfacen las mismas propiedades que los números racionales: asociativa, conmutativa, y distributiva del producto con respecto a la suma.

A igual que en los números racionales, el elemento neutro para la suma de números reales es el 0, y la unidad para el producto es el 1. Además, tal como sucedía para todo racional:

1- Para cada número Real r existe su opuesto al cuál lo notamos -r. El opuesto de un número racional es racional y el de un número irracional es irracional.

2- Para cada número real r, no nulo, existe su inverso r^{-1}. El inverso de un número racional es racional y el de un número irracional es irracional.

Valor absoluto de un número Real y distancia entre dos números Reales.

Podemos extender la definición de valor absoluto dada para los números racionales, a todos los números reales, con exactamente la misma definición.

Si a E $\mathbb{R}$ definimos:

$$|a| = \begin{cases} a \text{ si } a \geq 0 \\ -a \text{ si } a \leq 0 \end{cases}$$

Ejemplo: $|4| = 4$ y $|-3| = 3$.

De manera análoga, extendemos la definición de entre dos números reales a y b como:

$$|a - b|$$

Relación de orden de los números Reales

Dados a y b dos números en $\mathbb{R}$, diferentes, diremos que a es mayor que b, $a>b$, si y sólo si $a - b>0$.

Caso contrario, diremos que a es menor que b, $a<b$.

Potencia natural de un número Real

Sean a un número real y n un número natural. Definimos la potencia n-ésima de a, como:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \quad veces}$$

Se deduce de la definición las siguientes propiedades que se cumplen cualesquiera sean a, b números reales y m, n números naturales,

Propiedad	Ejemplo
$a^{m+n} = a^m \cdot a^n$	$(-2)^{3+4} = (-2)^7 = -128$ $(-2)^3 \cdot (-2)^4 = -8 \cdot 16 = -128$
$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	$((-2)^3)^2 = (-8)^2 = 64$ $(-2)^{2 \cdot 3} = (-2)^6 = 64$
$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$	$((-2)^3)^2 = (-8)^2 = 64$ $(-2)^{2 \cdot 3} = (-2)^6 = 64$
$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ con $y \neq 0$	$\left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{3} = \frac{16}{9}$ $\frac{4^2}{3^2} = \frac{16}{9}$
	$\left(-\frac{7}{2}\right)^3 = \left(-\frac{7}{2}\right)\left(-\frac{7}{2}\right)\left(-\frac{7}{2}\right) = -\frac{343}{8}$ $\frac{(-7)^3}{2^3} = \frac{-343}{8} = \frac{343}{8}$

Estas propiedades se pueden demostrar, de forma sencilla, a partir de la definición de la potencia natural de un número real y de las propiedades del producto de números reales.

$$a^{m+n} = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m+n \ \ veces} = a \cdot \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{m \ \ veces} \cdot a \cdot \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n \ \ veces} = a^m \cdot a^n$$

$$\left(a^m\right)^n = a^m \cdot \underbrace{a^m \cdot \ldots \cdot a^m}_{n \ \ veces} = \underbrace{\overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{m \ \ veces} \cdot \ldots \cdot \overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{m \ \ veces}}_{n.m \ \ veces} = a^{m.n}$$

$$(a \cdot b)^n = \underbrace{(a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot \ldots \cdot (a \cdot b)}_{n \ \ veces} \underset{\text{ley asociativa y conmutativa del producto}}{=} \left(\underset{n \ \ veces}{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}\right) \cdot \left(\underset{n \ \ veces}{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}\right) = a^n \cdot b^n$$

Si $y \neq 0$, entonces:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \ldots \cdot \frac{a}{b} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{n \ \ veces}}{\underbrace{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{n \ \ veces}} = \frac{a^n}{b^n}$$

Otros ejemplos:

$$\left(\frac{2x}{5\pi y}\right)^3 \cdot \left(\frac{x^2}{y^4}\right)^2 = \frac{(2x)^3}{(5\pi y)^3} \frac{(x^2)^2}{(y^4)^2} = \frac{2^3 x^3}{5^3 \pi^3 y^3} \frac{x^{2 \cdot 2}}{y^{4 \cdot 2}} = \frac{8x^{3+4}}{125\pi^3 y^{3+8}} = \frac{8x^7}{125\pi^3 y^{11}}$$

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) \underset{\text{Distributiva}}{=} a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Potencia entera de un número Real

Sean x un número real y k un número entero, definimos la potencia k-ésima de x, por medio de las siguientes reglas:

1- Si k es un número natural, x^k se calcula como antes.
2- Si $x \neq 0$, $x^0 = 1$
3- Si k es un entero negativo y $x \neq 0$, $x^k = \frac{1}{x^{-k}}$ (notar que -k es un número natural).

Ejemplos:

$(19 \,.\, \pi^2)^0 = 1$

$\frac{a^3}{2a^4} = \frac{a^3\, a^{-4}}{2} = \frac{a^{3-4}}{2} = \frac{a^{-1}}{2} = \frac{1}{2a}$

$5^{-2} = (\frac{1}{5})^2 = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$

$(\frac{2}{7})^{-3} = (\frac{7}{2})^3 = \frac{7^3}{2^3} = \frac{343}{8}$

$(\frac{a^3 b^5}{x^{-1}})^4 \; (x^{-3}.\, a)^{-2} = \frac{a^{12}\, b^{20}}{x^{-4}}\, x^{(-3)(-2)}\, a^{-2} = a^{12-2}\, b^{20}\, x^{6-(-4)} = a^{10}\, b^{20}\, x^{10}$ si $x \neq 0$

Raíz n-ésima de un número real

Dado un número real x y un número natural n, definimos la raíz n-ésima $\sqrt[n]{x}$, de x como el número real y, que elevado a la potencia n da x.
Es decir:

$$\sqrt[n]{x} = y \text{ si y sólo si } y^n = x.$$

El número real x se denomina radicando y el número natural n índice.

Notemos que:

La raíz de índice par de un número positivo tiene dos valores reales opuestos.

$$\sqrt{49} = \pm 7 \quad pues \quad (\pm 7)^2 = 49$$
$$\sqrt[4]{81} = \pm 3 \quad pues \quad (\pm 3)^4 = 81$$

La raíz de índice impar tiene el mismo signo que el radicando.

$$\sqrt[3]{64} = 4 \quad pues \quad 4^3 = 63$$

$$\sqrt[5]{-32} = -2 \quad pues \quad (-2)^5 = -32$$

La raíz de índice par de un número real negativo no es un número real, pues todo número real elevado a una potencia par es positivo.

De la definición se deducen las siguientes propiedades:
Sean x e y números reales, no negativos y m y n números naturales,

Propiedad	Ejemplo
$\sqrt[n]{x \cdot y} = \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y}$	$\sqrt{16 \cdot 5^4} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{5^4} = 4 \cdot 5^2 = 100$
$\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$, para $y \neq 0$	$\sqrt[3]{-\frac{27}{8}} = \frac{\sqrt[3]{-27}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{-3}{2} = -\frac{3}{2}$
$\sqrt[n]{x^m} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^m$	$\sqrt{4^5} = \sqrt{1024} = 32$ se obtiene lo mismo haciendo $\sqrt{4^5} = \left(\sqrt{4}\right)^5 = 2^5 = 32$
$\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[m \cdot n]{x}$	$\sqrt{\sqrt[5]{1024}} = \sqrt[2 \cdot 5]{2^{10}} = \sqrt[10]{2^{10}} = 2$

Potencia de exponente racional de un número Real no negativo

Sea x un número real no negativo y $r = \frac{m}{n}$ un número racional, definimos la potencia r-ésima de x mediante las siguientes reglas:

Si $r > 0$, entonces $x^r = x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$

Si $r < 0$, entonces $x^r = \frac{1}{x^{-r}}$ (notar que $-r > 0$).

De la definición deducimos que se cumplen las mismas propiedades de la potenciación que habíamos deducido en el caso de tener como exponente un número natural.

Ejemplos:

1) $\sqrt{5^6} = 5^{\frac{6}{2}} = 5^3$

2) $2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} = 2^{\frac{3+2}{6}} = 2^{\frac{5}{6}}$

3) $\left(7^{\frac{1}{2}}\right)^6 = 7^{\frac{1}{2}\cdot 6} = 7^3$

4) $\left(\frac{a}{b}\right)^r : a^{r-1} = \frac{a^r}{b^r a^{r-1}} = \frac{a^{r-(r-1)}}{b^r} = a \cdot b^{-r}$

si $a \neq 0$, $b \neq 0$, $r \neq 0$.

Ejercitación:

Ejercicio 59:
Resolver los siguientes ejercicios:

a) $(-7)^{-2}$

b) $(1-5)^{-\frac{1}{2}}$

c) $(3^{-2} - 2^{-3})^{-1}$

d) $\dfrac{(\frac{2}{3})^{-1}}{\sqrt{81}}$

e) $\left[\dfrac{(\frac{3}{5})^{4}\ (\frac{3}{5})^{-3} + 1}{1 - \dfrac{2}{3 - \frac{1}{2}}}\right]^{-\frac{1}{3}}$

f) $\left[\dfrac{1 - \frac{5}{4}}{\sqrt{-\frac{11}{8} - 2}} + \sqrt{(-\frac{1}{2})^{-4}}\right]^{-1}$

i) $\sqrt{(\frac{1}{3})^{3} + \frac{2^3}{3^2}}$

g) $\sqrt{\frac{7}{21} + (\frac{1}{3})^{3}} : \sqrt{\frac{5}{4} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}}}} - (\sqrt{\frac{9}{4}} - \sqrt{\frac{1}{4}})^{3}$

Ejercicio 60:
Sean a y b dos números reales. Indicar cuál es el error en el siguiente razonamiento, dado que suponemos que $\mathbf{a} > \mathbf{b}$, y deducimos que $\mathbf{a = b}$.

Como $\mathbf{a} > \mathbf{b}$, existe un número real positivo **c** tal que: $\mathbf{a = b + c}$

Multiplicamos a ambos miembros por $\mathbf{a - b}$.

$$\mathbf{a\,(a - c) = (b + c)\,.\,(a - b)}$$

Aplicando propiedad distributiva:

$$\mathbf{a^2 - a\,.\,b = b\,.\,a - b^2 + c\,.\,a - c\,.\,b}$$

Sumamos en ambos miembros $\mathbf{- a\,.\,c}$ y factorizamos:

$$\mathbf{a^2 - a\,.\,b - a\,.\,c = b\,.\,a - b^2 - c\,.\,b}$$

$$\mathbf{a\,.\,(a - b - c) = b\,.\,(a - b - c)}$$

Multiplicamos miembro a miembro por $\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{a - b - c}}$ y simplificamos. Así tenemos:

$$\mathbf{a = b}$$

Ejercicio 61:
Indicar la o las propiedades de números reales que se están utilizando en cada caso.

Ecuación	Propiedad
$4 + 7 = 7 + 4$	Conmutativa de la suma
$2\,(3 + 7) = (3 + 7)\,2$	
$3\,(x + a) = 3x + 3a$	
$4 + (6 + 9) = (4 + 6) + 9$	
$3 \,.\, (4 \,.\, x) = (3 \,.\, 4) \,.\, x$	
$5 \,.\, 4 = 4 \,.\, 5$	

Ejercicio 62:
Utilizando solamente la definición y las propiedades de la potenciación calcular:

a) $\left(\left(-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\right)^{-2}$

b) $\left(\left(\frac{2}{5}\right)^{-1}\right)^{0}$

c) $(3 - (-1))^{2} : \left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$

Ejercicio 63:
Unir con flechas las expresiones de la primera y segunda columna que sean iguales, siendo a y b números reales.

a^2	$(a + b) \,.\, (a - b)$
$(a - b)^2$	$a^2 + b^2$
a^3	$a + a$
$3a$	$a + a + a$
$2a$	$a \,.\, a$
$a^2 - b^2$	$a^2 + b^2 + 2\,a \,.\, b$

Ejercicio 64:
Indicar si las siguientes igualdades son verdaderas o falsas.

Ecuación	Verdadero o falso
$(a \,.\, (-b))^2 = a^2 \,.\, b^2$	
$\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a^3}{b^3}$	
$0^4 = 0$	
$(-3)^2 = -9$	
$\sqrt{4} = \pm 2$	
$\sqrt{9+16} = 3+4$	
$\sqrt{3} + \sqrt{3} = \sqrt{6}$	
$(2+1)^2 = 2^2 + 1$	
$-3^2 = 9$	

Ejercicio 65:
Expresar en forma de potencia, efectúe las operaciones y simplifique.

a) $\sqrt[8]{x^4} \,.\, \sqrt[4]{x^2} =$

b) $\sqrt[9]{a^3} \,.\, \sqrt[3]{a^2} =$

c) $\sqrt[3]{x^5} \,.\, \sqrt{x^4} =$

d) $\sqrt[6]{b^7} \,.\, \sqrt[3]{b} =$

Ejercicio 66:
Racionalizar los siguientes denominadores.

a) $\frac{1}{\sqrt{3 \,.\, a^3}} =$

b) $\frac{\sqrt[3]{3 \,.\, a^3}}{2\sqrt[4]{32}} =$

c) $\frac{3}{\sqrt{8-2}} =$

Ejercicio 67:
Calcule y simplifique las siguientes expresiones.

a) $\sqrt[5]{3} \,.\, (-2) \,.\, \sqrt[5]{3} + 7 \,.\, \sqrt[5]{3} =$

b) $2 \,.\, \sqrt[3]{16} - \frac{1}{3} \,.\, \sqrt[3]{54} + \frac{2}{3} \,.\, \sqrt[3]{250} =$

c) $\sqrt{\left(\frac{125}{27}\right)^3} : \left(-\frac{1}{3}\right)^{-1} + \left(\frac{4}{3}\right)\left(-\frac{4}{3}\right)^{-2} + (-1) \,.\, \sqrt{\left(1-\frac{3}{4}\right)^{-1}} =$

d) Si x, y son reales no negativos $\sqrt[4]{125\, x^3 y}\ \sqrt[4]{5\, x^2 y^3}\ \sqrt[4]{xy} =$

e) $\sqrt[3]{\frac{2\, x^2 y}{m}} : \sqrt[3]{\frac{4xy^2}{m^2}} =$

Ejercicio 68:
Resolver utilizando propiedades de operaciones con números reales:

a) $\left(\frac{5}{7} + \frac{7}{9}\right) : \left(-1 + \frac{1}{2}\right) =$

b) $\dfrac{\frac{11}{49} - \frac{3}{7}}{\frac{11}{49} + \frac{3}{7}}$

c) $\dfrac{\frac{1}{2} - \frac{3}{4} + \frac{7}{8}}{\frac{1}{2} + \frac{3}{4} - \frac{7}{8}} =$

d) $2 + \dfrac{3}{1 + \frac{5}{2}} =$

e) $(\sqrt{2})^{-2} + (\sqrt{3})^{-2} =$

f) $\dfrac{\sqrt{21}\,\sqrt{10}}{\sqrt{6}} =$

g) $\dfrac{\sqrt{30}\,\sqrt{15}}{\sqrt{63}\,\sqrt{21}} =$

h) $\sqrt{27} - 6\sqrt{24} =$

i) $\dfrac{\sqrt{5} + \sqrt{7}}{\sqrt{5} - \sqrt{7}} =$

j) $\dfrac{3 \,.\, \sqrt{8}}{\sqrt{2} + 1} =$

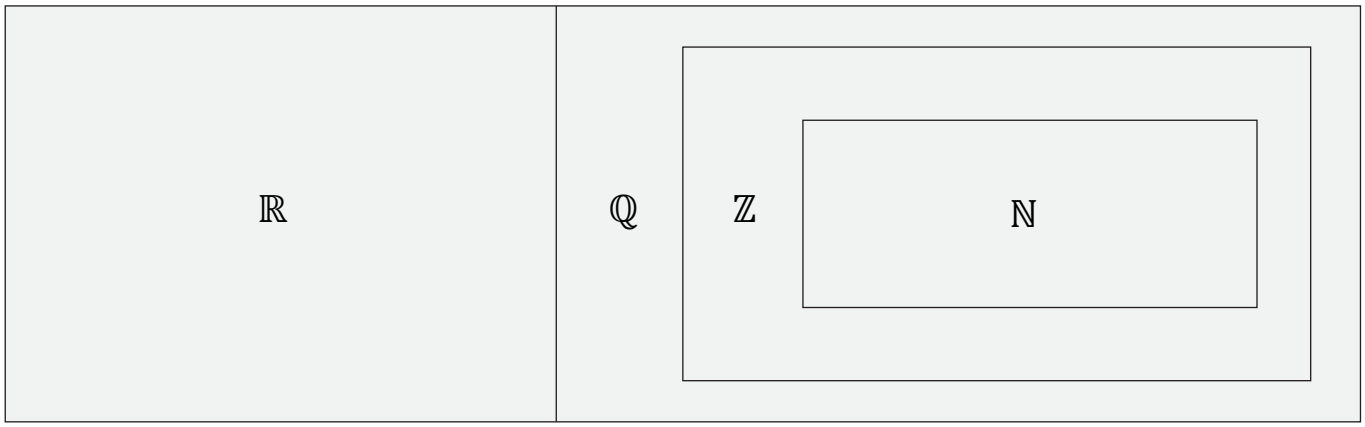
k) $(\sqrt{2} - \sqrt{3}) \,.\, (\sqrt{2} + \sqrt{3}) =$

l) $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 =$

m) $\sqrt[3]{2}\,(\sqrt{2}\,\sqrt{8}) =$

Relaciones entre los distintos conjuntos numéricos

Para interpretar las relaciones entre los distintos conjuntos numéricos es necesario recordar que todo número natural es entero. Todo número entero es racional y todo número racional es real.



Notación científica

La Notación Científica es un recurso utilizado para representar en forma concisa números muy grandes o muy pequeños, consistente en expresar cualquier número real como el producto entre un número cuyo valor absoluto es mayor o igual que 1 y menor que 10 y una potencia de 10.

Por ejemplo:

• La cantidad total de agua que hay en la tierra es de 1.400.000.000.000.000.000.000 litros, que en notación científica se representa como $1{,}4 \,.\, 10^{21}$ litros.

• La masa de átomo de hidrógeno es 0,000000000000000000000000166 gramos, que en notación científica se representa como $1{,}66 \,.\, 10^{-24}$ gramos.

Para representar un número real en notación científica, lo escribimos de manera tal que la parte entera conste de un solo dígito distinto de cero, y como exponente de la potencia 10, escribimos el número correspondiente a la cantidad de lugares que hemos corrido la coma, que será positivo si hemos corrido la coma a la izquierda y negativo si la hemos corrido a la derecha.

Ejemplo:

Si queremos expresar en notación científica la edad del universo, que se calcula en 15.000.000.000 años, escribimos este número tal que la parte entera conste de un solo dígito luego contamos la cantidad de lugares que hemos corrido la coma, en este caso:

15.000.000.000

$\longleftarrow$

10 lugares hacia la izquierda

por lo que el exponente de la potencia de 10 será 10 positivo. Por lo tanto la edad del universo es $1{,}5 \,.\, 10^{10}$ años.

Por otro el diámetro de un electrón que es aproximadamente 0,0000000000001 mm.

0,00000000000000001

$\longrightarrow$

13 lugares hacia la derecha

en notación científica es $1 \,.\, 10^{-13}$. Notemos que el exponente es negativo ya que hemos corrido la coma decimal en 13 lugares hacia la derecha.

Ejercitación

Ejercicio 69:
Expresar los siguientes números en notación científica:

a) 26.000.000.000.000.000

b) 0,0000000000798

c) 269,06

d) 0,0055

Ejercicio 70:
Calcular cuántos segundos hay en un año bisiesto y expresar el resultado en notación científica.

Ejercicio 71:
La luz viaja a una velocidad aproximada de 300.000 kilómetros por segundo y la distancia de la Tierra al Sol es de 150.000.000 kilómetros.

Ejercicio 72:
Escribir en notación científica la velocidad de la luz y la distancia de la Tierra al Sol.

a) Calcular cuánto tiempo tarda la luz del Sol en llegar a la Tierra.

b) Calcular utilizando la notación científica la distancia que recorre un haz de luz en un año de 365 días.

Ejercicio 73:
La distancia de la Tierra al Sol es de 1.5 108 km. Saturno esta a 9,54 veces más lejos del Sol que la Tierra, ¿a qué distancia está Saturno del Sol?

Ejercicio 74:
Expresar el resultado en notación científica.

a) $2{,}6 \cdot 10^{-3} \cdot (4{,}3 \cdot 10^{-4})^2 - 1{,}1 \cdot 10^{-11} + (4{,}3 \cdot 10^{2})^3 =$

b) $\dfrac{(4{,}3 \cdot 10^{4})^3 - 5{,}1 \cdot 10^{9}}{2{,}6 \cdot 10^{11}} =$

c) $\dfrac{3000^3 - (0{,}0006)^6}{(0{,}0012)^3} =$

SIMELA

La Ley 15.211 de 1972, establece el uso obligatorio del Sistema Métrico Legal Argentino (SIMELA) para medir longitudes, masa, tiempo y demás magnitudes especiales. Y adopta las mismas unidades, múltiplos y submúltiplos del Sistema Internacional (SI).

Las unidades de base del SIMELA son:

Magnitud	Unidad	Símbolos
Longitud	metro	m
Masa	Kilogramo	kg
Tiempo	segundo	s
Intensidad de corriente eléctrica	Ampere	A
Temperatura termodinámica	Kelvin	k
Intensidad luminosa	candela	cd
Cantidad de materia	mol	*mol*

Además hay otras unidades suplementarias y derivadas.

Formación de múltiplos y submúltiplos:

Potencia de 10	Prefijo	Símbolos
10^{18}	exa	E
10^{15}	penta	P
10^{12}	tera	T
10^{9}	giga	G
10^{6}	mega	M
10^{3}	kilo	k
10^{2}	hecto	*h*
10^{1}	deca	da
10^{-1}	deci	d
10^{-2}	centi	c
10^{-3}	mili	*m*
10^{-6}	micro	*u*
10^{-9}	nano	n

Según la tabla anterior la potencia 10^3 es equivalente al prefijo kilo, entonces:

$1000\ m = 10^3\ m = 1\ km$

es decir mil metros equivalen a un kilómetro. De igual manera la potencia 10^{-1} es equivalente al prefijo deci, con lo cual:

$0{,}1\ l = 10^{-1}\ l = 1\ dl$, es decir 0,1 litro equivalen a 1 decilitro.

¿Cómo transformar una unidad en otra?

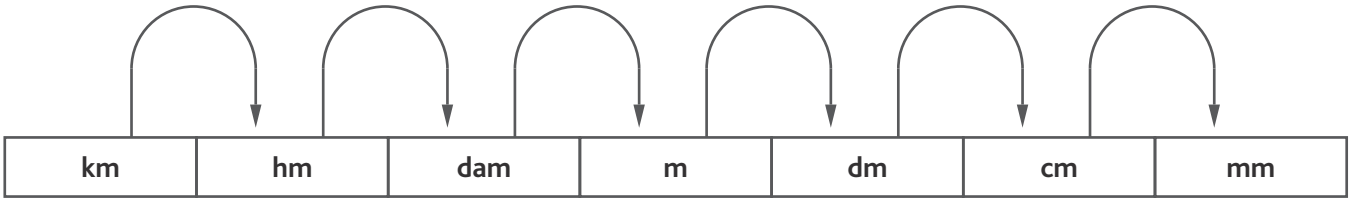
Veamos un método práctico para pasar de una unidad de longitud a otra fácilmente: Primero ordenamos de mayor a menor las unidades, de longitud en este ejemplo:

Kilómetro	Hectómetro	Decámetro	Metro	Decímetro	Centrímetro	Milímetro

Cada unidad de longitud que aparece en la tabla anterior es 10 veces mayor que la que esta a su derecha y 10 veces menor que la a su izquierda. Por lo tanto si tengo que transformar hectómetros a decámetros debo multiplicar por 10 o correr un lugar la coma decimal un lugar a la derecha. Por ejemplo:

7,3 hm = 7,3 . 10 dam = 73 dam

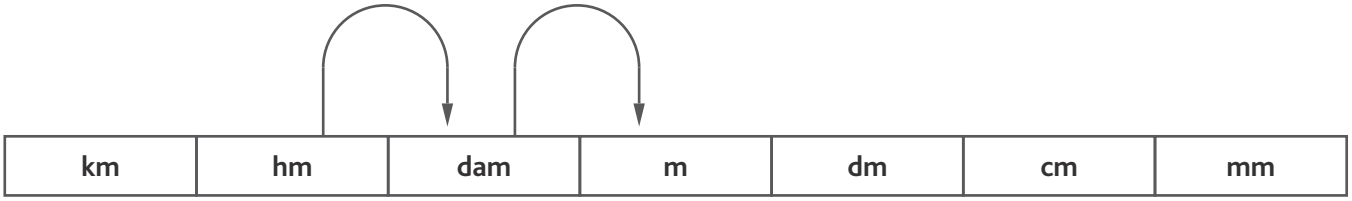
Si ahora queremos pasar 45,67km a centímetro, contamos cuantas unidades nos tenemos que desplazar hacia la derecha para llegar desde km a cm:



En este caso son 5 lugares hacia la derecha, por lo que tenemos que multiplicar a 45,67km por 10-5 o equivalentemente correr la coma cinco lugares hacia la derecha, es decir

45,67 km = 45,67 . 10^{-5} cm = 4567000 cm.

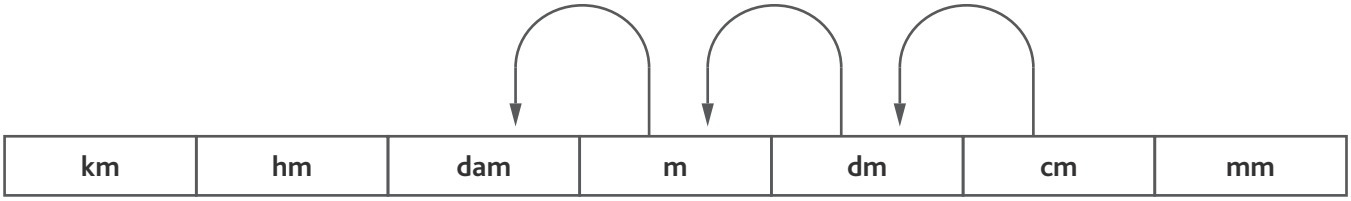
Ahora si queremos pasar 23,698hm a metros, contamos cuantas unidades nos tenemos que desplazar hacia la derecha para llegar de km a m:



en este caso son 2 lugares hacia la derecha, por lo que tenemos que multiplicar a 23,698hm por 10^2 o equivalentemente correr la coma dos lugares hacia la derecha, es decir:

23,698 hm = 23,698 . 10^2 m = 2369,8 m.

De manera análoga razonamos si queremos transformar una unidad en otra superior, por ejemplo si queremos saber a cuántos decámetros son 14589cm, contamos cuantas unidades nos tenemos que desplazar, ahora hacia la izquierda, para llegar de cm a dam:



En este caso son 3 lugares hacia la izquierda, por lo que tenemos que multiplicar a 14589cm por 10^{-3} o equivalentemente correr la coma tres lugares hacia la izquierda, es decir:

14589 cm = 14589 . 10^{-3} dam = 14,589 dam.

En conclusión si deseamos pasar de una unidad a otra, contamos cuántos lugares nos tenemos que desplazar, hacia la derecha o hacia la izquierda según el caso, para llegar de la unidad en la que nos fue dado el dato, a la unidad a la cual queremos transformar. Luego, corremos la coma decimal del número dado la misma cantidad de veces hacia la derecha o hacia la izquierda según correspondiere. De esta manera encontramos la equivalencia que estábamos buscando.

Si deseamos transformar otra de las unidades base del SIMELA en vez de longitud, procedemos exactamente de la misma manera.

Medidas de áreas y volúmenes

A las medidas de longitud del SIMELA, están asociadas las siguientes medias de áreas:

Km^2	**hm^2**	**dam^2**	**m^2**	**dm^2**	**cm^2**	**mm^2**

y de volúmenes

Km^3	**hm^3**	**dam^3**	**m^3**	**dm^3**	**cm^3**	**mm^3**

Si queremos transformar una medida de área en otra, contamos cuantos lugares nos tenemos que desplazar en la tabla hacia la derecha o hacia la izquierda y luego corremos la coma decimal del número dado, dos veces dicha cantidad de lugares en la misma dirección, esto se debe a que las medidas se encuentran al cuadrado.

Por ejemplo si queremos pasar 12,3 m^2 a centímetros cuadrados, como hay que desplazarse dos lugares hacia la derecha, para llegar de metros cuadrados a centímetros cuadrado, entonces debemos correr la coma hacia la derecha cuatro lugares, es decir:

12,3 m^2 = 123.000 cm^2

De manera similar si queremos transformar una medida de volumen en otra contamos cuantos lugares nos tenemos que desplazar en la tabla hacia la derecha o hacia la izquierda y luego corremos la coma decimal del número dado tres veces dicha cantidad de lugares en la misma dirección, esto se debe a que las medidas se encuentran al cubo. Por ejemplo si queremos transformar 6746,8 mm^3 en centímetros cúbicos, como hay que desplazarse sólo un lugar hacia la izquierda para llegar de mm^3 a cm^3, entonces debemos correr la coma tres lugares hacia la izquierda, es decir:

6746,8 mm^3 = 6,7468 mm^3

Ejercitación

Ejercicio 75:
Pasar a metros las siguientes medidas:

a) 124mm b) 34km c) 9809dm d) 0,65dam

e) 3cm f) 0,45hm g) 1000mm

Ejercicio 76:
Pasar a metros las siguientes medidas:

a) 12m b) 0,94km c) 769 dm d) 0,05dam

e) 763mm f) 0,45cm g) 230m

Ejercicio 77:
Completar el siguiente cuadro:

km	hm	dam	m	dm	cm	mm
			15			
0,23						
					9876	
	55					
				0,8		
		13				
						2

Ejercicio 78:
Hallar el resultado de las siguientes operaciones.

a) 0,025hm + 3,36dam – 34,25cm b) 625m – 2,96dam + 62.361cm

c) 234m^2 + 15.327mm^2 + 4dam^2

Ejercicio 79:
Una persona da pasos de 35cm. ¿Cuántos pasos debe dar para recorrer 34,3m?

Ejercicio 80:
Si el espesor de una hoja es de 0,12mm ¿Cuál es el ancho en centímetros de un libro de 750 hojas?

Ejercicio 81:
Calcular el número aproximado de glóbulos rojos que tiene una persona, sabiendo que tiene unos 4.500.000 por milímetro cúbico y que su cantidad de sangre es de 5 litros.

Ejercicio 82:
Una vacuna tiene 100.000.000 bacterias por centímetro cúbico. ¿Cuántas bacterias habrá en una caja de 120 ampollas de 80 milímetros cúbicos cada una?

Ejercicio 83:
Un mol de cualquier elemento químico contiene 6,03 . 10^{23} átomos. Si un mol de carbono pesa 12 gramos ¿Cuánto pesa cada átomo?

Ejercicio 84:
En un circuito eléctrico de un ampere fluyen 6,2 1018 electrones por segundo en cualquier punto del circuito. ¿Cuántos electrones fluyen a través de un foco de 100 watts con una corriente de 120 voltios por una hora? (watts=volts ampere).

Ecuaciones

Una ecuación es una igualdad que contiene una o más incógnitas que deben calcularse.

Resolver una ecuación significa encontrar el o los valores de las incógnitas que, reemplazados en la ecuación, verifican la igualdad. Estos valores se llaman soluciones o raíces de la ecuación.

Ejemplo:

• La igualdad $3x + 7 = 13$, es una ecuación con una incógnita, representada por la letra x, que tiene como solución $x = 2$, pues $3 . 2 + 7 = 13$.

• La igualdad $y = x^2 - 1$, es una ecuación con dos incógnitas, x e y, y tiene como una solución $x = 1$, e $y = 0$. Notemos que $x = 2$, e $y = 3$, también satisface la ecuación. Más aún, si fijamos un valor para x podemos encontrar un valor para y, tal que ambos formen una solución. A diferencia del ejemplo anterior donde la solución es única, aquí tenemos un conjunto infinito de soluciones.

Dos ecuaciones se dicen equivalentes si tienen las mismas soluciones. Por ejemplo, las ecuaciones:
$\frac{x}{2} + \frac{5x}{4} = 14$ y la ecuación $3x - 20 = \frac{x}{2}$ son equivalentes porque ambas se satisfacen sólo para $x = 8$.

Para resolver una ecuación, recordemos las siguientes propiedades de las igualdades:

Si a y b son números reales, entonces:

Nombre de la propiedad	Propiedad
Reflexividad:	$a = a$
Simetría:	Si $a = b$, entonces $b = a$
Transitividad:	Si $a = b$ y $b = c$, entonces $a = c$
Monotonía de la suma:	Si $a = b$, entonces $a + c = b + c$
	Si $a = b$ y $c = d$, entonces $a + c = b + d$
Monotonía del producto:	Si $a = b$, entonces $a . c = b . c$
	Si $a = b$ y $c = d$, entonces $a . c = b . d$

No siempre es sencillo determinar el o los valores de las incógnitas. Pero si tenemos una ecuación con una incógnita que aparece una sola vez, las propiedades de las igualdades nos permiten determinar el valor de dicha incógnita. Por ejemplo, para resolver la ecuación $3x + 7 = 13$

Sumamos (opuesto de 7) a ambos miembros de la igualdad y obtenemos → $3x + 7 + (-7) = 13 + (-7)$

O sea → $3x = 6$

Luego multiplicamos por $\frac{1}{3}$ (inverso de 3), a ambos miembros de la igualdad → $\frac{1}{3}\, 3x = \frac{1}{3}\, 6$

Con lo que queda: → $x = 2$ → Solución de la ecuación dada

Notemos que pasar de término un número de un miembro de la igualdad a otro, es un abuso de lenguaje que se permiten algunos docentes y alumnos pero no es correcto. Lo acertado y matemáticamente correcto es aplicar a ambos miembros la operación inversa de la acción involucrada.

Veamos otro ejemplo. Si queremos encontrar el valor de la incógnita x de la siguiente ecuación procedemos de la siguiente manera:

Ecuación original → $\frac{4x}{3+x} = 5$

Primero, multiplicamos ambos miembros por el inverso de $\frac{1}{3+x}$ → $(3+x)\frac{4x}{3+x} = 5(3+x)$

Obteniendo → $4x = 15 + 5x$

Luego, sumamos el opuesto de 5x a ambos miembros: → $4x + (-5x) = 15 + 5x + (-5x)$

$4x - 5x = 15$

$-x = 15$

Para finalizar, multiplicamos por -1 ambos miembros de la ecuación → $x = -15$ → Solución de la ecuación dada

Notemos que en las dos ecuaciones resueltas anteriormente obtuvimos una única solución. En estos casos la ecuación se dice que es compatible determinada. A continuación veremos que no siempre sucede esto. En algunos casos, la ecuación puede tener infinitas soluciones y se dice compatible indeterminada. Y en otros casos, ningún número real es solución de la ecuación, es decir es incompatible.

Como ejemplo, resolvamos la ecuación:

$$7(2-3x) + x(x+1) - x2 = 2 + 4(3-5x)$$

Aplicamos propiedad distributiva de la suma con respecto al producto: → $14 - 21x + x2 + x - x2 = 2 + 12 - 20x$

Simplificamos la expresión, sumando aquellos términos que sea posible: → $14 - 20x = 14 - 20x$

↑

Se obtuvo una igualdad que se verificará para cada valor de x real que se elija!! Luego, la solución de esta ecuación son todos los números reales y la ecuación se dice que es compatible indeterminada.

Si en cambio se tiene la ecuación:

$$\frac{x}{x - 4} = 1$$

Multiplicamos en ambos miembros x - 4, que es inverso de , obteniendo:

$$x = x - 4$$

Sumamos miembro a miembro - x, tenemos:

$$x - x = x - 4 - x$$

Con lo que la ecuación queda:

$0 = - 4 \longrightarrow$ ¡Absurdo! Luego, la ecuación no tiene solución, es decir, es *incompatible*.

Ejercitación:

Ejercicio 85:
Determinar si x = 2 es o no solución de las siguientes ecuaciones:

a) $- 7 x = 8 x - 30$

b) $\frac{1}{3} x + \frac{1}{4} x = 7$

c) $\frac{3}{4} x = \frac{5}{2} x - \frac{7}{2}$

d) $\frac{x + 3}{2} + \frac{x - 1}{2} = \frac{x - 2}{3} + 3$

Ejercicio 86:
Relacionar uniendo con flechas.

La suma del duplo de un número y el triplo de otro es 10	
La diferencia de dos números es 30	$x - y = 30$
El duplo de la suma de dos números es 20	$x + 2 y = 20$
El costo de 2 kg de azúcar y 3 kg de yerba es 10 pesos	$2 x + 3 y = 0$
Ana y Esther compraron 10 pesos en chocolate	$2 (x + y) = 20$
El duplo de un número sumado a otro es 20	

Ejercicio 87:
Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $8x - (4 + 2x) = -52$

b) $\frac{3(x-1)}{4} + \frac{x}{2} = 3$

c) $\frac{2}{x} + \frac{3}{x} - \frac{4}{x} = 5$

d) $2(3 - x) + 5x - 11 = x - 4 + 2(x - \frac{1}{2})$

e) $\frac{6x}{x-1} - \frac{2x-3}{x-2} = \frac{2x+2}{x-2} + \frac{2x}{x-2}$

f) $2(3x - 1) + 5 = 1 - 3(4 - 2x)$

g) $\frac{3x^2 + 4x}{2x-1} + \frac{2x - 4x^2}{3-x} = \frac{4x^2+2}{x-3} - \frac{3x^2-6}{1-2x}$

Inecuaciones

Como ya vimos, en los números reales existe una relación de orden que satisface la ley de Tricotomía, es decir, dados dos números reales a y b, entonces una y sólo una de las siguientes relaciones es verdadera:

a<b o **a = b** o **a>b**.

Propiedades básicas de las desigualdades:

Para a, b y c de $\mathbb{R}$, se cumple siempre:

Nombre de la Propiedad	Propiedad
Transitividad:	Si $a < b$ y $b < c$ entonces $a < c$.
Monotonía de la suma:	Si $a < b$, entonces $a + c < b + c$.
Monotonía del producto:	Si $a < b$ y $c > 0$, entonces $ac < bc$.
	Si $a < b$ y $c < 0$, entonces $ac > bc$.

Verifiquemos la monotonía del producto con algunos ejemplos.

Si $a<b$ y $c>0$, entonces $ac < bc$. Por ejemplo, si a=3, b=5 y c=4 tenemos que:
$3 < 5$
$3.4 < 5.4$
$12 < 20$

Si $a<b$ y $c<0$, entonces $ac>0$.

Por ejemplo, si a = -4, b = -2 y c = -3 tenemos que -4 < -2

pues -2 - (-4) = -2 + 4 = 2 > 0.

Y (- 3). (- 4) > (- 3). (- 2)
12 > 6

Observemos que si se multiplican ambos miembros de una desigualdad por un número positivo, se mantiene el sentido de la desigualdad. En cambio, si se multiplica por un número negativo, cambia el sentido de dicha desigualdad.

Usaremos la notación $a \leq b$ para indicar que a es menor o igual que b . Podemos verificar que las propiedades de transitividad, monotonía para la suma y el producto se siguen satisfaciendo para el símbolo $\leq$.

Ejercitación

Ejercicio 88:
Resolver las siguientes inecuaciones:

a) $x + 1 < 2$

b) $4 - 2x > x + 4$

c) $3x - 2 \leq 2(6 - 5x)$

d) $\frac{2}{3} - x + \frac{1}{2}(x + 1) > 1 - \frac{1}{2}x$

e) $3x - 1 \leq 11$

f) $-3 < \frac{-5}{4}x + 2$

g) $-2x + 12 > 3x + x$

h) $2x + 12 < 3x + 8$

i) $3(x - 2) - x \geq 3 - 2x$

j) $-3x + 3 \geq -4$

k) $-3(x + 5) < -6(x - 1)$

l) $x \leq (2 - x)\,4 + 2x + 3$

Ejercicio 89:
Si a, b son números reales, analizar la validez de las siguientes proposiciones.

a. Si $a < b$ entonces $a^2 < b^2$.
b. Si a2 < b2 entonces a < b.
c. Si a > 0 entonces a2 > a.

Ejercicio 90:
Encuentre las áreas posibles para los círculos de diámetros menores a 1,5.

Ejercicio 91:
Un estudiante debe mantener un promedio numérico final en cinco exámenes de 60% a 79%, para obtener la regularidad de una materia. Si en los primeros cuatro exámenes obtuvo calificaciones de 96%, 70%, 61% y 65% ¿Qué nota deberá obtener en el quinto examen para poder regularizar la materia?

Ejercicio 92:
La temperatura en la escala Fahrenheit y Celsius están relacionadas por la fórmula C=(5/9)(F - 32). ¿A qué temperatura Fahrenheit corresponderá una temperatura en escala centígrada que se encuentra entre 27°C y 40°C?

Intervalos

Los intervalos son subconjuntos de números reales que se usarán con mucha frecuencia, por ejemplo en la descripción del comportamiento de funciones.

Como se forman a partir de desigualdades, en lugar de usar letras para nombrarlos, usaremos los números que usamos para definirlos. Veamos.

Dados dos números reales a y b tales que a<b definimos:

Intervalo abierto, (a, b) como el conjunto de todos los números reales x tales que a < x < b. En notación de conjunto:

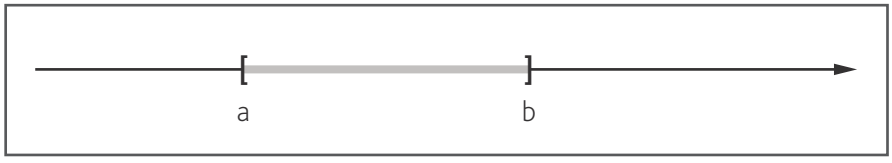
$$(a,b)=\{x\in\mathbb{R} \mid a<x<b\}.$$

Gráficamente:

Intervalo cerrado, [a,b] como el conjunto de todos los números reales tales que a ≤ x ≤ b. En notación de conjunto

$$[a,b]=\{x\in\mathbb{R} \mid a\le x\le b\}.$$

Gráficamente:



Intervalo semiabierto, (a , b] como el conjunto de todos los números reales x tales a < x≤ b que . En notación de conjunto

$$(a,b] = \{x \in \mathbb{Q} \mid a < x \leq b\}.$$

Gráficamente:

[a , b) como el conjunto de todos los números reales x tales que a≤x<b. En notación de conjuntos:

$$[a,b) = \{x \in \mathbb{Q} \mid a \leq x < b\}$$

Gráficamente:

Una inecuación es una desigualdad con una o más incógnitas.

Ejemplos:

a) $3x - 2 < 1$

b) $\frac{x}{2} + 5 \leq 3 - x$

Resolver una inecuación significa encontrar el o los valores de las incógnitas que, reemplazados en la inecuación verifican la desigualdad. Estos valores se llaman soluciones.

Para ello utilizaremos las propiedades de las desigualdades enunciadas anteriormente.

Ejemplos:

Para resolver la siguiente desigualdad:

$$5x + 6 < 3x + 4$$

Primero sumamos a ambos miembros (- 3 x) → $5x - 3x + 6 < 3x - 3x + 4$

$$2x + 6 < 4$$

Luego, sumamos a ambos miembros - 6 → $2x + 6 - 6 < 4 - 6$

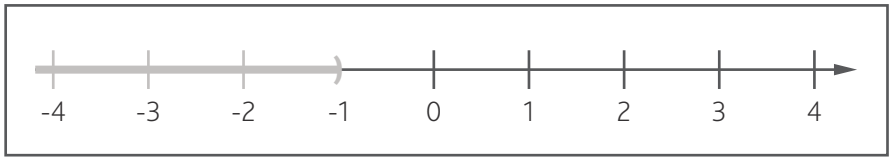
$$2x < -2$$

Por último multiplicamos a ambos miembros por $\frac{1}{2}$ → $\frac{1}{2}\, 2x < -2\,\frac{1}{2}$

Con lo que queda: → $x < -1$ → Es decir, el conjunto de números reales que son solución es:

$$(-\infty, -1) = \{ X \in \mathbb{R} : X < -1 \}$$

La representación gráfica de dicho conjunto es:



Si se tiene

$$2x - 6 < 6x + 5$$

Primero sumamos a ambos miembros (- 6 x) → $2x - 3 - 6x < 6x + 5 - 6x$

Es decir:

$$-4x - 3 < 5$$

Luego, sumamos a ambos miembros 3 → $-4x - 3 + 3 < 5 + 3$

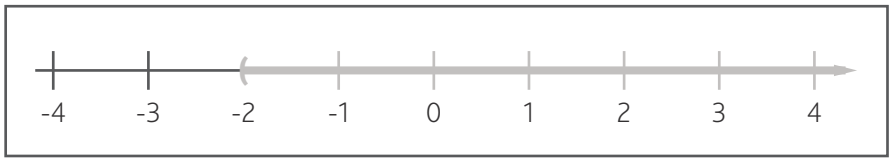
$$-4x < 8$$

Por último multiplicamos a ambos miembros por $-\frac{1}{4}$, como es un número negativo, → $(-\frac{1}{4})(-4x) > (-\frac{1}{4})\,8$

debemos invertir el signo de desigualdad, es decir:

$x > -2$ → Por lo tanto, el conjunto de números reales que son solución es:

$$(-2, \infty) = \{ X \in \mathbb{R} : -2 < x \}$$



Ejercitación

Ejercicio 93:
Representar en notación de intervalo los resultados de los ejercicios de inecuaciones y representarlo en la recta real.

Ejercicio 94:
Representar en la recta real los siguientes intervalos y expresarlos como una desigualdad.

a) (0 , 1) c) (3 , 6] e) (5 ,∞)

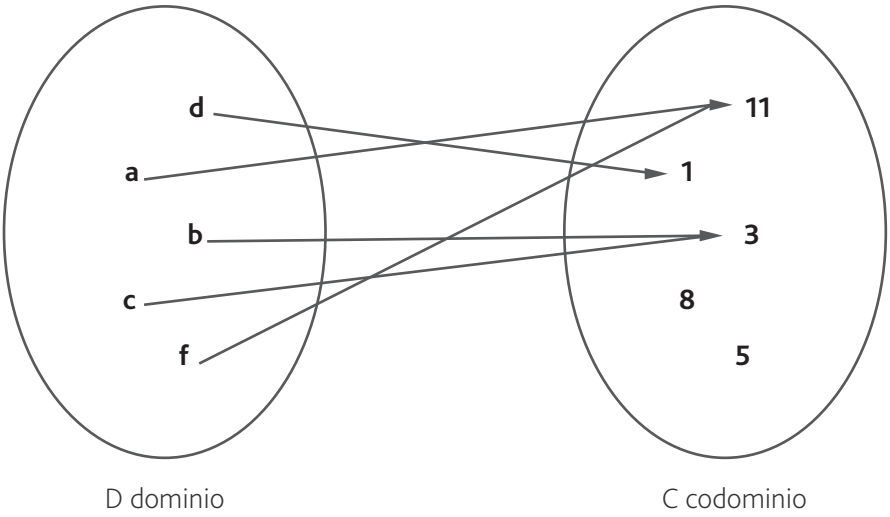
b) [- 1 , 2) d) [- 3 , - 1] f) (-∞, - 4]

Ejercicio 95:
Verificar las siguientes afirmaciones.

a) Si x E [1 , 5] entonces 3 x - 2 E [1 , 13]
b) Si x E (- 2 , 3) entonces 2 - 5 x E (- 13 , 12)
c) Si x E (- 2 , 2] entonces 3 - x E [- 13 , 12)
d) Si x E [1 , 5] entonces x^2 E [1 , 25]
e) Si x E [- 1 , - 5] entonces x^2 E [1 , 25]
f) Si x E (- 3 , 2] entonces x^2 E [0 , 9)

Función

Noción de función:
Recordemos que una función es una correspondencia entre los elementos de un conjunto de partida, llamado dominio, y los elementos de un conjunto de llegada, llamado codominio, de forma tal que a cada elemento del dominio le corresponde uno, y solo uno, en el codominio.



Es decir, una función involucra tres conceptos:

1. un conjunto D llamado dominio
2. un conjunto C llamado codominio
3. Una regla que asigna a cada elemento de D un elemento y sólo uno de C.

Función Lineal

Definición: una función lineal es una aplicación $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x)=a\,x+b$, donde a y b son números reales; es decir, es una función cuyo dominio y codominio son todos los números reales, y cuya expresión analítica es un polinomio de primer grado.

Por ejemplo las siguientes funciones

$f(x) = 5x + 3$, $g(x) = \frac{1}{2}x - 8$, $h(x) = 3$, $r(x) = -2x$

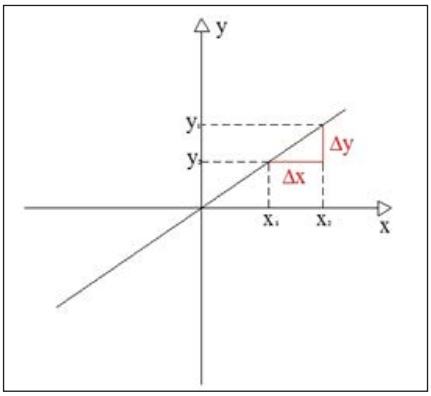
Son todas funciones lineales.

Nos preguntamos si $h(x)=3$ es una función lineal, si no está en su expresión la variable x.

Respuesta: vimos que la expresión analítica de una función lineal es y = a x + b, donde a; b son números reales, en particular podemos tomar a = 0 y b = 4 b=3; por lo tanto podemos asegurar que h(x) = 3 es una función lineal.

La gráfica de una función lineal y = a x + b se corresponde con una recta como se observa en la siguiente figura, donde a se llama pendiente y b se llama ordenada al origen.

¿Cuántos puntos necesitamos para determinar unívocamente una función lineal?
Respuesta: Se necesitan tan solo 2 puntos distintos del plano.



Gráfica de una función lineal.

Cálculo de la pendiente y la ordenada al origen de una recta a partir de 2 puntos:

Definición:
La pendiente a de una recta, que no es vertical, y que pasa por los puntos (x_1 ;y_1) y (x_2 ;y_2) es:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Una vez calculada la pendiente de la función lineal dada, podemos calcular la ordenada al origen b,

$$b = y_1 - \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right) x_1 = y_1 - a\, x_1$$

Por ejemplo:
Calcular la ecuación de la recta que pasa por los puntos (-1 ; 2) y (3 ; -4).

Para obtener la ecuación de la recta primero nombramos los puntos dados, por ejemplo podemos tomar (x_1 ;y_1)=(-1 ; 2) y (x_2 ;y_2) =(3 ; -4)

Así podemos calcular la pendiente y la ordenada al origen, y de esta forma obtener la ecuación de la recta pedida.

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-4 - 2}{3 - (-1)} = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2}$$

$$b = y_1 - a\, x_1 = 2 - \left(-\frac{3}{2}\right)(-1) = 2 - \frac{3}{2} = \frac{4 - 3}{2} = \frac{1}{2}$$

Por lo tanto la ecuación de la recta es:

$$y = a\, x + b = -\frac{3}{2}\, x + \frac{1}{2}$$

Rectas paralelas y perpendiculares

Rectas paralelas: dos rectas no verticales son paralelas si y sólo si tienen la misma pendiente. Es decir las rectas $y = a_1 x + b_1$ e $y = a_2 x + b_2$ son paralelas si y sólo si $a_1 = a_2$.

Rectas perpendiculares: dos rectas son perpendiculares $y = a_1 x + b_1$ e $y = a_2 x + b_2$, si y sólo si sus pendientes cumplen con la condición $a_1 a_2 = -1$, o equivalentemente $a_1 = \frac{-1}{a_2}$

Función cuadrática

Las funciones cuadráticas modelan gran parte de situaciones del mundo físico. El estudio de éstas resulta de interés no sólo en matemática sino también en algunas disciplinas como, por ejemplo, Física, Economía, Biología, Ingeniería, Arquitectura.

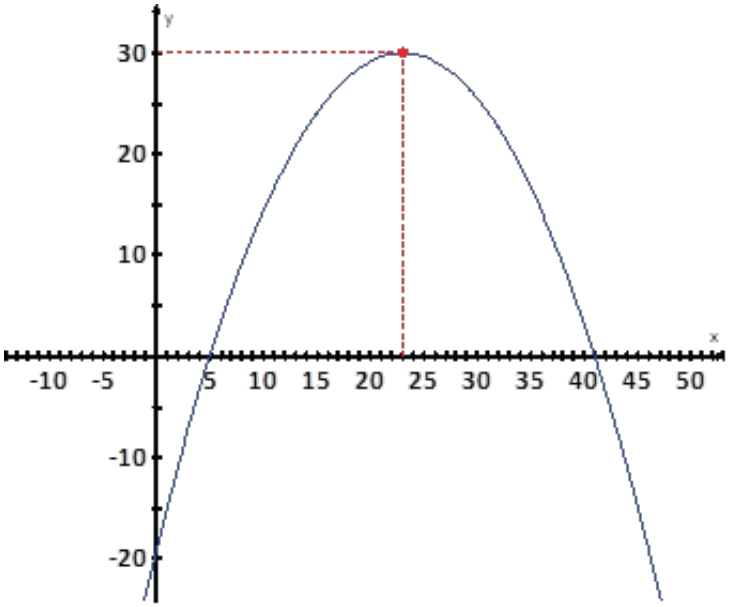
Son útiles para describir:

1) trayectoria de proyectiles,
2) ganancias y costos de empresas,
3) variación de la población de una determinadas especies,
4) efectos nutricionales de los organismos,
5) óptica, etc.

Abordamos este nuevo módulo con una situación para que analice y responda…

Recordemos que el beneficio es la diferencia entre el ingreso de dinero por ventas y el costo total de los productos.

Analice la siguiente representación que describe el beneficio semanal, de acuerdo con los miles de litros de vino que se vendieron después de lanzarse una campaña publicitaria de un nuevo producto en una pequeña ciudad turística.



a) Al observar la representación gráfica, sobre el eje de las ordenadas se han señalado valores de beneficio negativo como por ejemplo -5000, -15000. ¿Cuál es el significado de estos valores en esta situación? O bien, ¿qué relación se visualiza entre el costo de producción y el dinero que ingresa por las ventas?

b) ¿Para cuántos litros el beneficio es nulo?

c) ¿Para qué intervalo el ingreso por ventas fue mayor que el costo de producción? O bien, ¿para qué intervalo el beneficio fue positivo?

d) ¿Cuántos litros se comercializaron para obtener el beneficio máximo? ……. que correspondió a un importe de ……..

e) Escriba el intervalo para el cual el beneficio tuvo un incremento positivo.

f) Para el intervalo (23.000; 41.000) el beneficio es ……..

g) El beneficio vuelve a ser nulo cuando se han comercializado……

h) ¿La gráfica que describe la situación analizada es una curva o una recta?

Se llama función cuadrática a toda función, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = a x^2 + b x + c$, en la que a,b y c son números reales, con $a \neq 0$.

También podemos asociar esta función con un polinomio de segundo grado completo o incompleto, de la forma $y = f(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$.

Destacamos el significado de cada uno de los parámetros de esta función, siendo:

$f(x) = ax^2 + bx + c$

- a es coeficiente del término cuadrático, y dependiendo de su signo las ramas de la curva se abren hacia arriba o abajo
- b, es el coeficiente del término lineal y dependiendo de su signo, será el corrimiento horizontal de la parábola.
- c, es el término in-dependiente que coincide la ordenada al origen y señala la ordenada del punto donde f corta al eje de las ordenadas y.

Gráfica de la función cuadrática

En la gráfica es importante reconocer elementos, que son de gran utilidad para la representación de la función, como los puntos de intersección con los ejes coordenados, el vértice y el eje de simetría.

Eje de simetría

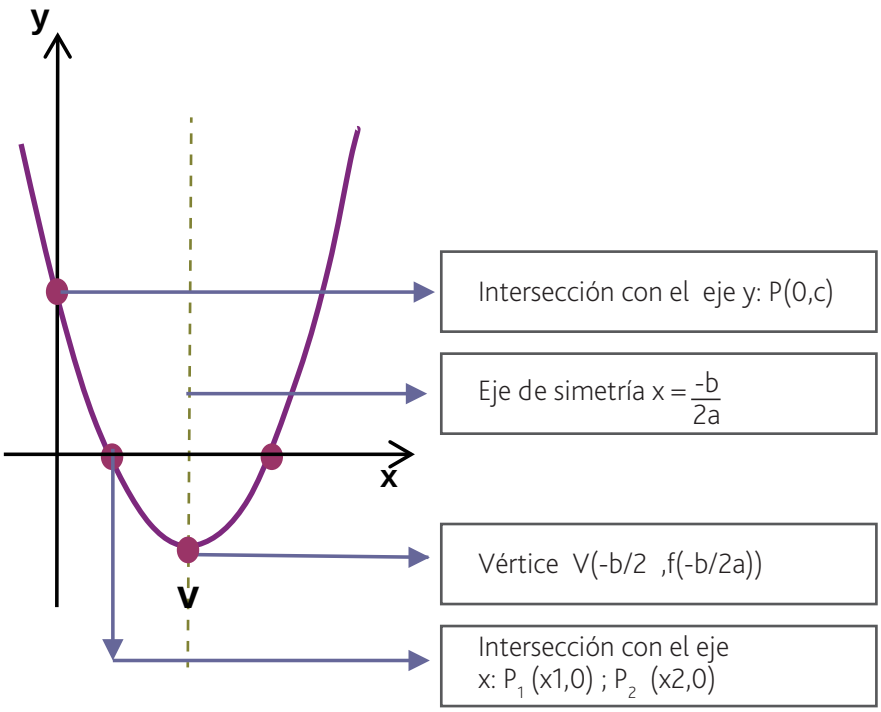
Toda función cuadrática tiene un eje de simetría. Este eje es paralelo al eje y o coincidente con el mismo. La ecuación de la recta que incluye al eje de simetría es:

$$x = \frac{-b}{2a}$$

Vértice

Es el único punto de la función que es simétrico consigo mismo con respecto al eje de simetría. Las coordenadas del vértice son:

$$\left(\frac{-b}{2a} ; f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$$



Puntos de intersección con los ejes

Eje de las ordenadas (Ordenada al origen c)

Este punto tiene por ordenada al término independiente c y abscisa nula, por lo cual P(0,c).

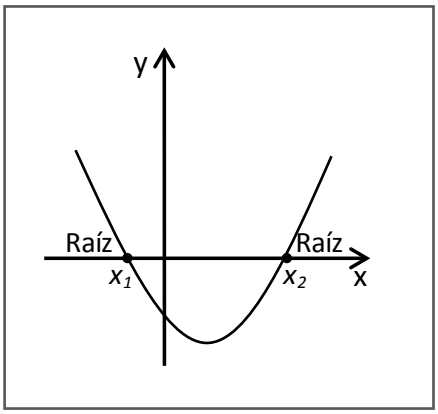
Eje de las abscisas (raíces reales x_1 y x_2)

Para calcular las coordenadas del o los puntos de intersección de la curva con el eje x, se anula la expresión de la función obteniéndose una ecuación cuadrática:

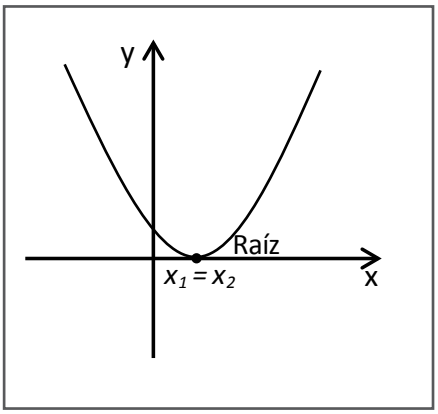
$ax^2 + bx + c = 0$

Las soluciones de esta ecuación cuadrática se pueden obtener reemplazando los coeficientes a, b, c en la siguiente expresión denominada "resolvente":

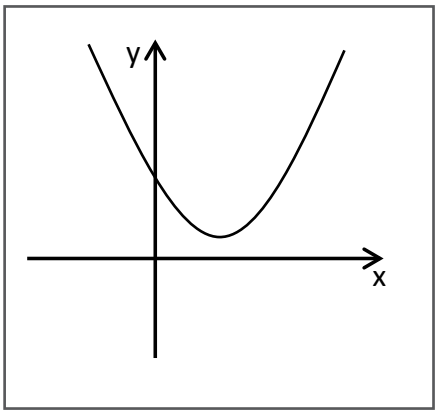
Recuerde que el carácter de las raíces está relación con el signo del discriminante $\triangle$



Raíces reales distintas



Raíces reales coincidentes

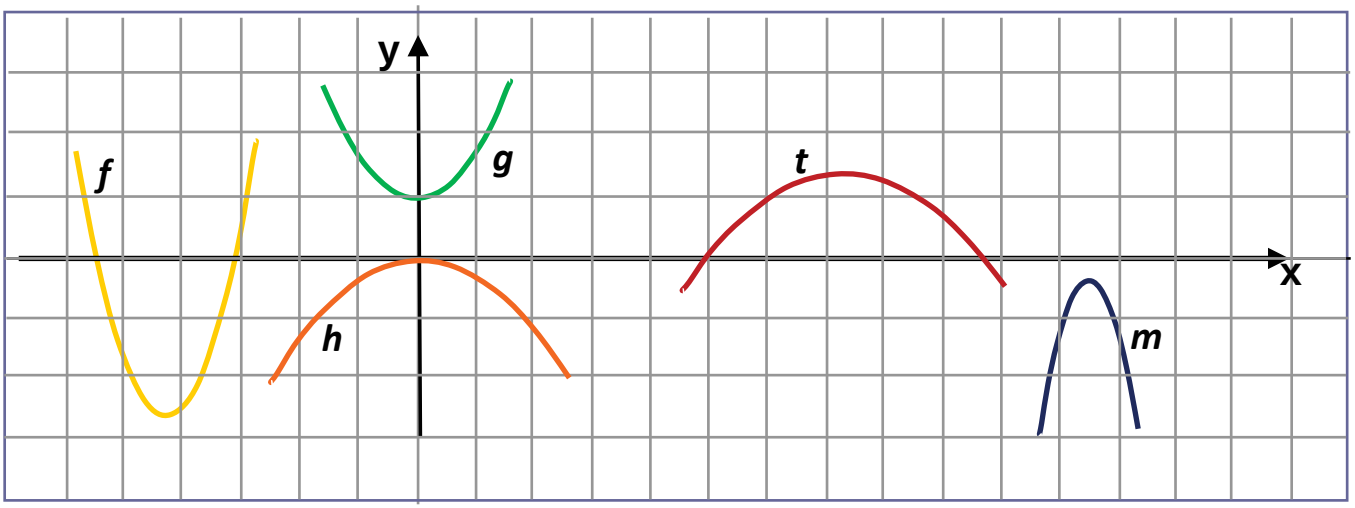


Ninguna raíz real

Ejercicios:

Ejercicio 96:
Si un polinomio es de la forma ¿Cuál es el valor de k si sabemos que la función asociada a P tiene dos raíces iguales?

Ejercicio 97:
Observe cada una de las gráficas de funciones cuadráticas definidas sobre los reales, complete indicando el signo de a, c, y el tipo de raíces.



a) y = f(x) presenta:……..
b) y = g(x) presenta:……
c) y = h(x) presenta:……
d) y = t(x) presenta:……..
e) y = m(x) presenta:……....

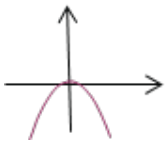
Ejercicio 98:
Dada la función f : [- 5, - 1) ⊆ ℝ / f (x) = - $2x^2$ + 2

a) El conjunto imagen es:……
b) Indique, si existen, en qué puntos corta al eje de las ordenadas y al eje de las abscisas.
c) Defina, si existen, los intervalos de crecimiento positivo.
d) Defina, si existen, los intervalos de decrecimiento negativo.

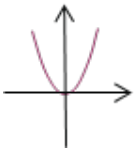
Características de la función cuadrática

Las características de la función cuadrática, están relacionadas con los coeficientes a, b y c. Co-mencemos estudiando a:

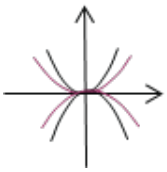
• Si a<0, las ramas de la parábola abren hacia abajo.



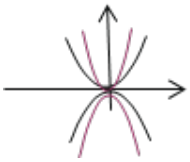
• Si a>0, las ramas de la parábola abren hacia arriba.



• Si $0 < |a| < 1$, la parábola se ensancha con respecto a la parábola en la que $|a| = 1$

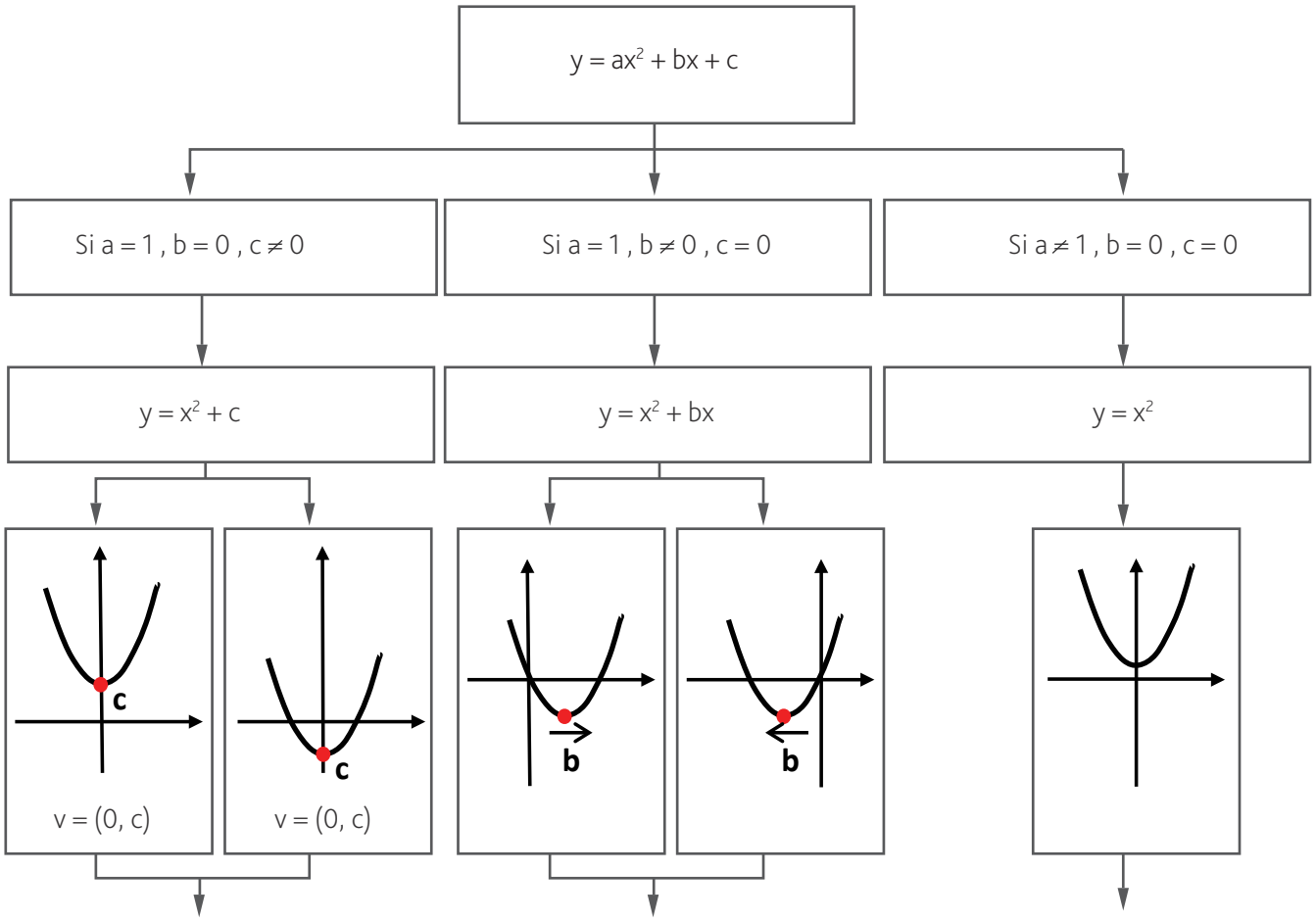


• Si $|a| > 1$, la parábola se angosta con res-pecto a la parábola a la parábola en la que $|a| = 1$



Observamos entonces que de acuerdo al signo del coeficiente del término cuadrático, y conociendo las coordenadas del vértice es posible definir el conjunto imagen de la función.

¿Qué pasa con b y c?



La gráfica se desplaza verticalmente:
- hacia arriba, si $c > 0$
- hacia abajo si $c < 0$

El eje de simetría coinci-de con el eje y

La gráfica se desplaza horizontalmente:
-hacia la derecha si $b < 0$
-hacia la izquierda si $b > 0$

El eje de simetría es paralelo al eje y

El vértice coincide con el origen de coordenadas.

El eje de simetría coincide con el eje y

Si $c > 0$

Si $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
$I_f = [\, c, +\infty)$
No tiene raíces reales.

Si $c < 0$

Si $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
$I_f = (-\infty, c\,]$
Presenta raíces realis distintas

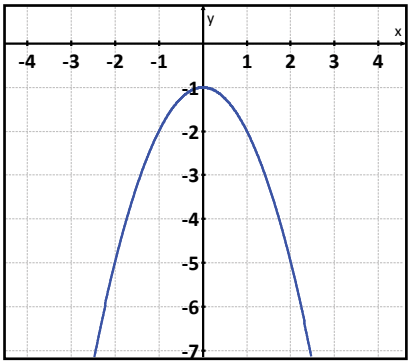
Si $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
$I_f = [\, y_v, +\infty\,)$
Presenta dos raíces reales distintas de las cuales una es $x = 0$

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
$I_f = [\, 0, +\infty\,)$
Presenta una raíz real, $x = 0$

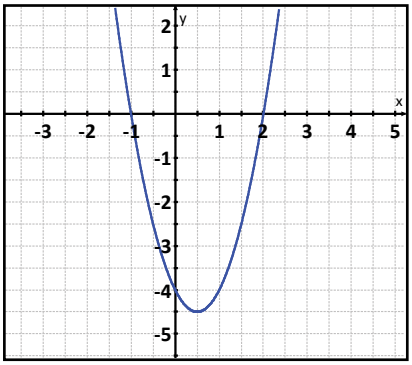
Teniendo presente las características mencionadas es posible dibujar la parábola, conocido el vértice, la ecuación del eje de simetría y las raíces si existen y son reales distintas. En caso contrario, conocido un punto que no sea el vértice, por simetría con respecto al eje, puedes calcular o dibujar su simétrico.

Ejercitación:

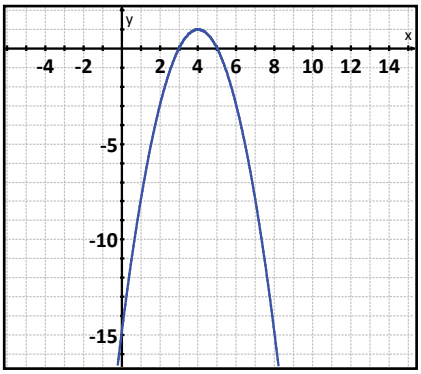
Ejercicio 99:
Dadas las siguientes graficas:



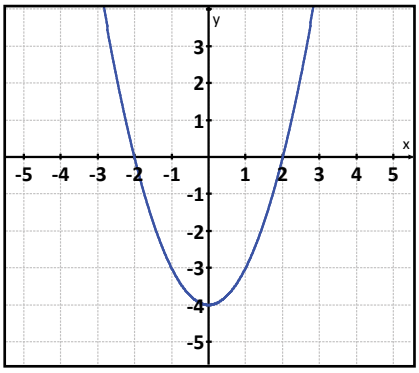
$y = -x^2 - 1$



$y = 2x^2 - 2x - 4$



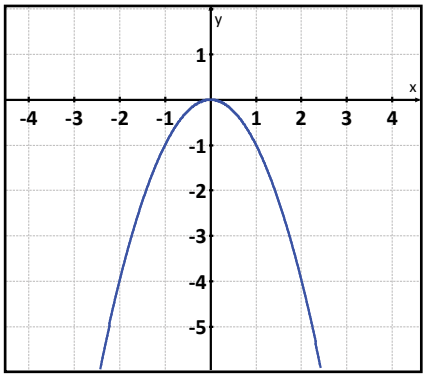
$y = -x^2 + 8x - 15$



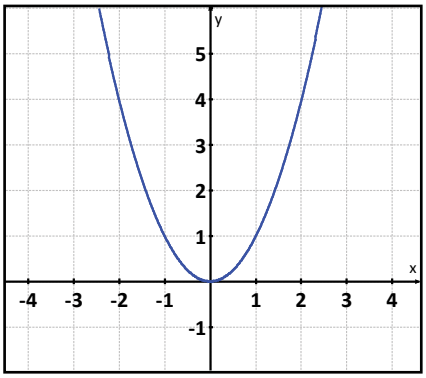
$y = x^2 - 4$

a) Escriba las coordenadas de los vértices de cada una de ellas.
b) Para cada función, escriba la ecuación del eje de simetría
c) Identifique y señale las coordenadas de los puntos de intersección con los ejes para cada gráfica, si existen.
d) Defina el conjunto imagen para cada una de las funciones dadas.

Ejercicio 100:
Observe las siguientes funciones y compare:



$y = -x^2$

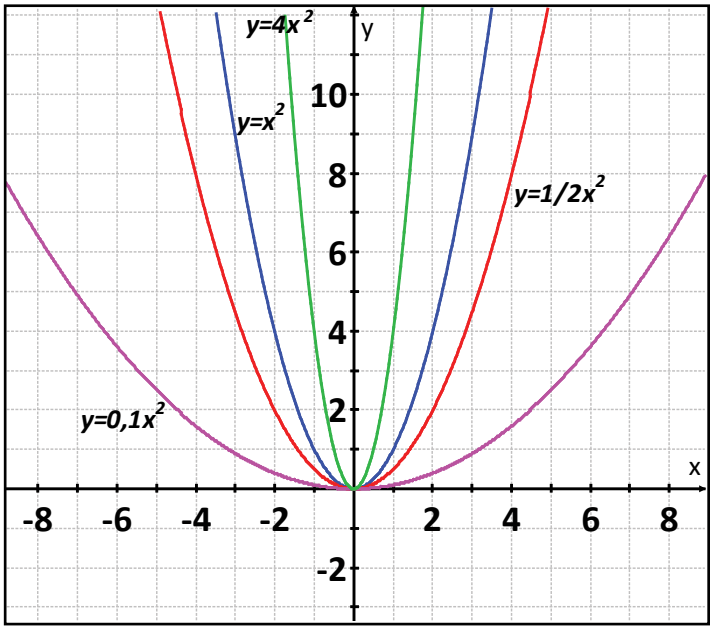


$y = x^2$

a) Si a>0, las ramas de la parábola abren hacia……...y el conjunto imagen es: ……..

b) Si a<0, las ramas de la parábola abren hacia……y el conjunto imagen es: ……..

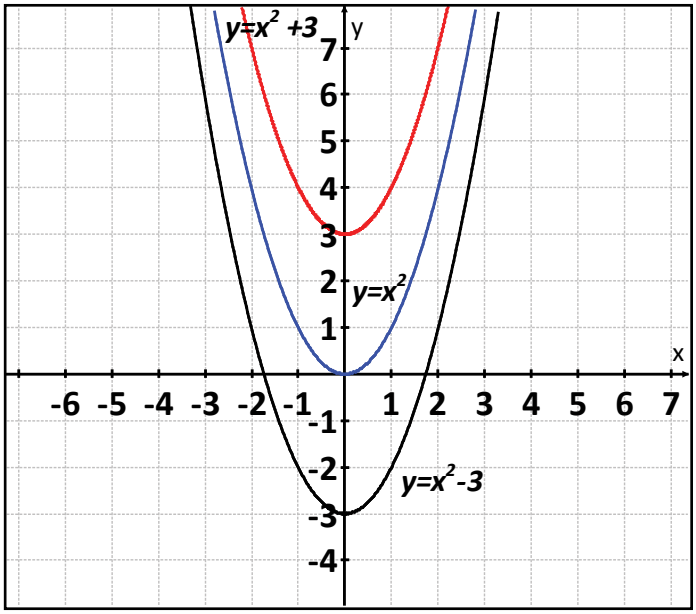
Ejercicio 101:
Observe las gráficas de las siguientes funciones para compararlas.



a) Para cada una de las gráficas, los coeficientes del término lineal e independiente en todos los casos son……

b) Si 0<a<1, las ramas de la parábola se abren con respecto a las de y =……., pero si a>1 las ramas se cierran con respecto a y=……

Ejercicio 102:
Compara las gráficas y completa.



a) Para las tres funciones es el coeficiente del término lineal, b=……

b) Para las tres gráficas, el eje de simetría coincide con……..

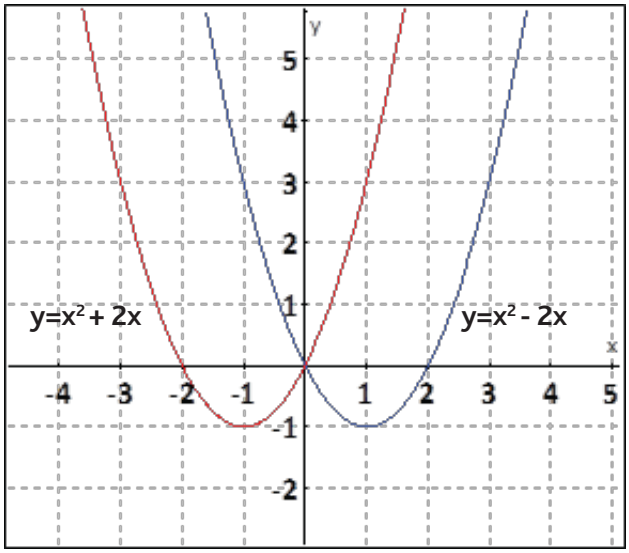
c) Si c=0, el vértice de la parábola tiene por coordenadas V(…….)

d) Para c<0, el vértice de la parábola es V(…….) y la gráfica se ha desplazado hacia …….....…. siendo el conjunto imagen de la función: …….

e) Considerando c>0, la gráfica se ha desplazado hacia ……. y las coordena-das del vértice son V(……).

f) Si c<0, la gráfica de la función se traslada verticalmente hacia ……... y con c>0 se traslada hacia…….…. y para c=0 la función ……

Ejercicio 103:
Comparar las gráficas para responder.



a) Para las dos funciones dadas a = …….. y c = …….

b) Si b<0, el eje de simetría esta a la ……, del eje de las ordenadas y si b >0 está a la ……..

c) La ecuación para calcular los ceros de la función presenta un discriminante △.....0

d) El conjunto imagen para las dos funciones es:……

Formas de expresar la función cuadrática

Hasta ahora sólo hemos trabajado con la expresión general o polinómica de la función cuadrática, a continuación te presentamos un cuadro con todas las formas de expresar la función cuadrática.

Forma	Expresión	Parámetros
Polinómica o general	$f(x) = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$	a, b, c (c ordenada al origen)
Canónica	$f(x) = a(x - x_v)^2 + y_v,\ a \neq 0$	$a,\ x_v,\ y_v$ ($v(x_v, x_y)$ vértice)
Factorizada	$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2),\ a \neq 0$	$a,\ x_1,\ x_2$ (x_1, x_2 raíces)

Expresión canónica de la función cuadrática

La expresión canónica, nos permite visualizar directamente las coordenadas del vértice y la ecuación del eje de simetría.

Su expresión es: $f(x) = a \cdot (x - x_v)^2 + y_v$

Siendo el vértice: $v(x_v, y_v)$ y la ecuación del eje de simetría $x = x_v$

Si a =1, la expresión es: $f(x) = (x - x_v)^2 + y_v$

Mediante un ejemplo analizamos la construcción de la expresión canónica a partir de la expresión polinómica de la función cuadrática.

Sea la función $f(x) = 3x^2 - 5x - 1$

Si analizamos la expresión canónica, observamos que consta de dos términos:

• El primero, es un producto cuyo primer factor es el coeficiente del término cuadrático y el segundo el cuadrados de un binomio.

• El segundo, es un número real.

Comenzamos con el procedimiento:

1) Sacamos factor común 3 (el coeficiente del término cuadrático).

$$f(x) = 3 \cdot \left(x^2 - \frac{5}{3}x - \frac{1}{3} \right)$$

2) Multiplicamos y dividimos por 2 el término lineal.

$f(x) = 3 \,.\, (x^2 - \frac{2}{2} . \frac{5}{3} x - \frac{1}{3})$

3) Aplicamos la propiedad asociativa del producto.

$f(x) = 3 \,.\, (x^2 - 2 . \frac{5}{3} x - \frac{1}{3})$

4) Sumamos y restamos $(\frac{5}{6})^2$

$f(x) = 3 \,.\, (x^2 - 2 . \frac{5}{6} x + (\frac{5}{6})^2 - (\frac{5}{6})^2 - \frac{1}{3})$

5) Utilizamos la igualdad $(x - a)^2 = x^2 - 2a + a^2$

$f(x) = 3 \,.\, [(x - \frac{5}{6})^2 - \frac{37}{36}]$

6) Distribuimos el producto con respecto a la suma

$f(x) = 3 \,.\, (x - \frac{5}{6})^2 - 3 . \frac{37}{36}$

7) Obtenemos así la forma canónica

$f(x) = 3 \,.\, (x - \frac{5}{6})^2 - \frac{37}{12}$

Siendo las coordenadas del vértice: $v = (\frac{5}{6} , \frac{37}{12})$

y la ecuación del eje de simetría: $x = \frac{5}{6}$

Expresión factorizada de la función cuadrática

Sean x_1 y x_2 las raíces reales de una función cuadrática, y a el coeficiente del término cuadrático, la expresión factorizada de la función cuadrática tiene por expresión:

$f (x) = a \,.\, (x - x_1) \,.\, (x - x_2)$

Ejemplo:

Si $f (x) = 2 x^2 - 4x - 6$, el coeficiente principal es $a = 2$, y sus raíces reales son $x_1 = 3$ y $x_2 = - 1$, entonces la expresión factorizada es:

$f (x) = 2 \,.\, (x - 3) \,.\, (x + 1)$

Ejercitación:

Ejercicio 104:
Encuentre una función cuadrática que tenga como ceros y cuya gráfica pase por el punto (0,10).

Ejercicio 105:
Dadas las funciones cuadráticas:

$f(x) = x^2 + 4x$

$f(x) = -\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{6}x + 2$

$f(x) = x^2 - 9x + 9$

a) Escriba la función en la expresión canónica
b) Halle la intersección con los ejes coordenados
c) Grafique la parábola

Ejercicio 106:
Para cada una de las siguientes funciones cuadráticas de ∇ en ∇:

a) $f(x) = x^2 + 2$

b) $f(x) = x^2 + 6x + 9$

c) $f(x) = x^2 - 4x$

d) $f(x) = 4 - x^2$

e) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - 4$

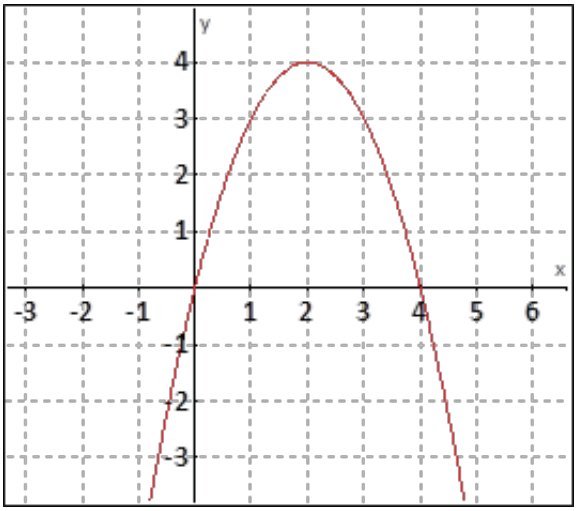
f) $f(x) = -x^2 + 2x - 2$

g) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 2$

h) $f(x) = x^2 - 2x - 3$

a) Calcule sus ceros o raíces.
b) Indique intersección con el eje "y".
c) Halle las coordenadas del vértice y la ecuación del eje de simetría.
d) Represéntelas gráficamente.
e) Halle la forma canónica, y cuando sea posible, la forma factorizada.
f) Indique los intervalos de positividad y negatividad.

Ejercicio 107:
A partir de la observación de la gráfica, complete con V las correctas y justifique las falsas.



Se deduce de la definición las siguientes propiedades que se cumplen cualesquiera sean a, b números reales y m, n números naturales:

a) La expresión de la función asociada a la gráfica es: $f(x) = x^2 - 4x$
b) La ecuación del eje de simetría es: $x = 2$
c) Las coordenadas del vértice son: v (4, 2)
d) La función es positiva en (0, 2)
e) $f(1) = 3$
f) $f(0) = 4$
g) Su forma canónica es: $f(x) = -(x - 2)^2 + 4$
h) Su forma factorizada es: $f(x) = -x \cdot (x + 4)$

Problemas aplicados a función cuadrática

Ejemplo:

Si se lanza una pelota hacia arriba con una velocidad de 40 pies/s, su altura (en pies) después de t segundos está dada por $h(t) = 40t - 16t^2$

a) ¿Cuál es la altura máxima alcanzada por la pelota?
b) ¿Cuándo alcanza la altura máxima?
c) ¿Cuánto tarda la pelota en llegar al piso?
d) ¿Cuánto tarda en alcanzar una altura de 20 pies?

Solución:

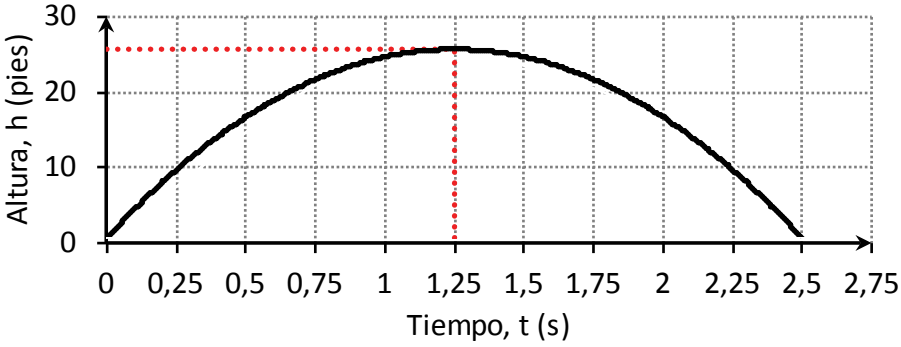
Para poder contestar estas preguntas, es conveniente primeramente graficar la función h (t), y para ello, nos es necesario determinar los elementos de dicha función.

$h(t) = 40t - 16t^2$

• **Coeficiente del término cuadrático:** -16 (las ramas de la parábola van hacia abajo).
• **Ceros o raíces:** $-16t^2 + 40t = 0$ que resolviendo dan: $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{5}{2}$
• **Coordenadas del vértice:** $V(x_v ; y_v)$

$$x_v = \frac{-b}{2.a} = \frac{-40}{2.(-16)} = \frac{5}{4}, \; y_v = -16 . (\frac{5}{4})^2 + 40 . \frac{5}{4} = 25 \;\Rightarrow\; v(\frac{5}{4}, 25)$$

• **Ordenada al origen:** $h(0) = 40 . 0 - 16 . 0^2 = 0$



El gráfico describe la altura de la pelota en función del tiempo. Podemos observar que la pelota alcanza su altura máxima, y_v, (25 pies) a los 1,25 s (x_v); y cae al piso a los 2,5 s (cero o raíz).

También podemos calcular el tiempo necesario para alcanzar una altura determinada, planteando una ecuación cuadrática:

$h(t) = -16 t^2 + 40 t$

$20 = -16 t^2 + 40 t \;\Rightarrow\; 0 = -16 t^2 + 40 t - 20$

$$x_{1,2} = \frac{-40 \pm \sqrt{40^2 - 4.(-16).(-20)}}{2.(-16)} = \frac{-40 \pm \sqrt{320}}{-32} \;\Rightarrow\; x_1 \cong 0{,}69 \,,\; x_2 \cong 1{,}8$$

Entonces, las respuestas al problema son:

a) La altura máxima alcanzada por la pelota es de 25 pies.

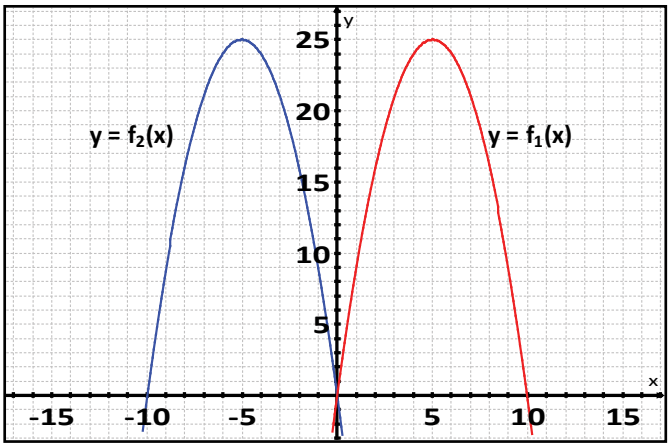
b) Alcanza la altura máxima a los 1,25 segundos.

c) La pelota tarda en llegar al piso 2,5 segundos.

d) La pelota tarda en alcanzar 20 pies de altura, 0,69 y 1,8 segundos aproximadamente.

Ejercitación:

Ejercicio 108:
El portón de un parque privado, tiene forma parabólica dada por la función:
$f(x) = -x^2 + 10x$



a) Indique cuál de las gráficas es la que corresponde a la función dada
b) Df = ……..
c) If =……..
d) Para qué valor de x alcanza su máxima altura……..
e) La función es creciente en……..
f) f (x)> 0 en el /los intervalos……
g) f (x) = 24 para ……
h) La altura del portón es de……

Ejercicio 109:
Se lanza hacia arriba una pelota con una velocidad inicial de 96 m/seg. La altura a la que se encuentra la pelota (medida en metros) desde el suelo, en función del tiempo (medido en segundos), viene dada por la fórmula:

$e(t) = -5t^2 + 96t$, para $t \geq 0$

Represente dicha función gráficamente y luego conteste las siguientes preguntas:

a) ¿Por qué debe ser $t \geq 0$?
b) ¿Cuánto tiempo tarda la pelota en llegar al suelo?
c) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza?
d) ¿A cuántos segundos alcanza una altura de 230,4 metros?
e) ¿En qué intervalo de tiempo la pelota sube? ¿En cuál baja?

Ejercicio 110:
En una isla se introdujeron 100 venados. Al principio la manada comenzó a crecer rápidamente, pero después de un tiempo los recursos de la isla empezaron a escasear y la población decreció. Supongamos que el número de venados N (t), a los t años está dado por:

$N(t) = -t^2 + 21t + 100$

a) ¿Colocaría alguna restricción para t? ¿Por qué?
b) ¿A partir de qué momento la manada comienza a decrecer?
c) ¿Se extinguirá la población? Si es así, ¿cuándo ocurrirá?
d) ¿Para qué intervalos de tiempo es $N(t) < 0$? ¿Tiene sentido? ¿Por qué? ¿Qué significaría?

Ejercicio 111:
Los registros de temperatura tomados entre las 0:00 hs y las 24:00 hs en una zona rural, se ajustan a la función:

$f(x) = -0{,}2\,x^2 + 4{,}8\,x - 12{,}6$

donde f es la temperatura en grados centígrados y x es la hora del día.
a) ¿Cuál fue la temperatura máxima?
b) ¿A qué hora se registró?
c) ¿Cuándo fue de cero grado la temperatura?

Ejercicio 112:
Una carpintería fabrica silla vienesas a un costo de $10 cada una. Los precios de venta muestran que si las mesas se venden a $ x por unidad, se venderán por mes aproximadamente 50 - x.

a) La función que expresa el beneficio mensual es ……
b) Escriba cuál será el precio de venta que da el mayor beneficio.
c) ¿Cuál ha sido el precio de venta si se ha obtenido un beneficio mensual de $200?
d) Indique el precio de venta para el cual el beneficio ha sido nulo.
e) Si el beneficio ha sido de $200, ¿cuál ha sido el precio de venta?

Ejercicio 113:
Un depósito contiene 50 litros de agua, que drenan desde un orificio en el fondo, lo cual causa que el depósito se vacíe en 20 minutos. El depósito drena más rápido cuando está casi lleno porque la presión en el orificio es mayor. El volumen de agua que permanece en el depósito después de minutos está dada por la función:

$v(t) = 50 \cdot \left(1 - \frac{t}{20}\right)^2, \quad 0 \leq t \leq 20$

a) Determine v (0) y v (20)
b) ¿Qué representan las respuestas anteriores?
c) Grafique

Ejercicio 114:
Desde una terraza que se encuentra a 20 m de altura una mujer lanza una pelota hacia arriba con una velocidad inicial de 30 m/s. La altura de la pelota en cada instante está dad por la función:

$f(t) = -5t^2 + 30t + 20$

a) Grafique la función
b) ¿En qué instante la pelota alcanza su altura máxima? ¿cuál es esa altura?

Ejercicio 115:
¿Cuáles son las dimensiones de un terreno rectangular, cuya superficie es de 4800 m2 sabiendo que el largo es el triple del ancho?

a) Realice un esquema interpretativo.
b) Determine el área del terreno en función del ancho "a".
c) Calcule las dimensiones

Ejercicio 116:
Una ventana tiene la forma de un rectángulo con una semicircunferencia en la parte superior, cuyo diámetro mide lo mismo que la base del rectángulo. La altura del rectángulo es el doble de la base.

a) Realice un esquema interpretativo.
b) Exprese el área de la ventana en función de la base e identifica el término cuadrático, el término lineal y el término independiente.
c) Calcule el área si la base mide 60 cm

Ejercicio 117:
Se quieren calcular las dimensiones mínimas de una chapa rectangular con la que se va a construir un tarro cilíndrico con base pero sin tapa, de un litro de capacidad, cuya altura mide lo mismo que el diámetro de la base.

a) Realice un esquema interpretativo.
b) Exprese el área del tarro en función de una sola variable, diámetro de la base o altura.
c) Calcule las dimensiones del tarro
d) Calcule las dimensiones mínimas de la chapa para construirlo

Ejercicio 118:
Se va a construir una caja abierta, recortando un cuadrado de 4 dm de lado de cada una de las esquinas de una lámina cuadrada de hojalata. Si el volumen de la caja debe ser de 900 dm3, ¿cuál deberá ser el tamaño de la lámina?

Ejercicio 119:
Una estación de servicio describe el beneficio semanal, de acuerdo con los litros de nafta sin plomo que vendió, según la siguiente fórmula:

$b(x) = -x^2 + 46x - 205$

El beneficio B se expresa en pesos y la variable x en miles de litros.

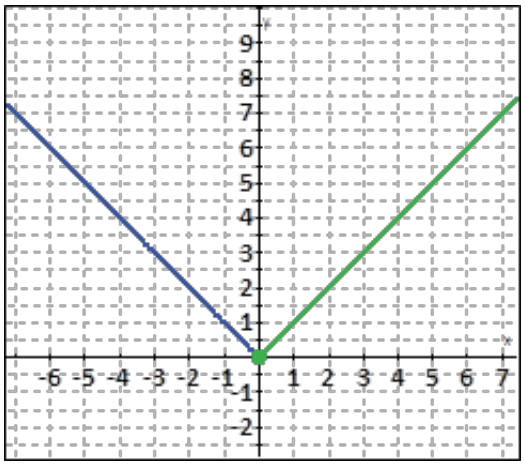
a) Grafique la función, calculando ceros, ordenada al origen y vértice.
b) ¿Cuánto dinero pierde si no vende ningún litro de nafta?
c) ¿Cuántos litros se deben vender para que el beneficio sea máximo?
d) ¿Cuál es el beneficio máximo?
e) ¿Para qué cantidad de litros no hay ni pérdida ni ganancia?
f) ¿Para qué cantidad de litros el beneficio se incrementa?
g) ¿Para qué cantidad de litros el beneficio disminuye?
h) ¿Cuántos litros tiene que vender para ganar 315 pesos?
i) ¿Cuántos litros de nafta recomendarías que se vendan como máximo? ¿por qué?

Función valor absoluto

Su definición es: $|.|\ \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$|x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x \leq 0 \end{cases}$$

Si el número es positivo ó 0, su imagen es igual a sí mismo, si el número negativo la imagen es su opuesto.



Podemos observar que:

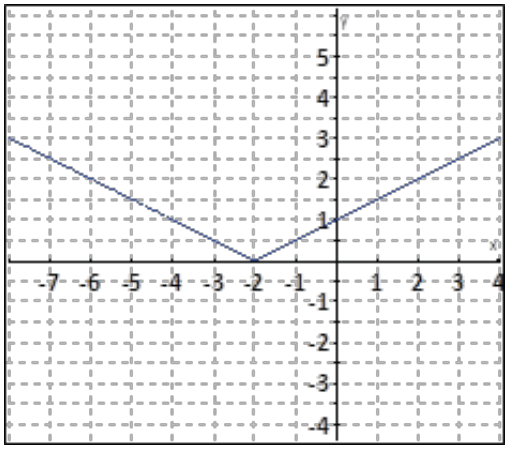
$D_f = R$
$f = [\,0, \infty)$
La función se anula en x=0

$f > 0$ en $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
$f(x) < 0$ en ningún x del dominio
f es creciente en $(0, \infty)$
f es decreciente en $(-\infty, 0)$

Ejercitación:

Ejercicio 120:
A partir de la observación de la siguiente representación gráfica completa lo que se pide.

a) La expresión de la función representada es:
b) La función corta al eje de las ordenadas en el punto (,)
c) La función presenta un cero en:……
d) La función es decreciente en:……
e) La función es decreciente en:……
f) f(- 4) = ……



Expresiones algebraicas

Un poco de historia…

El Álgebra es una invención de los árabes que introdujeron en la península Ibérica en el siglo XII. En el Siglo XIII en Toledo el príncipe Alfonso X "El Sabio" creó la Escuela de Traductores donde las ciencias griega y árabe se esparcieron por toda Europa. El principal tratado de Álgebra del siglo XIII se debe a un italiano, Fibonacci (a quien mencionamos en el módulo de numeración ya que, entre otras cosas, introdujo la barra horizontal para anotar los números racionales), influido por la cultura árabe.

En el Renacimiento, siglo XVI, se destacaron como algebristas, Cardano (italiano) y Vietta (francés). Este último fue el que representó números arbitrarios por letras en las ecuaciones y fórmulas algebraicas.

En el siglo XVII, el progreso del álgebra sirvió a Descartes para combinarla con la geometría creando una herramienta matemática poderosa: la Geometría Analítica con la que se pudo resolver algunos problemas geométricos planteados por los griegos en el siglo III a.C[1].

Le presentamos la siguiente situación:

Un famoso Mentalista me dijo:
- Piensa un número.
- Añádele 15.
- Multiplica por 3 el resultado.
- A lo que salga réstale 9.
- Divide entre 3 lo que te haya quedado y luego réstale 8.
- ¿Qué resultado obtienes?

Yo le dije:
- 51

Y el Mentalista me dijo instantáneamente
- El número que pensaste es el 47.

No sé bien por qué, pero sospecho que es un trucho.

Transcribiendo uno a uno los pasos pedidos por el Mentalista, tenemos:

piensa en un número: x
Añádele 15 : $x + 15$
Multiplica por 3 el resutado: $(x + 15) . 3 = 3x + 45$
A lo que salga réstale 9: $3x + 45 - 9 = 3x + 36$
Divide entre 3 lo que te haya quedado: $(3x + 36) : 3 = x + 12$
Luego réstale 8: $x + 12 - 8 = x + 4$

Evidentemente no adivinó gran cosa!!!

[1] Historia de la Matemática de J. Rey Pastor y J. Babini

El lenguaje algebraico

Sabemos que la Aritmética se ocupa de los conjuntos numéricos, las operaciones y sus propiedades. Pero por ejemplo, al enunciar las propiedades de las operaciones, interpretar y resolver problemas, escribir y/o obtener relaciones es conveniente utilizar símbolos específicos de la Matemática y letras que representan cualquier número. Para estas ocasiones se utiliza un leguaje simbólico, llamado lenguaje algebraico.

Expresiones algebraicas

Con frecuencia habrá observado en los libros de estudio expresiones como:

$a)\ 2xy$	$b)\ 5\ a^3\ b\ x$	$c)\ 3\ a\ b^2\ x - 10\ a\ b + 5$	
$d)\ x - \sqrt{3}$	$e)\ \dfrac{3x+2}{x+y}$	$f)\ 5 + \sqrt[3]{x}$	$g)\ 4\ x^2 + 3x$

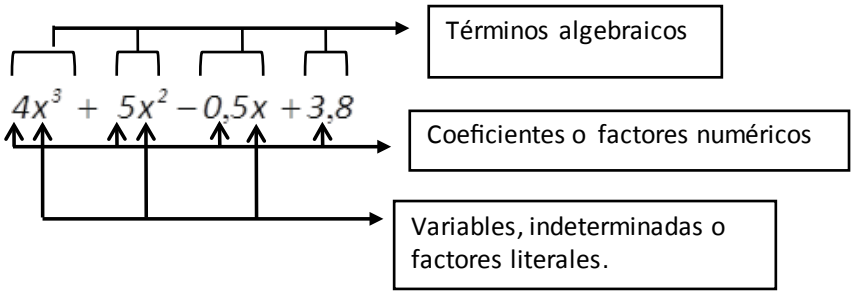
O transcripto del lenguaje coloquial al simbólico una situación como la siguiente:
si compramos dos cajas de CD y un mouse, siendo **x** el precio de cada caja e **y** el precio del mouse, el costo total de la compra se puede expresar como: ……..... Seguramente coincidimos en que la expresión que nos da el costo es: 2 x + y.

¿Cómo se llaman este tipo de expresiones?

Se denomina **expresión algebraica** a una combinación cualquiera de números representados por letras, o por letras y cifras, relacionadas entre sí por las operaciones de suma, resta, multiplicación, división, radicación y la potenciación.

Antes de seguir avanzando, te proponemos que observes el siguiente esquema en el que se han señalado algunos conceptos que serán útiles para clasificar las expresiones algebraicas.

$4\ x^3 + 5\ x^2 - 0{,}5\ x + 3{,}8$



Clasificación de las expresiones algebraicas

Si presta atención a las expresiones que vimos antes:

$a) 2xy$

$b) 5\,a^3\,bx$

$c) 3\,ab^2\,x - 10ab + 5$

$d) x - \sqrt{3}$

$e) \dfrac{3x+2}{x+y}$

$f) 5 + \sqrt[3]{x}$

$g) 4\,x^2 + 3x$

Liste cuáles son las operaciones que relacionan a las indeterminadas o variables en cada uno de los ítems.

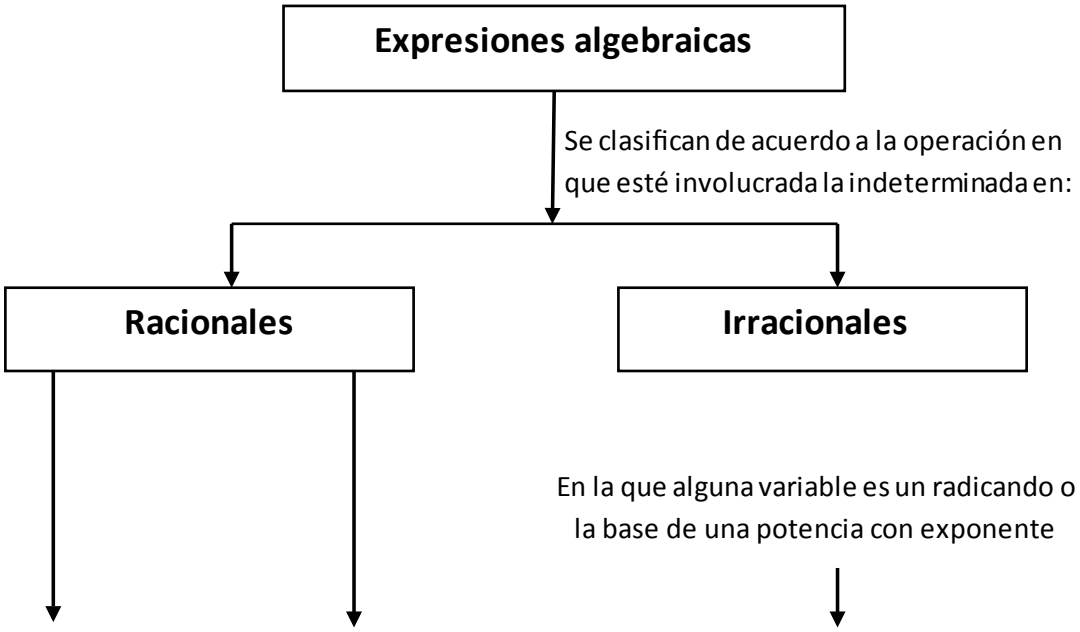
.....

.....

.....

Clasificación de expresiones algebraicas

A partir de estas diferencias, las expresiones algebraicas se clasifican como se visualiza en el siguiente cuadro:



Enteras

Las variables son términos o factores con exponente

Por ejemplo:

- $\sqrt{5} + x^2 a - x^5$
- $4x^5 + 3$
- $5\,a^3\,b\,x$
- $3\,a\,b^2\,x - 0.5\,a\,b$

Fraccionarias

En la que alguna variable es divisor o un término con exponente entero

Por ejemplo:

- $\dfrac{3\,x + 2}{x + y}$
- $\dfrac{4}{x+2}$

Por ejemplo:

- $5 - \sqrt{x}$
- $\sqrt{2x+1}$
- $2x^{\frac{1}{2}} - 4$

Expresiones algebraicas enteras

Monomios

Recordaremos en este apartado algunos conceptos importantes como apoyo para encarar polinomios. Para ello nos centraremos en reconocer los monomios, determinar su grado, identificar monomios semejantes y las operaciones con los mismos.

Comenzamos definiendo:

> Una expresión algebraica de sólo un término, cuyas indeterminadas son potencias de exponente natural o cero, recibe el nombre de monomio.

Ejemplos:

a) $-2ab^2c^2$ b) $-5xz^3$ c) $7x^2z$ d) -8

Cada una de ellas está compuesta por un coeficiente, o factor numérico, e indeterminadas, o factores literales, de exponente en $\mathbb{I}_0$.

Grado de un monomio

Una característica a tener en cuenta, es la que se refiere al grado de este tipo de expresiones.

> El grado de un monomio, es la suma de los exponentes de las indeterminadas del mismo

Para interpretar este concepto analicemos algunos de los ejemplos dados:

• Sea el monomio - 2a b^2 c^3, los exponentes de las indeterminadas, o variables, son:
- 1 que corresponde a la indeterminada (o variable) a
- 2 es el correspondiente a la indeterminada (o variable) b
- 3 es el exponente asignado a c.

La suma de los exponentes individualizados es 6. Podemos concluir entonces que el grado de este monomio es 6.

• ¿Cuál es el grado del monomio -8? ¿En realidad es un monomio?

Las constantes, como en el caso de - 8, son monomios de grado cero, ya que cualquier constante k puede ser expresada como:

$k = k \cdot 1 = k \cdot k^0$

y particularmente podemos ver que:

$- 8 = - 8 \cdot 1 = - 8 \cdot x^0$

Monomios semejantes

Por último, nos referiremos a los monomios semejantes. Para ello le proponemos que observe los siguientes términos y particularmente preste atención a los factores literales de cada uno de ellos y a su grado:

$$\sqrt{5}x^2y \qquad 3x^2y \qquad \frac{1}{2}x^2y$$

Estamos de acuerdo que presentan exactamente los mismos factores literales, tienen el mismo grado pero difieren en los coeficientes. Por la particularidad de tener los mismos factores literales e igual grado decimos que los tres monomios son semejantes.

Definimos entonces que:

> Dos o más monomios son semejantes si tienen el mismo grado y los factores literales o variables están elevados a los mismos exponentes.

Operaciones con monomios

Suma y resta

Para realizar estas operaciones, necesariamente los monomios deben ser semejantes de modo tal que el resultado sea también un monomio.

Observe y analice los pasos que se realizan a continuación para sumar los monomios:

$$3x^3y^4 \qquad y \qquad 10x^3y^4$$

se tiene:

$$3x^3y^4 + 10x^3y^4 = (3+10)\ x^3y^4 = 13x^3y^4$$

Luego de haber analizado los pasos anteriores podemos concluir entonces que:

> La suma de monomios semejantes, es igual a un monomio cuyo coeficiente es igual a la suma de los coeficientes de los monomios dados y cuyo factor literal es el factor literal de los monomios dados.

Seguimos con el cálculo de resta de monomios. Para ello nuevamente le proponemos que observe y analice los pasos para realizar este cálculo:

$$5x^3y^4 \qquad y \qquad 10x^3y^4$$

y restamos:

$$5x^3y^4 - 10x^3y^4 = (5-10)\ x^3y^4 = -5x^3y^4$$

Terminado el análisis de cada uno de los pasos, concluimos que:

> La resta de monomios semejantes es igual a un monomio cuyo coeficiente es igual a la resta de los coeficientes de los monomios dados y cuyo factor literal es el factor literal de los monomios dados.

Producto de monomios

Al multiplicar dos o más monomios, el resultado es otro monomio, no importa si son semejantes o no.

> El producto de dos o más monomios es un monomio cuyo coeficiente es el producto de los coeficientes de los monomios dados y cuyo factor literal es el producto de los factores literales de los estos mismos monomios.

El grado del monomio producto es la suma de los grados de los factores literales, si estos no son nulos. Si alguno de los monomios es el monomio nulo, el producto es el monomio nulo.

Luego, para multiplicar monomios debe tener presente la propiedad asociada al producto de potencias de igual base. Por ejemplo, si queremos multiplicar los siguientes monomios:

$$6\,a^2 x^2 y^4 (-2x^3 y^5) a x^2 y$$

Para obtener el producto:

• Primero se multiplican los coeficientes:

6 . (- 2) = - 12

• Luego se multiplican los factores literales, aplicando la propiedad del producto de potencias de igual base cuando sea necesario:

$$\underbrace{(a^2 . a)} . \underbrace{(x^2 . x^3 . x^2)} . \underbrace{(y^4 . y^5 . y)} =$$

$a^3 . x^7 . y^{10}$

Con lo cual, el monomio resultante es: $-12\, a^3 x^7 y^{10}$

División de monomios

Para calcular el cociente entre dos monomios, será necesario que tenga presente la propiedad asociada al cociente de potencias de igual base. Veremos que el resultado no siempre es un monomio.

Preste atención a cada uno de los ejemplos analizados, paso a paso, a continuación, para entender las conclusiones posteriores:

a) $(4\, a^6 x^4 y^2) : (2\, a^2 x^3 y)$ que tiene como expresión equivalente a:

$$\frac{4a^6 x^4 y^2}{2a^2 x^3 y}$$

Al dividir los coeficientes y operar con los factores literales resulta:

$$\frac{4a^6 x^4 y^2}{2a^2 x^3 y} = 2\, a^{(6-2)}\, x^{(4-3)}\, y^{(2-1)} = 2a^4 x\, y$$

Observe este otro ejemplo y preste especial atención a los exponentes remarcados del resultado:

b) $$5a^2b^3c^2 : 3a^4bc^3 = \frac{5a^2\, b^3 c^2}{3a^4\, b\, c^3} =$$

$$= \frac{5}{3} a^{-2} b^2 c^{-1}$$

¿La expresión obtenida es un monomio?

Obviamente que no lo es. De acuerdo a la caracterización de los monomios, los factores literales son potencias con exponentes naturales o

Concluimos entonces que:
El cociente de dos monomios **no** siempre es otro monomio.

El cociente de dos monomios es otro monomio, sólo si las indeterminadas del monomio del numerador tienen exponente mayor o igual que las respectivas indeterminadas del monomio del denominador.

Ejercitación:

Ejercicio 121:
Completar de modo que las siguientes expresiones sean verdaderas:

a) En el monomio - 5,6 a^3 b^4 se pueden diferenciar dos partes:
el coeficiente que es..... y el factor literal que es .....

b) Se llaman monomios semejantes a aquellos monomios que tienen .....

c) Los monomios semejantes pueden sumarse, restarse o multiplicarse dando por resultado otro…….....

Ejercicio 122:
Observe la siguiente expresión y complete:

$$4ab^2c^3 - 5ab^2c^3 = -ab^2c^3$$

¿Qué operación hemos realizado?....., obteniendo el monomio..... cuyo grado es.....

Ejercicio 123:
Resuelva los siguientes cálculos e indique, cuando sea posible, el grado del monomio resultante:

a) $0{,}5x^2 + 1{,}25x^2 - 3x^2$

b) $\frac{4}{3}a^3 - \left(-1{,}5a^3 + 2a^3\right)$

c) $-\frac{5}{7}\,x^2\,a^5\left(\frac{49}{40}x^2\,a^5\right)$

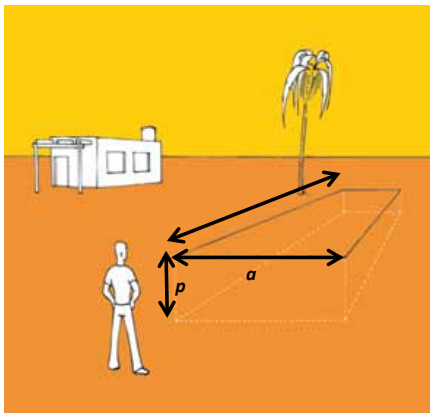
d) $\frac{6\,a^4\,x^5\,y^3}{2\,a^4\,x^5\,y^3}$

e) $\frac{26\,b^4\,x^5\,y^3}{3\,a^4\,x^5\,y^3}$

f) $\frac{\sqrt{12}\,x^m}{5\,x^n}$

Polinomios

Seguramente ha estudiado "polinomios". Pero.....¿qué son y para qué sirven los polinomios?. Le proponemos el siguiente problema para introducirnos en el tema:



Matías compró un terreno y quiere instalar una pileta de natación de forma rectangular. El arquitecto le dijo que para que el diseño sea armonioso, su pileta debe tener el doble de largo que de ancho, y los entendidos opinan que la profundidad debe ser la mitad del ancho.

Para hacer un presupuesto, averigua que el material para las paredes y el piso cuesta \$65 el m^2; la soldadura para las juntas, \$ 20 el m; la excavación, \$ 30 el m^3 y el traslado de materiales, \$100.

Se pretende:
a) Encontrar una fórmula que permita calcular el costo de la pileta en relación de su ancho a.

b) Saber cuál será el costo de construir una pileta de 5 m de ancho.

c) Si Matías dispone de \$15.000, saber si puede construir una pileta de 6 m de ancho.

Para resolver esta situación, indique con sus palabras lo que debe tener en cuenta para calcular el costo total de la piscina.

.....

Si ahora traduce lo que escribió anteriormente a través de una expresión algebraica, en relación al ancho de la pileta, obtendrá una expresión similar a:

$$C(a) = 65(5a^2) + 20(8a) + 30a^3 + 100$$

Señale a continuación el significado de cada uno de los términos de esta expresión. Esta actividad le será útil para corregir la suya, si ha cometido errores, o para verificar, si es correcta:

65 ($5a^2$)	
20 (8 a)	
30 a^3	
100	

Operando sobre cada uno de los términos, la respuesta de la primera pregunta es:

$$C(a) = 30a^3 + 325a^2 + 160a + 100$$

Continuamos ahora con la segunda pregunta que dice:
Matemáticamente sería calcular el valor numérico de .
O sea:
.....

Entonces la respuesta a esta pregunta es: .....

A continuación analizamos el tercer ítem:

Una pileta con un ancho de 6 metros le costará $ por lo que podemos concluir que una pileta de esas dimensiones excede su presupuesto.
Escriba la expresión y los cálculos que permiten verificar esta respuesta:

.....

Creemos que con esta situación tan sencilla, pero muy útil, hemos respondido la pregunta del comienzo.

Definimos y estudiamos el comportamiento de las expresiones como las que obtuvimos en el problema, o sea en donde aparece sólo una variable o indeterminada.

Para formalizar podemos decir que:

La expresión general de un polinomio, P(x), de grado n en la variable real x es: $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \mathrm{L} + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

Siendo:

• a_0, a_1, $\wedge$, a_{n-1}, a_n números reales, llamados coeficientes del polinomio, que pueden ser nulos, a excepción de a_n.

• $n \geq 0$ es un número natural ó cero.

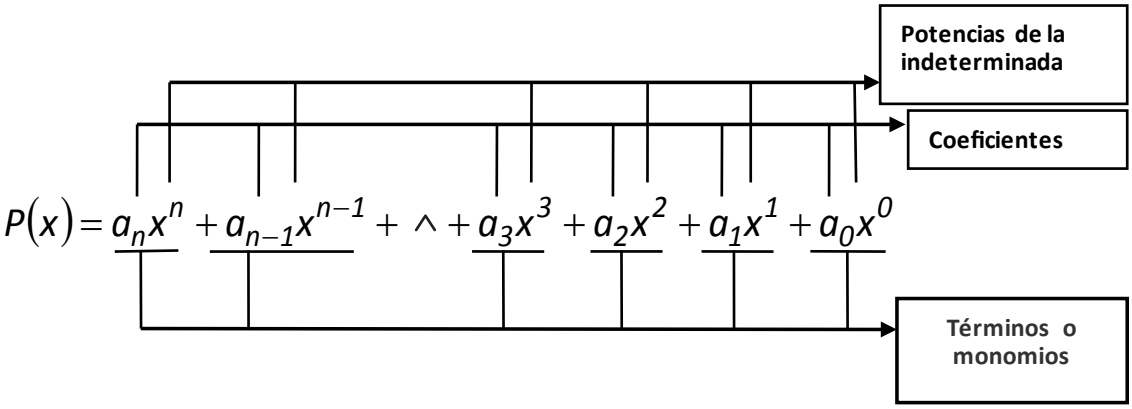
• x es la variable real o indeterminada.

• a_0 el término independiente y coeficiente de x^0.

Como $a_n \neq 0$, es éste el coeficiente principal y el exponente n de la variable o indeterminada es el grado del polinomio, ya que es el mayor exponente que alcanza la variable del polinomio.

Particularmente si $a_n = 1$, el polinomio se llama mónico.

En el siguiente esquema visualizaremos mejor los conceptos antes mencionados:



Damos a continuación varias definiciones:

Un polinomio está ordenado si sus términos están ordenados en forma creciente, o decreciente, respecto de sus potencias.

Un polinomio de grado n es completo cuando contiene todos los exponentes sucesivos respecto a la variable o indeterminada desde cero hasta el n-ésimo

En caso que el polinomio esté incompleto, se agregan los términos que faltan con coeficiente cero, para obtener una expresión equivalente a la dada.

Ejemplo:

$$P(x) = 4x^4 - 3x^2 - 0{,}5$$

es un polinomio incompleto.

Su equivalente completo, y ordenado en forma decreciente es:

$$P(x) = 4x^4 + 0x^3 - 3x^2 + 0x - 0{,}5$$

Un polinomio es nulo cuando todos los coeficientes del mismo son nulos, y en este caso el polinomio no tiene grado.
En símbolos es:

$$P(x) = 0x^n + 0x^{n-1} + \wedge + 0x + 0 \quad \text{o, simplemente} \quad P(x) = 0$$

Dado un polinomio P (x) cualquiera, su opuesto - P (x) es aquel que tiene el mismo grado y cuyos coeficientes son números opuestos a los coeficientes de P (x).

Ejemplo:
Si se tiene el polinomio:

$$P(x) = 4x^4 - 3x^2 - 0{,}5$$

su polinomio opuesto será:

$$-P(x) = -4x^4 + 3x^2 + 0{,}5.$$

Ejercitación:

Ejercicio 124:
Complete de modo que los enunciados sean verdaderos:

a) Si p (x) = $3x^4 + 2x^3 - 3x - 5$, su polinomio opuesto es - p (x) = ……

b) p (x) + (- p (x)) = ...

Dado un polinomio P(x) cualquiera, un polinomio Q(x) es igual a P(x), si tiene el mismo grado y los mismos coeficientes correspondientes.

Ejercicio 125:
Calcule a, b , c y d de modo que P(x) = R(x):

$$P(x) = 5x^5 - 2x^3 + cx - d \quad \text{y} \quad Q(x) = ax^5 + bx^3 + 4x - d$$

Valor numérico de un polinomio

Para analizar el comportamiento de un polinomio, a veces nos interesará ver cuál es el valor que toma al sustituir la variable por un valor específico, o sea por algún número real, entonces:

El valor numérico de un polinomio es el que se obtiene al sustituir la variable x por un número real a y efectuar las operaciones indicadas en el polinomio.

Raíces de un polinomio

También es importante conocer los ceros o raíces de un polinomio:

Un número a real (o complejo) es raíz de un polinomio P(x) si P(a) = 0, o sea, que al evaluar el polinomio P en x obtenemos por resultado 0.
En forma simbólica:

$$x = a \quad es\ raíz\ \ de\, P(x) \Leftrightarrow \quad P(a) = 0$$

Ejemplo:

• Si $P(x) = 4x^4 - 3x^2 + x$, el valor numérico del polinomio si:

$x = 1$, es: $P(1) = 2$

$x = -1$, es: $P(-1) = 0$ es decir que $x = -1$ es una raíz de P

Ejercitación:

Ejercicio 126:
En el siguiente grupo de expresiones algebraicas algunas son polinomios, indique cuál de ellas lo son y justifique su elección. En aquellas elegidas indique: grado, coeficiente principal, término independiente y además complételas y ordénelas en forma decreciente.

$x = 0$, es: $P(0) = 0$ es decir que $x = 0$ es otra raíz de P

a) $P(x) = -3x^3 - \sqrt{3}x + x^2 - 1$

b) $R(t) = 5{,}2^t + 1 - 3^{2t}$

c) $S(m) = 0m^4 + 0m^3 - 3$

d) $Q(p) = \sqrt[3]{2px} - p^2x^2$

e) $A(s) = 3(s - 2a)^{-1} - 2as^2$

f) $T(r) = \frac{p}{2}r^4 - pr^2 - 2r$

Ejercicio 127:
Señale con una x la respuesta correcta.

a) El sucesor del número natural 4 (x - 1) está representado por:

☐ 4x ☐ 4x - 1 ☐ 4x - 4 ☐ 4x - 3 ☐ 4x - 8

b) El hermano de Andrea tenía x años cuando ella nació. Si ahora Andrea tiene y años. ¿Qué edad tendrá su hermano en y años más?

☐ 2y ☐ x + 2y ☐ 2x + y ☐ x - 2y ☐ 2x - y

c) Si m es el antecesor de n + 2, entonces el doble del sucesor de m, expresado en relación de n es:

☐ 2n + 2 ☐ 2n + 3 ☐ 2n + 4 ☐ 2n + 6 ☐ 2n + 8

d) La expresión que representa al enunciado "el cuadrado de la diferencia entre dos números" es:

☐ 2x - 2 ☐ 2x - y ☐ $x^2 - y$ ☐ $(x - y)^2$ ☐ $x^2 - y^2$

e) La expresión "Al número x se le suma (- 4), dicha suma se divide por a y el resultado se multiplica por y", se representa con una expresión algebraica que es:

f) Si el inverso multiplicativo de $\frac{1}{x-4}$ es – 6, entonces x es igual a:

☐ - 2 ☐ - 10 ☐ $\frac{23}{6}$ ☐ $\frac{25}{6}$ ☐ $-\frac{25}{6}$

g) Sean a, b, y c números enteros tales que a – b = c. Si a = 3 y c = 10 a, entonces el cuádruplo de b es:

☐ 120 ☐ 30 ☐ $-\frac{27}{4}$ ☐ - 108 ☐ - 27

h) Si $a = \frac{2}{3}$ y $b = \frac{1}{2}$, entonces el aditivo inverso de a.b es:

☐ -1/3 ☐ 1/3 ☐ 1/6 ☐ - 1/6 ☐ 3

i) La expresión $(2x)^3$ se lee:

El doble del cubo de un número. ☐

El doble del triple de un número. ☐

El cubo del doble de un número. ☐

El cubo del cuadrado de un número. ☐

El triple del doble de un número. ☐

j) Si el largo de un rectángulo se triplica y su ancho disminuye al 50%, entonces se afirma que su área:

I) se hace 1,5 veces mayor
II) se incrementa en el 50%
III) aumenta en el 150%

de estas afirmaciones son verdaderas:

☐ Sólo I ☐ Sólo II ☐ Sólo III ☐ Sólo I y II ☐ I, II y III

Ejercicio 128:
Dados los monomios: $-3a^2 b$ y $\frac{2}{5}a^2 b$ realice:

a) Su suma es ……..
b) Su diferencia es .....

Ejercicio 129:
Multiplique los monomios: $\frac{2}{3}x^3y^2z$ y $-6xy^3$

Ejercicio 130:
Efectúe el cociente indicado: $(5a^2bc^4)$: $(-2a^2c)$

Ejercicio 131:
Teniendo en cuenta el problema " La pileta de Matías":

a) La transcripción de la expresión $C(a)=30a^3+325a^2+160a+100$ en forma de una expresión algebraica utilizando la indeterminada x es:
.....

b) Clasifique la expresión algebraica obtenida.....

c) Particularmente, a este tipo de expresiones se las conoce con el nombre de:
.....

d) Indique el valor de an , el que corresponde a a0 y el grado de este polinomio .....

e) Justifique brevemente la siguiente pregunta: ¿por qué el polinomio obtenido es ordenado y completo?
.....

f) Escriba el valor numérico de los coeficientes del polinomio opuesto
.....

Ejercicio 132:
Complete las siguientes oraciones de modo que queden expresiones verdaderas:

a) El grado del polinomio $P(x)=(x+4)(x^2-4x+4^2)-x^3-64+4x$ es:
……

b) El grado del polinomio $T(x)=(x-3)(x^2+3x+9)-x^3$ es: .....……

Ejercicio 133:
Ordene el siguiente polinomio en forma decreciente y complételo:

$$P(x)=3+x^4-4x-3x^3+4x^2$$

Ejercicio 134:
Complete los polinomios:

$$P(a)=ax^3-4a$$

$$Q(z)=z^4-1$$

Ejercicio 135:
Complete el polinomio $x^3 - y^3$ en forma decreciente con respecto a x y creciente con respecto a y.

Ejercicio 136:
El valor numérico del polinomio $P(x) = x^4 - 4x - 2x^3 + x^2 + 7$

$x = -1$, es: $P(-1) = ...$

$x = 2$, es: $P(2) = ...$

$x = 0$, es: $P(0) = ...$

Ejercicio 137:
Determine los valores de las constantes a, b, c y d para que los polinomios P(x) y Q(x) sean iguales.

$$P(x) = 3x^3 + (c-d)x^2 - 4x + a$$
$$Q(x) = (a+2b)x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2cx + 1$$

Ejercicio 138:
Indique si son verdaderas o falsas las siguientes proposiciones:

a) Si $P(x) = x^4 + 5x + 6$ *entonces* $P(-1) = 2$

b) Si $P(x) = x^2 - 4x$ una raíz de $P(x)$ es -4

c) Si $a = 3$ el grado del polinomio $P(x) = (a^2 - 9)x^3 - (3-a)x + a$ es 1.

d) El polinomio T(x) = 0 tiene grado 0.

Ejercicio 139:
Encuentre el valor de los polinomios para cada valor de x indicado:

a) $Q(x) = x^3 + 4x^2 + 5x + 4$ *si* $x = -2$

b) $S(t) = t^3 - 5t^2 + 8t - 4$ *si* $x = 1$

Ejercicio 140:
Marque con una cruz la única respuesta correcta:
El polinomio $P(x) = (m - 4)x^3 + (m^2 - 16)x^2 + (m + 4)x + 4$ es de grado 2:
a) si m = 4 ó si m = -4

b) si $m \neq 4$ y $m \neq -4$

c) si $m \neq 4$

d) si $m \neq -4$

e) para ningún valor de m

Expresiones algebraicas enteras

Operaciones con polinomios

Antes de comenzar con este contenido, a modo de repaso, responda las siguientes preguntas:

a) ¿Cómo se los llama a los términos de un polinomio?
.....

b)Escribe tres monomios, de los cuales dos deben ser semejantes
.....

c) Describe, sin calcular e indicando las propiedades adecuadas, ¿cómo se obtiene el resultado de: $\left(2^{0,5}x^2y^3\right)\cdot\left(-2^{0,5}xy^{-1}\right)$ es:
……

Indique si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. Luego escriba las falsas en forma correcta:

V / F	Proposición	
	$(2x)^3 = 2x^3$	
	$5x(xy) = 5x^2\ 5xy$	
	$3x + 2xa + 6xa = 11x^3a^2$	
	$(x + 2b)(x - 2b) = x^2 - 4b^2$	
	$(-2x)^3 = -8x^3$	

Suma de polinomios

Dados dos polinomios P(x) y Q(x), su suma es otro polinomio S(x) cuyos términos son la suma de los términos semejantes de los polinomios sumandos.

El grado del polinomio suma es menor o igual que el grado de los polinomios sumandos.

Para sumar dos o más polinomios se agrupan los monomios semejantes y se suman sus coeficientes.

Observe además que dos polinomios siempre se pueden escribir en forma equivalente de modo que todos los términos de uno tengan un semejante en el otro. Por ejemplo:

Dados $P(x) = 2x^2 - 3$ y $Q(x) = x$, pueden reescribirse como:

$$P(x) = 2x^2 + 0x - 3 \quad \text{y} \quad Q(x) = 0x^2 + x + 0$$

Así, son equivalentes a los dados y cada uno tiene términos semejantes en el otro.

Propiedades de la suma

Sean $P(x)$, $Q(x)$ y $R(x)$ polinomios cualesquiera en una variable, se verifican las siguientes propiedades:

Nombre propiedad	Propiedad	
Asociativa	[P(x) + Q(x)] + R(x) = P(x) + [Q(x) + R(x)]	Esta propiedad nos permite sumar tres o más polinomios entre sí.
Conmutativa	P(x) + Q(x) = Q(x) + P(x)	Esta propiedad nos permite sumar polinomios sin tener que preocuparnos por el orden de los mismos.
Elemento Neutro	P(x) + 0(x) = 0(x) + P(x) = P(x)	Si a cualquier polinomio se le suma 0(x), el resultado es ese mismo polinomio.
Elemento Inverso	P(x) + [- P(x)] = - P(x) + P(x) = 0(x)	Para cada polinomio siempre se puede encontrar otro polinomio (su opuesto), de modo que sumados dan 0(x).

Si observas atentamente, la suma de polinomios cumple las mismas propiedades que la suma de números enteros (o también, que los reales).

Recuerda que para obtener el polinomio opuesto o el polinomio inverso aditivo de un polinomio dado, basta con cambiar el signo de cada uno de sus términos.

Ejercicio 141:
Si $R(x) = 3x^3 - 2x - 1$ y $S(x) = x - 1$, entonces $R(x) + 2\,S(x)$ es igual a:

a) $R(x) + 2\,S(x) = 3\,x^3 - 3$
b) $R(x) + 2\,S(x) = 3\,x^3 - 2$
c) $R(x) + 2\,S(x) = 3\,x^3 + 3$
d) $R(x) + 2\,S(x) = x^3 - 3$
e) ninguna respuesta es correcta.

Resta

La resta de dos polinomios es otro polinomio obtenido sumándole al polinomio minuendo el polinomio opuesto al sustraendo:

$$P(x) - Q(x) = P(x) + [-Q(x)]$$

Multiplicación

La multiplicación de un número por un polinomio es otro polinomio obtenido multiplicando cada coeficientes del polinomio por el número dado.

Ejemplo:

Si $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 2$ y se multiplica por 5, se obtiene:

$$\begin{aligned} R(x) &= 5 \cdot P(x) = \\ &= 5 \cdot \left(2x^3 - 3x^2 + 4x - 2\right) = \\ &= 10x^3 - 15x^2 + 20x - 10 \end{aligned}$$

La multiplicación de un monomio por un polinomio da un polinomio obtenido multiplicando el monomio por cada uno de los monomios que forman el polinomio.

Ejemplo:

Si $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 2$ y se multiplica por $Q(x) = \frac{3}{2}x^2$, se obtiene:

$$\begin{aligned} R(x) &= Q(x) \cdot P(x) = \\ &= \frac{3}{2}x^2 \cdot \left(2x^3 - 3x^2 + 4x - 2\right) = \\ &= \frac{3}{2}2\ x^2x^3 + \frac{3}{2}(-3)\ x^2x^2 + \frac{3}{2}4\,x\,x^2 + \frac{3}{2}(-2)x^2 \\ &= 3x^5 - \frac{9}{2}x^4 + 6x^3 - 3x^2 \end{aligned}$$

La multiplicación de polinomios da otro polinomio obtenido multiplicando cada monomio que forma el primer polinomio por el segundo polinomio.

El grado del polinomio producto es igual a la suma de los grados de los polinomios factores.

Ejemplo:

Realicemos el producto entre $P(x)=3x^4-5x^2+11$ y $Q(x)=x^3+2x^2+4$

$$P(x)\,.\,Q(x)=(3x^4-5x^2+11)\,(x^3+2x^2+4)$$
$$=3x^4x^3+3\cdot 2x^4x^2+3x^4 4-5x^2x^3+(-5)2x^2x^2-5\cdot 4x^2+11x^3+11\cdot 2x^2+11\cdot 4$$
$$=3x^7+6x^6-5x^5+2x^4+11x^3+2x^2+44$$

La multiplicación de los polinomios dados lo hemos realizado en forma horizontal. También la podemos efectuar colocando los polinomios en columna, alineando los términos semejantes del siguiente modo:

$$\begin{array}{lcccccccc}
 & & & & 3x^4 & -5x^2 & +11 & & \\
\times & & & & x^3 & +2x^2 & +4 & & \\
\hline
 & & & & 12x^4 & & -20x^2 & +44 & \\
 & & 6x^6 & & -10x^4 & & +22x^2 & & \\
3x^7 & & -5x^5 & & & +11x^3 & & & \\
\hline
3x^7 & +6x^6 & -5x^5 & +2x^4 & +11x^3 & +2x^2 & +44 & &
\end{array}$$

Propiedades de la multiplicación

Dados tres polinomios cualesquiera, P(x), Q(x) y R(x) se cumplen las propiedades:

Nombre propiedad	Propiedad	
Asociativa	[P(x) . Q(x)] . R(x) = P(x) . [Q(x) . R(x)]	Cuando se multiplican tres polinomios, no importa cuál de los productos se realice primero, el polinomio resultante es el mismo
Conmutativa	P(x) . Q(x) = Q(x) . P(x)	También en el producto de polinomios, el orden de los factores no altera el polinomio resultante obtenido.
Elemento Neutro	P(x) . 1(x) = 1(x) . P(x) = P(x)	Si se multiplica cualquier polinomio por 1(x) = 1 , se obtiene ese mismo polinomio
Elemento Absorvente	P(x) . 0 (x) = - 0(x) . P(x) = 0(x)	Multiplicando cualquier polinomio por el nulo, se obtiene nuevamente el nulo.

La siguiente propiedad, que se cumple para cualquier terna de polinomios P(x), Q(x) y R(x) involucra a la suma y al producto de ellos:

Distributiva	P(x) . [Q(x) + R(x)] = P(x) . Q(x) + P(x) . R(x)

Observe que las operaciones suma y producto de polinomios cumplen las mismas propiedades que la suma y producto de números enteros

Productos de interés práctico o también llamados productos notables

Existen algunos productos que tienen una estructura determinada, y algunos autores lo llaman "productos notables". Además, se usarán con mucha frecuencia y por eso es conveniente tenerlos presente.

Para comprobar los resultados realice las multiplicaciones correspondientes.

$(x+a)\ (x-a) = x^2 - a^2$ ——— diferencia de cuadrados

$(x+a)\ (x+a) = (x+a)^2 = x^2 + 2xa + a^2$
$(x-a)\ (x-a) = (x-a)^2 = x^2 - 2xa + a^2$
trinomio de cuadrado perfecto

$(x+a)(x+a)(x+a) = (x+a)^3 = x^3 + 3x^2a + 3xa^2 + a^3$
$(x-a)(x-a)(x-a) = (x-a)^3 = x^3 - 3x^2a + 3xa^2 - a^3$
cuatrinomio de cubo perfecto

División

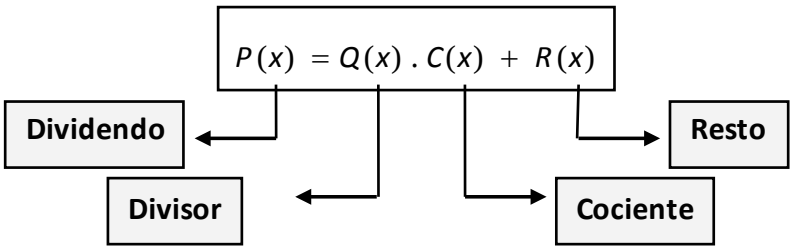
No siempre es posible dividir polinomios y encontrar otro polinomio. Esto sólo se logra bajo ciertas condiciones.

Se llama división entera de un polinomio P(x) de grado m entre otro Q(x) de grado n, con $m \geq n$, al algoritmo por el cual se obtienen otros dos polinomios C(x) y R(x) que cumplen:

$P(x) = Q(x) \,.\, C(x) + R(x)$ (1)

Grado de $C(x) = m - n$ y grado de $R(x) \leq n - 1$

o $R(x)$ no tiene grado



A la expresión (1) se la llama "ALGORITMO DE LA DIVISIÓN"

Lo expresado anteriormente lo podemos visualizar del siguiente modo: si queremos efectuar el cociente entre dos polinomios, por ejemplo:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

lo indicamos de manera similar al cociente o división de números reales:

$$\frac{P(x)\ Q(x)}{R(x)\ C(x)}$$

Algoritmo Es un conjunto de instrucciones, que cumplidas en el orden en que se dan, conducen a la solución de un problema después de una cantidad.

Para obtener los polinomios cociente y resto a partir de los polinomios dividendo y divisor, se deben tener presente este conjunto de instrucciones:

- El grado del polinomio dividendo debe ser mayor o igual que el del polinomio divisor.
- Ambos polinomios se ordenan en forma decreciente y se completan antes de comenzar a dividir.
- El grado del resto debe ser menor que el del divisor o ser el polinomio nulo.

A continuación describimos el proceso de la división con el siguiente ejemplo:

$$(3x^4+5x^3-2x+3):(x^2-3x\ \ +2)$$

I) Se divide el primer término del dividendo por el primer término del divisor, con lo que se obtiene el primer término del cociente:

$$\frac{3x^4}{x^2}=3x^2$$

II) Se multiplica el primer término del cociente por el divisor:

$$3x^2\left(x^2-3x+2\right)=3x^4-9x^3+6x^2$$

III) El polinomio obtenido se resta del dividendo, obteniéndose un nuevo dividendo:

$$\left(3x^4+5x^3-2x+3\right)-\left(3x^4-9x^3+6x^2\right)=14x^3-6x^2-2x+3$$

Observe que el polinomio obtenido luego a aplicar una iteración del algoritmo tiene al menos un grado menos que el divisor.

IV) Con el dividendo obtenido, se repiten las operaciones de los pasos I, II y III hasta obtener un resto igual a cero o de menor grado que el del divisor.

A continuación presentamos el desarrollo completo del algoritmo:

$$
\begin{array}{l|l}
3x^4+5x^3+0x^2-2x+3 & x^2-3x+2 \\
\cline{2-2}
-3x^4+9x^3-6x^2 & 3x^2+14x+36 \\
\cline{1-1}
\quad 14x^3-6x^2-2x & \\
\quad -14x^3+42x^2-28x & \\
\cline{1-1}
\qquad 36x^2-30x+3 & \\
\qquad -36x^2+108x-72 & \\
\cline{1-1}
\qquad\qquad 78x-69 &
\end{array}
$$

$3x^2+14x+36 \longrightarrow$ Cociente: $C(x)$

$78x-69 \longrightarrow$ Ya no se puede seguir dividiendo por que el grado del resto, $R(x)$, es menor que el grado del divisor.

Luego, el cociente de los polinomios dados es posible expresarlo:

a) Teniendo en cuenta el algoritmo de la división: P(x) = Q(x) . C(x) + R(x)

$$P(x) = (x^2-3x+2)\,(3x^2+14x+36)+(78x-69)$$

b) O también: $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = C(x)+\dfrac{R(x)}{Q(x)}$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{3x^4+5x^3-2x+3}{x^2-3x+2} = 3x^2+14x+36 + \frac{78x-69}{x^2-3x+2}$$

• Si el resto es distinto de cero, la división se llama entera y se cumple la relación:

$$P(x) = Q(x)\,.\,C(x)+R(x)$$

• Si el resto es cero, la división se llama exacta, es decir, el dividendo es un múltiplo del divisor y se cumple la relación:

$$P(x) = Q(x)\,.\,C(x)$$

Si la división es exacta, las siguientes expresiones son equivalentes:

• El dividendo es múltiplo del divisor o el dividendo es divisible por el divisor.
• El dividendo es múltiplo del cociente o el dividendo es divisible por el cociente
• El dividendo es igual al producto entre el divisor y el cociente.

Regla de Ruffini

Si se quiere obtener $\frac{P(x)}{Q(x)}$ con $(5x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 6) : (x+2)$, se tienen grandes ventajas (aunque no se vea a simple vista). Dichas ventajas consisten en:

a) El hecho de que el polinomio divisor es mónico y al aplicar el algoritmo cada vez que se aplique el paso (I) el coeficiente de ese cociente es muy fácil de hallar.

b) El divisor es también un polinomio completo y por su grado siempre

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \mathrm{K} + a_1 x + a_0$ y $Q(x) = x - r$

Y entonces $C(x) = b_{n-1} x^{n-1} + \mathrm{K} + b_1 x + b_0$ y $R(x) = d$ (en el caso que queremos resolver r=2)

Es decir que el cociente es otro polinomio de un grado menos (por lo menos) que el divisor y el resto un polinomio de grado 0, o el polinomio nulo.

Estas observaciones tuvo en cuenta Paolo Ruffini en 1809 y propuso un método más sencillo para realizar este tipo de divisiones, sin escribir en el procedimiento los factores literales de cada término. Este método se conoce como Regla de Ruffini.

Para dividir: $(5x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 6) : (x+2)$ aplicando la Regla de Ruffini, se deben realizar los siguientes pasos:

1. Completar el polinomio dividendo.

2. Colocar en un renglón solamente los coeficientes del polinomio dividendo ordenado en forma decreciente.

3. En el renglón que sigue, el – 2 (r en general, que es la raíz del polinomio divisor).

	5	-3	6	**0**	-6
-2					

4. Repetir el primer coeficiente en la primera posición del tercer renglón.

	5	-3	6	**0**	-6
-2	⋮				
	5				

5. Se lo multiplica por la raíz del divisor (2do renglón) y el resultado se coloca en el 2do renglón, bajo el segundo coeficiente.

	5	-3	6	**0**	-6
-2		-10			
	5				

6. Se realiza la suma indicada verticalmente, colocando el resultado en el tercer renglón.

sumar

	5	-3	6	**0**	-6
-2		-10			
	5	-13			

7. Se repiten los pasos (5) y (6) con los coeficientes que siguen hasta el coeficiente independiente del divisor.

	5	-3	6	**0**	-6
-2		-10	26	-64	128
	5	-13	32	-64	**122** → **Resto**

8. Los coeficientes hallados, en ese orden, son los coeficientes del polinomio cociente. El último de ellos es el resto de la división.

$C(x) = 5x^3 - 13x^2 + 32x - 64$ y $R(x) = 122$

Ejercicio 142:
Encuentra el cociente y resto aplicando regla de Ruffini:

a) $(4x^4 - 3x^2 - 1):(x-1)$

b) $(4x^4 + 2x^3 - 4x^2 + 3x + 1)(x+2)$

Teorema del Resto

Si se realiza la división de $P(x) = x^4 - 8x^2 - 7x + 2$ por $Q(x) = x - 3$, se puede hacer usando la Regla de Ruffini:

a)

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 0 & -8 & -7 & 2 \\ 3 & & 3 & 9 & 3 & -12 \\ \hline & 1 & 3 & 1 & -4 & \boxed{-10} \end{array} \longrightarrow \textbf{Resto}$$

Además si se evalúa el polinomio P(x) en x = 3, se tiene:

$$\begin{aligned} P(3) &= 3^4 - 8 \cdot 3^2 - 7 \cdot 3 + 2 = \\ &= 81 - 72 - 21 + 2 = \\ &= -10 \end{aligned}$$

Esta coincidencia entre el valor del polinomio P(x) en x = 3 y el resto de la división P(x) : (x - 3) no es casual, de hecho se puede probar que para cualquier división de este tipo será así. Esta propiedad general se enuncia en el siguiente teorema:

> Teorema del resto: el resto de la división de un polinomio P(x) por otro de la forma x - a coincide con el valor numérico de P(x) en x = a, es decir con P(a).

Este teorema es útil para conocer cuál es el resto de la división sin necesidad de realizarla.

Ejercitación:

Ejercicio 143:
Señale la respuesta correcta.

Dado el polinomio $P(x) = x^5 - kx^3 + x^2 - x$

$P(x)$ es divisible por $(x+1)$ si k es un número que pertenece al intervalo $(-3,1)$	
Para el valor calculado de k, el resto de dividir $P(x):(x-2)$ es 42	
Para el valor calculado de k, es $P(x) + 2Q(x) = x^5 - 3x^3 + 2$ siendo $Q(x) = -2x^3 + 0{,}5x + 1$	
Para el valor calculado de k, es $P(x):(x+1) = x^4 - x^3 + 2x^2 - x$	

Ejercicio 144:
Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

$x^3 - 3x^2 + x - 1$ es múltiplo de $(x+1)$	
$x^4 - 81$ es divisible por $(x+3)$	
Si $T(x) = -2x^5 - 3x^3 + x^2 + x + 1$, entonces $P(-2) = -5$	
$S(x) = (x-2)^2 + 3x - 4x^3$ y $P(x) = 4x^3 + 2x^2 + x - 4$ son polinomios opuestos.	

Ejercicio 145:
Dados los siguientes polinomios, efectúe las operaciones que se indican a continuación:

$A(x) = x^2 - 5$ $\qquad B(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + x - 1$ $\qquad C(x) = \frac{1}{5}x + 6$

a) $B(x) - [-C(x)]$

b) $2A(x) \cdot B(x)$

c) $B(x) : \left(\frac{1}{6}x^2 + x - 2\right)$

d) $[-A(x)]^2 : \left(\frac{1}{5}x - 1\right)$

e) $-5C(x) + B(-1)$

Ejercicio 146:
Calcule el polinomio P(x) que dividido por (x + 1) tiene por cociente $C(x) = 3x^2 + 2x + 3$ y resto 2.

Ejercicio 147:
Calcule el valor de k, para que el resto de la división de los polinomios T(x) : P(x) sea 4, siendo $T(x) = 4x^3 - x^2 + kx - 2$ y $P(x) = (x-2)$

Ejercicio 148:
Sabiendo que 3/2 es una raíz del polinomio P(x), calcule el valor de la constante a si: $P(x) = 2x^4 - 3x^3 - ax - 2{,}5x + 6$

Ejercicio 149:
Efectúe el cociente $(2x^4 - 3x^3) : (x+2)$

a) Utilice división de polinomios.
b) Mediante la Regla de Rufini.
c) Indique la expresión del polinomio cociente y el resto.
d) Aplique el Teorema del resto y verifique que P(-2) = R(x).

Ejercicio 150:
Resuelva las divisiones que siguen. Exprese el cociente y el resto. Cuando sea posible, aplique el teorema del resto para verificar:

a) $(x^4+7x^3-5x+1):(x^3+2x)$

b) $(8x^4-x^3-2+x^2):(x-2)$

Ejercicio 151:
Si P(1) = 3 y x = -2 es un cero de $P(x)=3x^4+ax^3-4x^2+bx+2$ entonces a y b valen...

Ejercicio 152:
Complete las siguientes expresiones:
a) …… + 10 x …….. = (..... - 5)^2
b)……- 75 x …… = (..... - x)^3

Ejercicio 153:
Calcule el valor de a, sabiendo que $T(x)=\frac{1}{2}x^4+3ax^3-2x \quad y \quad T(-2)=2$

Ejercicio 154:
En un rectángulo, las expresiones polinómicas que representan la longitud de los lados no congruentes son $(x^2-2x)\ y\ (-3x^2-4x)$

Encuentre el polinomio reducido que expresa el perímetro y el de la superficie del rectángulo.

Ejercicio 155:
Resuelva las divisiones que siguen. Exprese el cociente y el resto. Cuando sea posible, aplique el teorema del resto para verificar:

a) $(x^5+7x^3-5x+1):(x^3+2x)$

b) $(8x^4-x^3-2+x^2):(x-2)$

Ejercicio 156:
Si se conoce el cociente C(x), el divisor D(x) y el resto R(x) ¿Cuál es el dividendo?

a) $C(x)=3x^2+x+4 \qquad D(x)=x+2 \qquad R(x)=-9$

b) $C(x)=\frac{2}{3}x^3+4x^2-5x+4 \qquad D(x)=x+2 \qquad R(x)=0$

Ejercicio 157:
De la división exacta entre $2x^4 - 3x^3 + 10x^2 - 17x + 3$ y un cierto polinomio, el cociente es 2x - 3. ¿Cuál es ese polinomio?

Ejercicio 158:
Halle el valor de k en cada caso:

a) $P(x) = -2x^4 + 3kx - 1$ y P(x) es divisible por (x - 2)

b) $Q(x) = 5x^3 - 2x^2 + k$ y -1 es raíz de Q(x)

c) $S(x) = -2x^2 - 4x - k$ y el resto de dividir S(x) por (x +3) es -1.

d) $T(x) = 3(x+k)(x-5)$ y la suma de las raíces es 3.

Ejercicio 159:
El resto de dividir $P(x) = x^4 - 3x^3 - 4x^2 + 6x - 7$ por un cierto polinomio Q(x) es 4. ¿Puede ser Q(x) = (x - 3) el divisor? ¿Por qué?

Ejercicio 160:
Halle el resto de la división entre $P(x) = x^3 + 2x + 2$ y $Q(x) = x + 1$
e indique si los polinomios dados son divisibles.

Ejercicio 161:
Dado $Q(x) = x^6 - 64$, indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) El binomio $P(x) = x^3 + 8$ divide a Q(x). $P(x) = x^3 + 8$

b) - 2 es raíz de Q(x).

c) El polinomio $x^2 + 2x + 4$ es múltiplo de Q(x).

d) $Q(x) = (x^3 - 8)(x + 2)(x^2 - 2x + 4)$

Ejercicio 162:
Escriba un polinomio P(x) de grado tres para el cual 4 sea una raíz doble y -1 una raíz simple y que además verifique que P(2) = 24.

Ejercicio 163:
Escriba un polinomio Q(x) de grado tres sabiendo que
Q(-2) = Q(1) = Q(5) = 0 y que Q(0) = 50.

Ejercicio 164:
Indique si son (V) o (F) las siguientes proposiciones:

a) $P(x) = x^3 - kx^2 + 2x + 7k$ es divisible por Q(x) = x + 2, si k = 4.

b) Al dividir $P(x) = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - x + 1$ por Q(x) = x - 2, el resto es 15.

c) $(a - \sqrt{3})(a + \sqrt{3}) = a2 - 3$.

Ejercicio 165:
¿Qué valores deben tener a y b para que $P(x) = 5x^3 - 2x^2 + ax - b$ sea divisible por $Q(x) = x^2 + 1$ (Recuerde: una sola respuesta es la correcta)

Para formalizar podemos decir que:

a) 5 y 2

b) 5 y -2

c) -5 y 2

d) -5 y -2

e) Ninguna respuesta es correcta.

Ejercicio 166:
Dados los siguientes polinomios, halle su valor para cada valor de x indicado:

a) $Q(x) = x^3 + 4x^2 + 5x + 4$ .....*para* $x = -2$

b) $S(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4$ ..... *para* $x = 1$

c) Aplicando el teorema del resto, ¿cuál es el binomio que divide a S(x)? Verifique.

d) ¿Es Q(x) divisible por (x + 2)? ¿Por qué?

e) ¿Cuál debería ser el valor del término independiente de Q(x) para que sea divisible por x - 2?

Ejercicio 167:
¿Cuál es el polinomio que dividido por x - 2 tiene cociente
$C(x) = 2x^3 + 7x^2 + 6x - 2$ y resto $R(x) = 3$?

Ejercicio 168:
Indique con una cruz si los siguientes polinomios son divisibles por (x + 3)

$P_i(x)$	**CÁLCULOS**	**SI**	**NO**
$P_1(x) = x^2 - 3^2$			
$P_2(x) = x^3 + 3^3$			
$P_3(x) = x^2 + 3x$			
$P_4(x) = x^4 + 3x^3 + 9x^2 + 27x + 81$			
$P_5(x) = x^3 - 27$			
$P_6(x) = x^4 + 81$			

Factorización de expresiones algebraicas enteras

También los polinomios pueden ser expresados como el producto de dos o más factores algebraicos. A este proceso se lo llama factorización.

Recordemos que…
es posible expresar los números enteros como producto de otros números enteros que son divisores del mismo, como por ejemplo:
a) 6 = 2.3 o también 6= -2.(-3)
b) -10= 2.(-5) o también -10 = -2. 5

Anteriormente vimos productos notables, en virtud de eso:

$$x^2 - 25 = (x-5)(x+5)$$

Aquí, el segundo miembro de la igualdad es un producto de dos factores, mientras que el primero es un binomio. Se dice que "factorizamos el binomio", porque ese binomio tiene como expresión equivalente un producto.

Para factorizar polinomios, en general, se aplican diversos recursos algebraicos como el de los productos notables y/o el de las raíces o ceros de un polinomio.

Factorización de polinomios a partir del cálculo de los ceros o raíces.

Anteriormente hemos visto que un número a (real o complejo) es una raíz o cero de un polinomio P(x), si el valor del polinomio se anula para ese valor de x.

En forma simbólica se escribe:

$$x = a \text{ es } \textit{raíz} \text{ de } P(x) \text{ si y sólo si } P(a) = 0$$

Si combinamos el teorema del resto y el algoritmo de la división de un polinomio P(x) por un binomio de la forma (x - a)

$$P(x) = (x-a).C(x) + P(a)$$

Si P(a) = 0 entonces, una consecuencia importante estará dada por la expresión:

$$P(x) = (x-a).C(x)$$

De la igualdad (2) extraemos dos conceptos importantes del álgebra operacional que son:
• Expresión factorizada de un polinomio.
• Divisibilidad de polinomios.

El polinomio dividendo queda expresado como el producto del divisor por el cociente, o también podemos decir que hemos factorizado P(x) a partir del producto del divisor (x - a) por el cociente C(x).

A la expresión: P(x) = (x - a) . C(x) también podemos escribirla así:

$$\frac{P(x)}{(x-a)} = C(x)$$

y se lee: P(x) es divisible por (x - a)

Cuando decimos "es divisible por", esta expresión nos asegura que **el resto de esa división es cero**.

Concluimos entonces que:

Si al realizar el cociente entre dos polinomios, obtenemos: $\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x)$ y el resto es cero, entonces P(x) es divisible por Q(x).

Este concepto matemático, que se vio en los números enteros, se llama: **divisibilidad**. La divisibilidad es una herramienta que nos será útil para factorizar polinomios, junto con el tema que sigue.

Hemos mencionado que las raíces (también llamados ceros de un polinomio), son los valores de x que, reemplazados en el polinomio, hacen que éste se anule o se iguale a cero. Cabe preguntarnos entonces: ¿Cuántas raíces tiene un polinomio dado?

Esta pregunta la contesta un teorema, cuya demostración necesita de conocimientos matemáticos más avanzados, que se llama:

Teorema fundamental del Álgebra.
Todo polinomio de grado n tiene n raíces (números reales o complejos, iguales o distintas).

¿Para qué nos interesa conocer los ceros o raíces de un polinomio?
- Para encontrar la expresión factorizada de un polinomio.
- Simplificar expresiones algebraicas.
- Para resolver ecuaciones cuyo grado es mayor o igual que 2.
- Para graficar una función, porque dichos valores son los valores de "x "para los cuales la gráfica de la función dada interseca el eje de las abscisas.

Si de un polinomio de grado n, conocemos sus n raíces:
x_1 , x_2 , K , x_n

siendo el coeficiente principal , podemos escribir su expresión factorizada como:

$$P(x) = a_n\ (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3).....(x - x_n)$$

Aplicamos este teorema en un ejemplo. Para ello, tendrá que completar lo que se pide:

Sea el polinomio $P(x) = ax^4 + bx + c$

a) El grado del polinomio es: .....

b) De acuerdo al teorema fundamental del álgebra tiene….. ceros o raíces que simbólicamente indicamos: .... , ….., ….., ….

c) El coeficiente del término principal es a_n = …..

Entonces, la expresión factorizada del polinomio, a partir del coeficiente del término principal y las raíces es:

$$P(x) = a\ (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)$$

La pregunta que surge naturalmente ahora es: ¿Cómo hallamos las raíces reales de un polinomio?

Analicemos este ejemplo, en el que también tendrá que completar algunas cosas:

Siendo $P(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 12$ un polinomio de grado ……, de acuerdo al Teorema Fundamental del Álgebra, tendrá …….. raíces.

Si conocemos que una de sus raíces: $x_1 = -2$, esto quiere decir que P(x) es divisible por (x - 2). Para calcular el cociente, ya que el divisor es (x - 2), podemos aplicar la regla de Ruffini.

Complete el cuadro y calcule los coeficientes:

	….	……	……	……
……		……	……	……
	……	……	……	……

El último valor que calculó, aplicando Ruffini es cero, de no ser así revise nuevamente. Si llegó a cero, entonces el polinomio cociente es: C(x) = ……. y R(x) = …….

Por lo tanto, podemos expresar el polinomio P(x) como el producto del divisor por el cociente del siguiente modo:
$P(x) = (x - 2)\ (x^2 + 5x + 6)$

Al llegar a este paso decimos que P(x) es divisible por:
• (x - 2) y también por:
• $x^2 + 5x + 6$

Para encontrar las raíces restantes, es decir los valores de x que anulan al polinomio C(x), tendremos que volver a calcular las raíces del cociente obtenido:

$$C(x) = x^2 + 5x + 6$$

Calcular los ceros, significa igualar a cero este polinomio:

$$x^2 + 5x + 6 = 0$$

Obteniendo una ecuación de 2º grado completa cuyas raíces se calculan a partir de los coeficientes utilizando la siguiente fórmula:

$$x_{2,3} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Sustituyendo cada coeficientes por su valor: a = 1, b = 5 y c = 6 se obtiene:
$x_2 = -2$ y $x_3 = -3$

Así, la factorización del polinomio C(x) queda:

$$C(x) = x^2 + 5x + 6 = (x+2)(x+3).$$

Teniendo en cuenta la raíz anterior $x_1 = 2$, expresamos la factorización del polinomio P(x) del siguiente modo:

$$P(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = 1(x-2)(x+2)(x+3)$$

Concluimos que este polinomio es divisible por:

$$(x-2), (x+2) \ y \ (x+3).$$

Ejercicio 169:

a) Escriba la expresión factorizada de un polinomio de grado 5 cuyo coeficiente principal es 2 y sus raíces son: $x_1 = x_2 = 3$, $x_3 = -2$, $x_4 = -1$ y $x_5 = 1$.

b) A partir de la expresión factorizada que encontró, escriba el polinomio correspondiente: ……

Polinomios primos

Recordamos que: al número 60 lo podemos escribir: 60 = 2.2. 3.5 = 22 . 3. 5 es decir, lo hemos expresado como producto de los factores 2, 3 y 5, ya que 60 es divisible por ellos. Decimos que 60 es número compuesto.

No sucede lo mismo con 61, ya que no es divisible por otros números que no sean él mismo y la unidad. A estos números se los llama números primos.

Con los polinomios sucede algo parecido, es decir, algunos de ellos se pueden factorizar y otros no. Decimos entonces:

Cuando a un polinomio de grado no nulo, no es posible expresarlo como producto de polinomios de grado menor, se dice que es un polinomio primo.

La factorización de un polinomio, conocidas sus raíces, no es la única forma de expresar un polinomio como un producto de polinomios primos.

Recordaremos otras maneras que son muy útiles cuando se trabaja con operaciones entre expresiones algebraicas enteras y fraccionarias, que son:

- Factor común
- Factor común por grupos de igual número de términos
- Trinomio cuadrado perfecto
- Cuatrinomio cubo perfecto
- Diferencia de cuadrados
- Suma o diferencia de potencias de igual grado

Factor común

Observe el polinomio: $P(x) = 2x^4 + 4x^2$

Podemos factorizarlo encontrando las raíces, pero también podemos extraer los factores comunes a ambos términos.

Para ello seguimos el siguiente procedimiento que consiste en:

- Calcular el mayor divisor común de los coeficientes.
- Identificar la variable x, con el menor exponente de todos los términos.

Volviendo al polinomio $P(x) = 2x^4 + 4x^2$ observamos que:

- 2 es el mayor divisor común de los coeficientes 2 y 4
- x^2 es el factor literal con menor exponente de los términos dados

Luego, el factor común es: $2x^2$
Si dividimos cada término del polinomio por el factor común obtenemos:

$$\frac{2x^4}{2x^2} = x^2 \quad \text{y} \quad \frac{4x^2}{2x^2} = 2$$

por lo tanto: $P(x) = 2x^4 + 4x^2 = 2x^2(x^2 + 2)$

¿Es posible verificar si esta factorización es correcta? ¿Qué propiedad debemos utilizar?

Dejamos esta inquietud para que la resuelva y verifique el resultado.

Complete la tabla, teniendo en cuenta las flechas señaladas:

Busque el factor común y factorice la expresión dada:

$10x + 15y$	$5(2x + 3y)$
.....	$4xy(ab - ac + d)$
$6xy - 9xy^2 + 3x^2y$	$3xy$ (.....)
.....	$-7p(2p^3 + p + 1)$
$\frac{1}{2}ab^2 + \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{8}ab^2$	$\frac{1}{2}a$ (.....)
.....	$0{,}2z(x + 2y - 3z)$

Aplique la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma.

Ejercicio 170:
Extraiga el ó los factores comunes de:

a) $6a^4b^3 - 4a^5b^2 - 12a^3b^2 + 4a^4b^4 - 6a^3b^3$

b) $\frac{7}{3}m^6x^3y + 7m^5nx^2 + \frac{14}{5}m^2n^3xy$

Factor común por grupos

No siempre es posible factorizar un polinomio a partir del factor común. Sin embargo, hay polinomios que presentan una estructura que nos permite formar grupos, asociando, con el mismo número de términos y que presentan un factor común para cada uno de esos grupos.

$$ax + ay + bx + by = a(x + y) + b(x + y)$$

Analicemos este ejemplo: (*)

$$a\,x+a\,y+b\,x+b\,y$$

En él es posible observar que los dos primeros términos tienen de común el factor a y los dos últimos, el factor b. Si asociamos los dos primeros y los dos últimos términos:

$$a\,x+a\,y+b\,x+b\,y=(a\,x+a\,y)+(b\,x+b\,y)$$

y luego, de cada paréntesis, extraemos el factor común, obtenemos :

$$a\,x+a\,y+b\,x+b\,y=a\,(x+y)+b(\,x+y)$$

Observamos que han quedado dos términos que tienen como factor común , entonces extraemos ese factor común:

$$a\,x+a\,y+b\,x+b\,y=\,(x+y)\,(\,a+b)$$

¿En este caso, existe una única forma de agrupar los términos?.....

Intente otra agrupación. ¿obtiene finalmente la misma factorización?.....

Recuerde:

Los polinomios que se pueden factorizar de esta forma cumplen con el siguiente requisito:

• Los grupos de términos que tienen factores comunes deben tener el mismo número de términos.

Ejemplo:

Analicemos el siguiente polinomio:

$$P(x)=2x^3+2x^2-x-1$$

Para factorizarlo, podemos agrupar los dos primeros términos y los dos segundos. ¡Cuidado con el paréntesis!

Analice en cuál de las expresiones siguientes es incorrecto el agrupamiento:

$$2x^3+2x^2-x-1=2x^2\,(x+1)-(x-1)$$
$$2x^3+2x^2-x-1=2x^2\,(x+1)+(-\,x-1)$$
$$2x^3+2x^2-x-1=2x^2\,(x+1)-(\,x+1)$$

Seguramente coincidimos que el primero, ya que al sacar los paréntesis, la expresión que se obtiene no es equivalente a la dada.

(*) La expresión de cuatro términos ha quedado factorizada como un producto de dos factores.

Cometer este error es muy común. Recuerde que el signo negativo que precede un paréntesis indica que al eliminarlo, cambia el signo de los términos que encierra el mismo. Esta condición no se cumple en el primer caso. Pero para la factorización nos interesa la tercera propuesta, ya que admite sacar factor común la expresión (x + 1).

Resulta entonces que:

$$2x^3 + 2x^2 - x - 1 = 2x^2(x+1) - (x+1)$$
$$2x^3 + 2x^2 - x - 1 = (2x^2 - 1)(x+1)$$

Recuerde que:
- - a - b = - (a + b)
- - a + b = - (a - b)

Ejercicio 171:
Factorice las siguientes expresiones:

a) $6am - 4ac - 3bm + 2bc$
b) $abc + mnt - mc - abnt$
c) $6x^2 + 10ax + 15x + 25a$
d) $6a^4 - 4a^2 - 12a^3 + 8a$
e) $2x^6 + 2x^4 + 3x^2 + 3$

Trinomio cuadrado perfecto

¿Recuerda el resultado de $(x + a)^2$?.....

La expresión que se obtiene se denomina trinomio cuadrado perfecto, que factorizada, es el cuadrado de un binomio.

Un trinomio cuadrado perfecto consta de ..... términos, que cumplen las siguientes condiciones:

a) Dos de los términos son cuadrados.

b) Un término que es el doble del producto de las bases de los cuadrados.

El cuadrado de un binomio es el producto del binomio por sí mismo y si aplicamos la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma, obtenemos:

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a.a + a\,b + ba + bb = a^2 + 2a\,b + b^2$$

$(a + b)^2$	=	$a^2 + 2\,ab + b^2$
Cuadrado de un binomio		Trinomio cuadrado perfecto

Observe los siguientes ejemplos:

Ejemplos

• El trinomio $25\,x^2 + 10\,x\,y^2 + y^4$ es un trinomio cuadrado perfecto porque:
a) El primer término es el cuadrado de5x ya que: $(5x)^2 = 25\,x^2$

b) El tercer término es el cuadrado de y^2 ya que: $(\,y^2)^2 = y^4$

c) El segundo término es el doble producto de las bases de esos cuadrados, es decir: $2\,.\,5\,x\,y^2 = 10\,x\,y^2$

Luego, el trinomio cuadrado perfecto dado se factoriza:

$25\,x^2 + 10\,x\,y^2 + y^4 = (5\,x + y^2)^2$

• El trinomio, $(9 - 6x + x^2)$ se puede factorizar de dos maneras:

$$9 - 6x + x^2 = (3 - x)^2$$
$$9 - 6x + x^2 = (x - 3)^2$$

Nota: Siempre que el término del doble producto aparezca con signo negativo, en el trinomio cuadrado perfecto, podemos factorizarlo de las dos maneras.

Ejercicio 172:
Complete la siguiente tabla:

Desarrolle el cuadrado de un binomio

$(3x+1)^2$	……
……	$x^2 + 6x + 9$
$(0{,}5a - 0{,}3)^2$	……
……	$25a^2 - 70\,ab + 49\,b^2$

Escriba el cuadrado de un binomio

Ejercicio 173:
Factorice las siguientes expresiones:

a) $x^2 y^4 + \frac{1}{4} - x y^2$

b) $\frac{9}{25} x^6 + \frac{12}{5} x^3 y^2 + 4 y^4$

Cuatrinomio cubo perfecto

¿Recuerda el resultado al realizar $(x + a)^3$?.....

La expresión obtenida se denomina cuatrinomio cubo perfecto, que factorizada es el cubo de un binomio.

Un cuatrinomio cubo perfecto de la forma $x^3 + 3 x^2 a + a^3$ consta de..... términos que cumplen las siguientes condiciones:

a) Dos de los términos son cubos: x^3 y a^3

b) Un tercer término $3 x^2 a$, es el triple del cuadrado de la base del primer término por el segundo término.

c) El cuarto término $3 xa^2$, es el triple de la base del primer término por el cuadrado de la base del segundo.

Para desarrollar el cubo de un binomio, desarrollamos primero el cuadrado y luego multiplicamos la expresión que obtuvimos por el binomio original:

$$(a+b)^3 = (a+b)^2 (a+b) = (a^2 + 2ab + b^2)(a+b)$$
$$= a^3 + a^2 b + 2a^2 b + 2ab^2 + ab^2 + b^3$$

$$\underbrace{(a+b)^3}_{\text{Cubo de un binomio}} = \underbrace{a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3}_{\text{Cuatrinomio cubo perfecto}}$$

Nota: Recuerde que:
$(a - b)^3 = [a + (-b)]^3 = a^3 + 3a^2 (-b) + 3a (-b)^2 + (-b)^3 = a^3 - 3a^2 b + 3 ab^2 - b^3$

Ejemplo:

• El polinomio $x^3+6x^2y+12xy^2+8y^3$ es un cuatrinomio cubo perfecto porque:

$x^3=(x)^3$ $\qquad$ $6x^2y=3(x)^2\,2y$

$8y^3=(2y)^3$ $\qquad$ $12xy^2=3x(2y)^2$

Luego este cuatrinomio cubo perfecto se factoriza:

$$x^3+6x^2y+12xy^2+8y^3=(x+2y)^3$$

Ejercicio 174:
Complete la siguiente tabla:

Desarrolle el cubo de un binomio.

$(3x+1)^3$	.....
.....	$x^3-\frac{3}{2}x^2y+\frac{3}{4}xy^2-\frac{1}{8}y^3$
$(mp^2-p)^3$	.....

Escriba el cubo de un binomio.

Ejercicio 175:
Factorice las siguientes expresiones:

a) $8a^3+36a^2b+54ab^2+27b^3$

b) $x^3-\frac{3}{5}x^2+\frac{3}{25}x-\frac{1}{125}$

Diferencia de cuadrados

Complete con la expresión correspondiente: (a + b) (a - b) = ... ?

Aplicando propiedad distributiva, obtenemos:

$$(a+b)(a-b)=a^2-ab+ba-b^2=a^2-b^2$$

Luego, por la propiedad simétrica de la igualdad:

$$\underbrace{a^2 - b^2}_{\text{Diferencia de cuadrados}} = \underbrace{(a+b)(a-b)}_{\text{Producto de la suma por la diferencia de las bases}}$$

Ejercicio 176:
Escriba las siguientes expresiones como producto de una suma por una diferencia:

a) $16y^2 - x^4 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

b) $1 - m^2 n^4 p^6 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Suma o diferencia de potencias de igual grado

Los siguientes polinomios son particularmente binomios que presentan la siguiente expresión:

$P(x) = x^n + a^n$ ó $P(x) = x^n - a^n$

siendo n un número natural

Para factorizarlos es de suma importancia tener presente dos propiedades que son:

• Todo polinomio de grado n tiene n raíces (números reales o complejas, iguales o distintas).

• Si de un polinomio de grado n conocemos sus n raíces: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$. (siendo el coeficiente principal a_n), podemos escribir su expresión factorizada:

$$P(x) = a_n\,(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\ldots\ldots(x - x_n)$$

Para llevar a cabo la factorización utilizaremos dos conceptos:

• Estas expresiones son divisibles por un binomio de la forma (x - a) siempre que a sea un cero o raíz del polinomio dado. Luego: P(x) = (x - a) C(x)

• La regla de Ruffini para calcular los coeficientes de C(x) y verificar si efectivamente el valor hallado para a es un cero del polinomio.

Debemos averiguar si $x_n + a_n$ ó $x_n - a_n$ son divisibles por (x + a) ó (x - a).

En ambos casos, la divisibilidad depende si el exponente n (número natural) es par o impar.

Ya que estamos trabajando con división de polinomios, siendo el divisor un binomio de primer grado en x podemos aplicar el Teorema del Resto. Si es divisible, el resto será cero y podremos factorizar como:

$$x^n \pm a^n = (x \pm a)C(x)$$

A continuación analizaremos algunos ejemplos particularizando si el grado es un número natural par o impar. Para ello comprobaremos que las siguientes divisiones son exactas aplicando el teorema del resto y calcularemos el cociente aplicando regla de Ruffini.

• Si se tiene suma de potencias del mismo exponente n, siendo n es impar

$$(x^3 + 27) : (x+3) = (x^3 + 3^3) : (x+3)$$

• Aplicando el teorema del resto para x = -3 resulta: $(-3)^3 + 3^3 = 0$ y la división es exacta. Resolviendo la división con la regla de Ruffini, obtenemos el cociente:

$$(x^3 + 27) : (x+3) = x^2 - 3x + 9$$

Utilizamos en la igualdad el algoritmo de la división y de esta forma obtenemos la expresión factorizada

$$(x^3 + 27) = (x+3)(x^2 - 3x + 9)$$

• Si se tiene resta de potencias del mismo exponente n, siendo n es impar

$$(x^5 - 32) : (x-2) = (x^5 - 2^5) : (x-2)$$

Aplicando el teorema del resto para x = 2 resulta: $2^5 - 2^2 = 0$ y la división es exacta. Aplicando regla de Ruffini obtenemos el cociente:

$$(x^5 - 32) : (x-2) = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16 \quad (2)$$

(2) Utilizamos en la igualdad el algoritmo de la división. Así obtenemos:

$$(x^5 - 32) = (x-2)\,(x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16)$$

• Si se tiene suma de potencias del mismo exponente n, siendo n es par

$$(x^6 + 64) : (x \pm 2) = (x^6 + 2^6) : (x \pm 2)$$

Aplicando el teorema del resto:

Si x = -2 resulta: $(-2)^6 + 2^6 = 128$ la división no es exacta.

Si x = 2 resulta: $2^6 + 2^6 = 128$ la división no es exacta.

Conclusión:
Si se presenta una suma de dos potencias de grado par, no es divisible por la suma ni por la diferencia de las bases.

• Si se tiene resta de potencias del mismo exponente n, siendo n es par

$$(x^4 - 16) : (x+2) = (x^4 - 2^4) : (x+2)$$

Aplicando el teorema del resto para x = -2 resulta: $(-2)^4 - 2^4 = 0$, es decir que la división es exacta y el cociente es $C(x) = x^3 - 2x^2 + 4x - 8$.

Usando el algoritmo de la división, se tiene:

$$\left(x^4 - 16\right) = \left(x+2\right)\left(x^3 + 2x^2 + 4x + 8\right)$$

También $(x^4 - 16) : (x-2) = (x^4 - 2^4) : (x-2)$

Aplicando el teorema del resto para x = 2 resulta: $2^4 - 2^4 = 0$, es decir que la división es exacta y el cociente es: $C(x) = x^3 + 2x^2 + 4x + 8$

Usando el algoritmo de la división, se tiene

$$\left(x^4 - 16\right) = \left(x-2\right)\left(x^3 + 2x^2 + 4x + 8\right)$$

Pero en ambos casos, si se analiza el segundo factor, se verá que el proceso de factorizar no está terminado, pues el segundo factor también es factorizable por el segundo caso de factoreo:

$$x^3 - 2x^2 + 4x - 8 = (x^3 - 2x^2) + (4x - 8) = x^2(x-2) + 4(x-2) = (x^2+4)(x-2)$$

Obtenemos entonces:

$$(x^4 - 16) = (x^2 + 4)\,(x-2)\,(x+2)$$

Nota:
Puede ocurrir que los casos de factorización aparezcan combinados:

a) $3x + 3x^2 + \frac{3}{4} = 3\left(x + \frac{1}{2}\right)^2$ (factor común y trinomio cuadrado perfecto)

b) $b^3 - b + 1 - b^2 = (b^2 - 1)\,(b-1)$ (factor común por grupos y diferencia de cuadrados)

Ejercicio 177:
Complete la siguiente tabla:

Escriba como el producto de la suma por la diferencia de las bases

$\frac{1}{9}x^4 - 0{,}25$	.....
.....	$(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})$
$\frac{1}{25}a^2 - 0{,}01$	.....

Escriba como una diferencia de cuadrados

Ejercicio 178:
Complete lo siguiente:

a) $(x-a)(x^2+xa+a^2)$ es la factorización de: .....

b) (x^3+27) factorizado es igual a: .....

c) $(x^2+4)(x-2)(x+2)$ es la factorización de.....

d) (x^5-243) factorizado es .....

A continuación mencionamos los pasos generales a tener en cuenta para la factorización de polinomios:

1º Sacar factor común si es posible.
2º Si el polinomio no queda totalmente factorizado, se aplica alguno de los otros casos analizados o el método de las raíces.

Para utilizar el método de la factorización a partir de los ceros o raíces reales del polinomio tenemos en cuenta:

a) Calcular alguna raíz entera a partir de los divisores enteros del término independiente.
b) Verificar si los divisores son raíces del polinomio utilizando el teorema del resto.
c) Calcular el cociente C(x) entre P(x) y el divisor (x -a) utilizando la Regla de Ruffini, de modo que: P(x) = (x - a) C(x)
d) Se repite lo realizado en el punto c) en caso de que C(x) sea.

Ejercicio 179:
Realice las siguientes factorizaciones a partir de los ceros:

a) $4x - 1 =$.....

b) $x^2 - 2x - 3 =$.....

c) $27x^3 + 8 =$.....

Máximo común divisor y mínimo común múltiplo

Una aplicación útil de la factorización de polinomios es calcular, para dos polinomios, el mínimo común múltiplo o múltiplo común menor, mcm(P(x), Q(x)); y el máximo común divisor mcd(P(x), Q(x)) , los que a su vez permitirán trabajar con funciones racionales.

Estos conceptos los vimos en el módulo de números reales. Si tiene alguna duda respecto de ellos, repase antes de continuar.

El máximo común divisor de dos o más polinomios, mcd (P(x), Q(x)), es el polinomio de grado máximo que sea divisor de todos los polinomios dados.

El mínimo común múltiplo de dos o más polinomios es el polinomio de grado mínimo que sea múltiplo de todos ellos.

Pasos para el cálculo del máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de dos o más polinomios:

a) Se factorizan los polinomios dados.

b) El máximo común divisor es el producto de los factores comunes a los polinomios dados, elevados a su menor exponente con que aparezcan en una de las factorizaciones de los polinomios.

c) El mínimo común múltiplo es el producto de los factores comunes y no comunes a los polinomios dados, elevados a su mayor exponente con que aparezcan en una de las factorizaciones de los polinomios.

Ejemplo:

Calcularemos el mcd y el mcm de los polinomios:

$$P_1(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2x - 3 \qquad P_2(x) = x^4 - 1 \qquad P_3(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$$

Primero factorizaremos cada polinomio. Le proponemos que analice y escriba para cada polinomio el/los casos de factoreo utilizados:

a) $2x^3 - 3x^2 + 2x - 3 = 2x(x^2+1) - 3(x^2+1) = (x^2+1)(2x-3)$

b) $x^4 - 1 = (x^2-1)(x^2+1) = (x-1)(x+1)(x^2+1)$

c) $x^3 - 2x^2 + x - 2 = x^2(x-2) + (x-2) = (x^2+1)(x-2)$

Es importante tener en cuenta que:

• El mcd de dos o más polinomios debe dividir en forma exacta (con resto cero) a todos ellos, por lo tanto es el producto de los factores comunes con su menor exponente.

En nuestro caso es mcd ($P_1(x)$, $P_2(x)$,$P_3(x)$) = $x^2 + 1$.

• El mcm de dos o más polinomios es el polinomio de menor grado que es divisible por todos los polinomios. Por ello se obtiene multiplicando los factores comunes y no comunes con su mayor exponente.

En nuestro ejemplo es: mcm($P_1(x)$, $P_2(x)$,$P_3(x)$)=$(x^2+1)(2x-3)(x-1)(x+1)(x-2)$.

Ejercicio 180:
Calcule el mcd y el mcm de las siguientes ternas de polinomios:

a) $P_1(x) = a\,x\,m^2 + 2\,a\,x\,m\,n + a\;x\,n^2$ $\;P_2(x) = a^3 x\,m + a^3 x\,n$ $\;P_3(x) = 2ax^2$

b) $Q_1(x) = x^4 - x$ $\qquad Q_2(x) = x^2 - 2x + 1$ $\qquad Q_3(x)\;2x^2 - 2$

c) $R_1(x) = 2x^3 - 3\;x^2 + 2x - 3$ $\quad R_2(x) = x^4 - 1$ $\quad R_3(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$

Ejercicio 181:
¿Las siguientes expresiones son iguales o distintas?

a) $(m+n)^2 \quad y \quad (-m-n)^2$

b) $(m-n)^2 \quad y \quad (n-m)^2$

c) $(m+n)^2 \quad y \quad m^2 + n^2$

Ejercicio 182:
Complete el polinomio T(x) para que sea trinomio cuadrado perfecto:

a) $T(x) = 16x^4 + \ldots\ldots\ldots\ldots + 25 = (\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)^2$

b) $T(x) = 49x^6 - 70x^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots = (\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)^2$

c) $T(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots - 30x\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = (\ldots\ldots - 5)^2$

Ejercicio 183:
Complete S(x) para que sea cuatrinomio cubo perfecto:

$S(x) = ... - 12x^2 ..... = (4 - .....)^3$

Ejercicio 184:
Factorice hasta llegar a la mínima expresión:

a) $4axn - 6bnx - 10nxy + 2axn =$

b) $4axn - 6bnx - 10nxy + 2axn =$

c) $3x^3 + 6x^2 + 5x + 10 =$

d) $4x^4 + 1/16 - x^2 =$

e) $a^4x^6 - 49 =$

f) $-x^2 + 100 =$

g) $2x^3 - 3x^2 - 8x + 12 =$

h) $8x^3 - 4x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{27} =$

i) $312x^5 + 1 =$

j) $x^6 - 729 =$

Ejercicio 185:
Complete con el resultado:

a) $P(x) = x^3 - 7x + 6$ es equivalente a: .....

b) La expresión factorizada del polinomio $P(x) = 2x^2 + 3x - 5$ es: .....

c) ¿El polinomio $3x^3 + 6x^2 - 24x = (x^2 + 4x)(3x - 6)$ admite otra factorización?

d) Si los factores de un polinomio son (x -2y) (3x -5y) encuentre el polinomio. ¿Qué propiedad aplicó?

e) Si sabemos que un factor del polinomio x^4 - 7x - 3 es x - 2, encuentre el otro factor.

f) Si factorizamos un polinomio completo de segundo grado $P(x) = ax^2+bx+c$ ¿cuál será el signo entre los términos los factores binomiales en cada caso? Escriba el polinomio correspondiente:

a) $a > 0,\ b > 0$ y $c < 0$

b) $a > 0,\ b < 0$ y $c > 0$

c) $a > 0,\ b > 0$ y $c > 0$

d) $a > 0,\ b < 0$ y $c < 0$

Expresiones racionales fraccionarias

Dados dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ donde $Q(x) \neq 0$, la expresión $\frac{P(x)}{Q(x)}$ es una *expresión racional fraccionaria*.
Es decir, es un cociente de dos polinomios. También se las conoce como fracciones algebraicas.
Como por ejemplo:

a) $\frac{3x+y}{x-2}$ b) $\frac{a+b^2}{x+y^3}$ c) $\frac{2ab}{3b-a}$

Las fracciones algebraicas se comportan como las fracciones numéricas, es decir, podemos simplificarlas, sumarlas, restarlas, multiplicarlas y dividirlas.

Simplificación

Cuando se trabaja con fracciones algebraicas, la simplificación consiste en factorizar el numerador y denominador con el objeto de eliminar los factores comunes que existan en ellos.

Este procedimiento se repite hasta que los dos polinomios resulten primos entre sí. En este caso, decimos que la fracción está reducida a su más simple expresión y recibe el nombre de irreducible.

Antes de comenzar a simplificar hay que tener en cuenta que se deben excluir los valores de x que anulan el denominador de la expresión que se simplifica.

Ejemplos:

$$\frac{x+3}{x^2-9} \qquad para\ x \neq \pm 3$$

Si observa el numerador, no es posible factorizarlo, pero en cambio el denominador es una diferencia de cuadrados, luego:

$$x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$$

Reemplazando en la expresión fraccionaria y simplificando los factores iguales del numerador y denominador resulta:

$$\frac{(x+3)}{(x^2-9)}=\frac{(x+3)}{(x+3).(x-3)}=\frac{1}{(x-3)}$$

La expresión simplificada de $\frac{x+3}{x^2-9}$ para $x \neq \pm 3$ es: $\frac{1}{x-3}$

$$b)\ \frac{-4x+4}{x^2+x-2}$$

Observamos que:

En el numerador se repite el factor 4 en cada término, entonces la expresión factorizada es: - 4(x -1)

El denominador es un trinomio cuadrado, pero no es perfecto. Por lo que tendremos que calcular los ceros del polinomio. Es decir, hacemos:

$$x^2+x-2=0$$

Podemos calcular los posibles ceros, buscando los divisores del término independiente o bien resolviendo la ecuación de segundo grado.

Entonces, de los divisores hallados los que anulan al divisor son:
……..... Resultando entonces el denominador:

$$x^2+x-2=(x+2).(x-1)$$

Reemplazando las factorizaciones realizadas en el numerador y denominador:

$$\frac{-4x+4}{x^2+x-2}=\frac{-4(x-1)}{(x+2)(x-1)}$$

y simplificando factores iguales del numerador y denominador obtenemos:

$$\frac{-4x+4}{x^2+x-2}=\frac{-4\ (x-1)}{(x+2)\ (x-1)}=\frac{-4}{(x+2)}$$

Resultando la expresión simplificada de $\frac{-4x+4}{x^2+x-2}$ para $x \neq -2$ y $x \neq 1$, $\frac{-4}{(x+2)}$

Ejercicio 64:
Factoriza y simplifica las siguientes expresiones:

a) $\frac{4x^3-16x}{x^3-6x^2+12x-8}$ b) $\frac{3x^2-27}{x^4-81}$

Suma y resta

Para suma y/o restar expresiones fraccionarias es necesario que todas presenten el mismo denominador.

De no ser así, antes de operar deberá buscarse expresiones equivalentes con el mismo denominador. Este común denominador de los términos dados es conveniente que sea el mínimo común múltiplo de los denominadores dados.

Ejemplo:

Dada la siguiente expresión, calcularemos su suma algebraica :

$$\frac{x+2}{1-x^2}-\frac{1}{1-x}+\frac{1}{x+x^2} \quad con \;\; x \notin \{1,-1,0\}$$

Aplicamos el procedimiento:

1. Se calcula el mcm de sus denominadores al que llamaremos mínimo común denominador:

$$\left.\begin{array}{l} P(x)=(1-x)^2=(1-x)(1+x) \\ Q(x)=(x+x^2)=x(1+x) \end{array}\right\} \text{mcm}(P(x),Q(x))=(1+x)(1-x)x$$

2. Se divide el mínimo común múltiplo encontrado por cada uno de los denominadores y el resultado de cada cociente se multiplica por el numerador correspondiente:

$$\frac{(x+2)}{(1+x)(1-x)}-\frac{1}{1-x}+\frac{1}{x(1+x)}=\frac{x(x+2)-(1+x)x+(1-x)}{(1+x)(1-x)x}=$$

3. Se realizan las operaciones que han quedado indicadas en el numerador:

$$\frac{x(x+2)-(1+x)\;x+(1-x)}{(1+x)(1-x)\,x}=\frac{x^2+2\;x-x-x^2+1-x}{(1+x)(1-x)\,x}=$$

4. Luego se escribe el resultado de la operación que será la fracción algebraica que tiene como numerador la expresión obtenida en el paso (3) y como denominador el mínimo común múltiplo encontrado en el paso (1). Si es posible se factoriza el numerador para simplificarlo con factores del denominador, o se cancelan términos semejantes hasta que la fracción sea irreducible:

$$\boxed{\frac{x^2+2\;x-x-x^2+1-x}{(1+x)(1-x)\,x}=\frac{1}{(1-x)(1+x)\,x}}$$

Ejercicio 186:
Resuelva las operaciones indicadas:

a) $\dfrac{x+2}{4-x^2}-\dfrac{1}{x}-\dfrac{x^2}{2x+x^2}$

b) $\dfrac{y^2}{(y-x)^2}-\dfrac{y+x}{y-x}$

Multiplicación de fracciones algebraicas

El producto de dos o más expresiones fraccionarias es otra expresión fraccionaria cuyo numerador se obtiene de la multiplicación de los numeradores, y cuyo denominador resulta de multiplicar los denominadores

Para hacer más sencillo este cálculo es práctico llevar a cada una de las expresiones fraccionarias a su expresión irreducible mediante la factorización y simplificación para luego obtener el resultado.

Ejemplo:

$$\frac{(x^3+8)}{(x+2)}\cdot\frac{(x+1)}{(x^2-2x+4)}\,\frac{1}{(x-1)}=$$

$$\frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{(x+2)}\cdot\frac{(x+1)}{(x^2-2x+4)}\cdot\frac{1}{(x+1)}=$$

$$\frac{x+1}{x-1}$$

División

Resuelva la división siguiente, pero sin utilizar la calculadora.

$$\frac{10}{9}:\frac{5}{3}=$$

Si usted lo hizo correctamente, el cociente es 2/3 y para llegar al resultado debe haber multiplicado la primera fracción (dividendo), por el inverso multiplicativo de la segunda fracción (divisor). Luego debe haber simplificado y realizado la multiplicación.

Del mismo modo se realiza la división entre expresiones algebraicas fraccionarias.

La división entre expresiones fraccionarias es otra expresión hallada:
I. Factorizando las expresiones algebraicas dividendo y divisor;
II. Multiplicando al dividendo por el inverso de la expresión fraccionaria divisor
III. Simplificando (si fuera posible)
IV. Realizando la multiplicación indicada.

Analicemos el siguiente cálculo:

$$\frac{X+2}{2-X}:\frac{X^3+8}{X^2-4}$$

Para calcular el cociente, multiplicamos la fracción dividendo por la fracción recíproca del divisor:

$$\frac{X+2}{2-X}:\frac{X^3+8}{X^2-4}=\frac{X+2}{2-X}.\frac{X^2-4}{X^3+8}$$

Al observar el producto de las dos fracciones vemos que no es posible simplificar factores. Pero, al analizar la segunda fracción visualizamos que es posible factorizarlos ya que, el numerador es una diferencia de cuadrados y el denominador es una suma de potencias de igual grado:

Obtenemos la expresión factorizada:

$$\frac{X+2}{2-X}:\frac{X^3+8}{X^2-4}=\frac{(x+2)}{2-x}\cdot\frac{(x-2)(x+2)}{(x+2)(x^2-2x+4)}$$

Simplificando factores comunes:

$$\frac{X+2}{2-X}:\frac{X^3+8}{X^2-4}=\frac{1}{2-x}\cdot\frac{(x-2)(x+2)}{(x^2-2x+4)}$$

Al analizar la expresión obtenida, vemos los factores y , en el que uno es el opuesto del otro. Pero, al sacar factor común -1 en cualquiera de las dos expresiones resulta:

$$\frac{X+2}{2-X}:\frac{X^3+8}{X^2-4}=\frac{1}{-1(-2+x)}\cdot\frac{(x-2)(x+2)}{(x^2-2x+4)}$$

Y simplificando, obtenemos:

$$\frac{x+2}{2-x}:\frac{x^3+8}{x^2-4}=-\frac{(x+2)}{(x^2-2x+4)}$$

Ejercicio 66:
Factorice y simplifique las siguientes expresiones:

a) $\dfrac{x^2+2x+1}{x^3+1}$

b) $\dfrac{a^2m^2+2m^2xa+x^2m^2}{2am^2+2m^2x}$

Ejercicio 187:
Efectúe las siguientes operaciones:
Nota: debe aclarar que el factor por el cual se divide, es distinto de cero.

a) $\dfrac{x+5}{x^2-25}+\dfrac{x+2}{2x^2-6x-20}-\dfrac{21}{2x+2}$

b) $\dfrac{y^2}{(y-x)^2}-\dfrac{y+x}{y-x}$

c) $\dfrac{y^2}{yx-y}\cdot\dfrac{3x^2-3x}{y}$

d) $\dfrac{x^4-y^4}{x^3+y^3}:\dfrac{x^2+y^2}{(x-y)^2+xy}$

e) $\dfrac{a^2-6a+9}{(a+3)^2}:\dfrac{a^3-3a^2}{a^2-9}$

f) $\dfrac{1}{2x-2}+\dfrac{4x-3}{x^2-1}-\dfrac{x-1}{x^2-2x+1}$

g) $\dfrac{2x-4}{2x-10}+\dfrac{x^2+5x}{x^2+10x+25}-\dfrac{6x}{x^2-25}$

h) $\dfrac{3x^2+6x}{2x^3}\cdot\dfrac{x^2+8x+16}{x^4-16}\cdot\dfrac{2x^3-4x^2}{3x+12}$

i) $\dfrac{x^2-x-12}{x^4-64x}+\dfrac{x^2+3x+13}{x^3+4x^2+16x}$

Ejercicio 188:
A continuación encontrará enunciados que deberá leer con atención. Debajo de cada pregunta hay opciones de las cuales sólo una es la correcta. Marque con un círculo la respuesta correcta.

1) La expresión $\dfrac{4-x^2}{2x^2+2+x^3+x}\cdot\dfrac{x^2+1}{4-2x}$, factorizada y simplificada es igual a:

2-x 2+x 2 0,5 Ninguna

2) Al resolver y simplificar $\dfrac{1-3z^{-1}}{1-2z^{-1}-3z^{-2}}$ obtenemos:

$z\,(z-3)^{-1}$ $z\,(z+1)^{-1}$ $-z\,(z-3)^{-1}$ $(z-3)/z$ Ninguna

3) Al resolver y simplificar $\frac{y^2}{(y-x)^2} - \frac{y+x}{y-x}$ obtenemos:

$x^2 (y - x)^{-2}$ $\quad$ $- x^2 (y - x)^{-2}$ $\quad$ $- x (y - x)$ $\quad$ Ninguna

Módulo 6:
Sistemas de ecuaciones lineales

Ecuaciones lineales

Muchos problemas técnicos y científicos requieren la resolución de sistemas de ecuaciones lineales (SEL). Se trata, pues, de un tema fundamental para todas las disciplinas que utilizan las matemáticas de una manera u otra. En muchos problemas existe dependencia entre las diferentes magnitudes o variables que intervienen y a menudo se plantea en forma de ecuación lineal

Presentamos a continuación algunos ejemplos:

Ejemplo 1:
Un químico tiene dos soluciones del mismo ácido. Una tiene una concentración del 15% y la otra del 25%. ¿Cuántos cm3 de cada solución deberá utilizar para obtener 120 cm3 de una solución al 21%?

Ejemplo 2:
Un montón de monedas de 25 y 10 centavos tiene un valor total de $ 4,60. El número de monedas de 25 centavos excede en tres al de monedas de 10. ¿Cuántas monedas hay de cada clase?

Ejemplo 3:
(Extraído de la página de PRECOP – INTA) En esta página se estudian las pérdidas que se producen debidas a la manipulación y transporte del arroz.

Cuadro 1. Cantidad de viajes, promedio y desvío estándar de kg transportados por viaje y su humedad

Período	Nº de viajes	kg transportados (media/camión)	Desvío st.	Humedad (%)	Coef. Variación
1	30	29924,17	±611,83	25,6	8,7
2	22	29998,18	±971,22	22,4	10
3	24	29129,17	±1021,0	18,9	12

"Las pérdidas detectadas aumentan en más del 100% entre el primer período y el último medido. Posiblemente ello esté asociado…"

Este problema, como muchos otros en las industrias, se puede modelar, analizar y resolver mediante un sistema de ecuaciones lineales.

Busca y escribe la definición de ecuación lineal:
……
……
……..

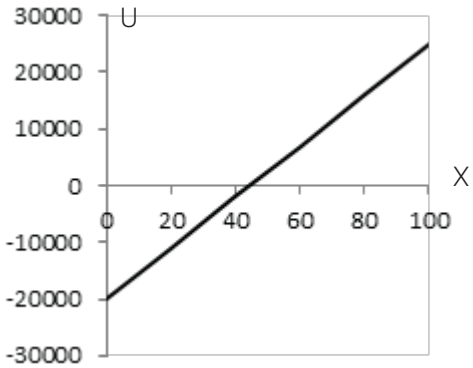
A veces los problemas con ecuaciones lineales tienen más de una incógnita, como en el problema de la pérdida de arroz, o en la siguiente situación:

La utilidad U que obtiene una compañía en la venta de x piezas de cierta mercadería está dada por .
¿Cuáles son las incógnitas?
……

Ecuación lineal con más de una incógnita

Ya sabe lo que es una ecuación lineal con una incógnita, pero como ya anticipamos anteriormente, en algunos problemas las ecuaciones lineales tienen más de una incógnita. Cuando una ecuación lineal tiene dos o más incógnitas, no hay una solución única, sino un conjunto de infinitos valores que la verifican.

En el ejemplo visto anteriormente de la utilidad U que obtiene una compañía en la venta de x piezas de cierta mercadería: U = 450x - 20.000, para cada valor que asignemos a "x", tendremos un valor resultante para "U".
Por ejemplo:



Si x=50; u=2.500
Si x=70; u=11.500
Si x=100; u=25.000
……..
……..

Así podríamos seguir dando valores a "x" y obteniendo los correspondientes para "U".

En general:

Una ecuación lineal con dos incógnitas x e y es de la forma: ax + by = c, donde a, b y c son constantes, a y b, no simultáneamente nulas.

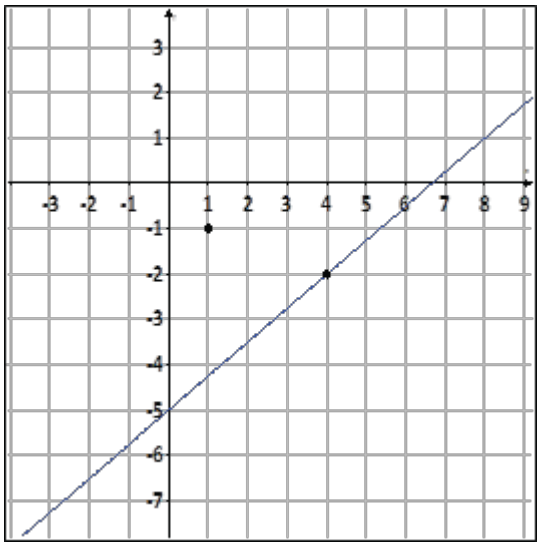
Por ejemplo: 3x – 4y = 20

Seguramente ya habrás encontrado una similitud con conceptos que hemos revisado en otros módulos; no estás errado, se trata de una función:"la función afín". Esta expresión coincide con la ecuación de una recta.
Pero,... ¿cuál es la solución de la ecuación?

La solución es el conjunto de los infinitos pares (x,y) que satisfacen la igualdad. ¿Cómo los encontramos?

Veamos primero el ejemplo: 3x - 4y =20 [1]

Ejemplo: para x = 4, y = -2.



Entonces el par es una solución de la ecuación. Podemos verificarlo si reemplazamos x por 4 e y por -2:

$$3 \cdot \mathbf{4} - 4 \cdot (-\mathbf{2}) = 12 + 8 = 20$$

Sí verifica. Pero también son soluciones los pares:

$$(8,1) \quad \left(-1,-\frac{23}{4}\right) \quad \left(1,-\frac{17}{4}\right)$$

es decir, todos los puntos que se encuentran sobre la recta. Así como el par (1,1) no es solución, ya que:

$$3 \cdot \mathbf{1} - 4 \cdot \mathbf{1} = 3 - 4 = -1 \neq 20$$

No verifica. Podrá ver en el gráfico que (1,1) no es un punto de la recta.

[1] Cualquier par de números, uno para x y otro para y, para el cual los dos miembros de la ecuación son iguales, es una solución de la ecuación.

Una ecuación de primer grado con dos incógnitas tiene infinitas soluciones.

Su gráfico cartesiano es una recta y las coordenadas de cualquier punto de la misma satisfacen a la ecuación.

En una tabla se puede "ver" cuáles son algunos de los valores de las incógnitas x e y que satisfacen la igualdad. Para no buscar a ciegas, es muy útil despejar y:

$$y = \frac{3}{4}x - 5$$

Ahora asignamos valores arbitrarios a la incógnita x y obtenemos los correspondientes para y.

La solución de la ecuación lineal la escribimos como el conjunto formado por todos los pares ordenados (x , y) que verifican la ecuación de la recta.

En símbolos:

$S = \{(x, y) |\ y = mx + b,\ x \in \tilde{N}\}$ o también $S = \{(x, mx + b) |\ \ x \in \tilde{N}\}$

En nuestro ejemplo: 3x - 4y = 20. Es decir: $y = \frac{3}{4}x - 5$

En símbolos:

$S = \left\{(x,y) \mid y = \frac{3}{4}x - 5,\ x \in \tilde{N}\right\}$ o también: $S = \left\{\left(x, \frac{3}{4}x - 5\right) \middle|\ x \in \tilde{N}\right\}$.

Le proponemos analizar la siguiente situación:

Un depósito tiene la forma de cono circular recto y se está llenando con mosto. La altura total es 4 m y el radio en la parte superior es de 1,5 m. Cuando el nivel de líquido está a una altura h, el radio correspondiente es r. ¿Cuál es la relación entre el radio r y la altura h?

El problema es más sencillo de lo que parece.

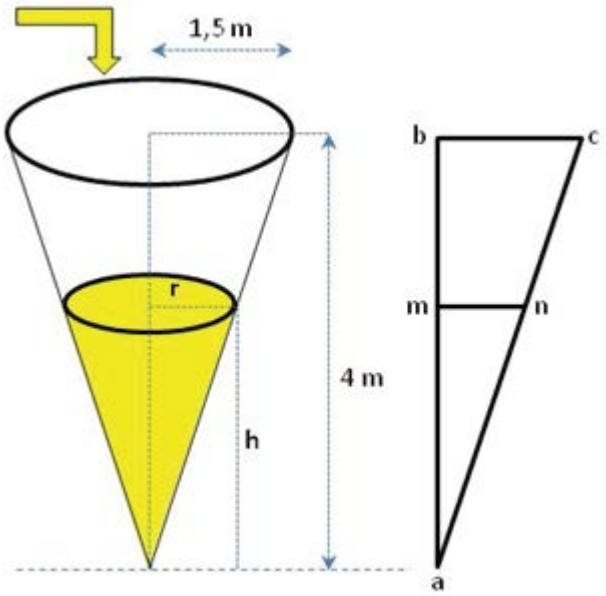
Puedes ver la resolución a continuación:

Identificamos datos: - Altura del cono: 4 m
- Radio de la base: 1,5 m

Identificamos incógnitas: Relación entre el radio r y la altura h

A medida que el mosto ingresa al depósito, aumenta la altura h y también el radio r. Para saber cómo están relacionados h y r, podemos utilizar el auxilio de la geometría con el tema de triángulos semejantes.

Observando la figura, podemos identificar dos triángulos semejantes:
$\widehat{abc}$ y $\widehat{amn}$



Con ellos se puede plantear la proporción mn es a bc como am es a ab:

$$\frac{mn}{bc} = \frac{am}{ab}$$

es decir:

$$\frac{r}{1,5} = \frac{h}{4} \rightarrow r = \frac{3}{8}h$$

Entonces la respuesta al problema es:
La relación entre el radio r y la altura h del nivel de mosto en el depósito es

$$r = \frac{3}{8}h$$

¿Es lineal esta ecuación?
Para visualizarla mejor, la podemos escribir en la forma ax + by + c = 0
Multiplicando ambos miembros por 8, obtenemos 8r - 3h = 0
Por lo tanto sí es una ecuación lineal.

El conjunto solución es:

$$S = \left\{ \left(h, \frac{3}{8}h \right) \mid h \in \varnothing \right\}.$$

Ejercicios:

Ejercicio 189:
Indique cuáles de las siguientes ecuaciones son lineales, colocando con "SÍ" o "NO".

a) $3x - 2y = 4x$ ( )

b) $5y - 4x + x^2 = 2$ ( )

c) $32 - 5x = 4y$ ( )

d) $4/x + 2y = 8$ ( )

e) $2 - 5y + 3x = 52 - 4x$ ( )

Ejercicio 190:
Encuentre el conjunto solución de cada ecuación lineal

a) $2x + 6y = 8$ b) $45x - 63y = 81$

Ejercicio 191:
Resuelva los siguientes problemas planteando una ecuación lineal que describa la situación y encontrando luego el conjunto solución:

a) "Matías y Lucas decidieron comprar una computadora que cuesta $2556, colaborando cada uno con lo que pueda. Matías puede poner dos terceras partes de lo que puede Lucas. ¿Con cuánto dinero colabora cada uno?"

b) Desde un molino de aceite se quiere enviar éste, en camiones cisterna, a un almacén. Los encargados del almacén solicitan que los camiones lleguen exactamente a las 5 de la tarde. Si los camiones viajaran a 80 km/h, llegarían con una hora de adelanto (a las 16hs). Pero si viajaran a 60 km/h, llegarían con una hora de retraso (a las 18hs). ¿A qué distancia está el molino de aceite del almacén?

c) Se quiere repartir $2000 entre tres personas, de manera que la primera reciba $100 más que la segunda, y ésta reciba $200 más que la tercera. ¿Cuánto debe dársele a cada una?

d) Un capital de $100.000 se ha colocado una parte a un interés anual del 8%, y la otra parte al 12%. La segunda produce anualmente $2000 más que la primera. Hallar las dos partes del capital.

Sistemas de ecuaciones lineales: definición y expresión simbólica

Analice la siguiente situación:

"En la parada de colectivo me encontré con Pablo y Diego, que volvían del club. Aproveché para preguntarle a Pablo cuál era su edad. Me contestó que la diferencia de edades entre él y Diego era de cuatro años, agregando que si se realizaba la suma de su edad y la mitad de la de Diego se obtendría 22 años. Con estos datos tuve que calcular la edad de Pablo y la de Diego."

En el problema aparecen dos cantidades desconocidas: la edad de Pablo y la de Diego, sujetas a varias condiciones. Expresamos esto en lenguaje algebraico:

-Llamemos p a la edad de Pablo y d a la de Diego.

-La diferencia entre las edades de Pablo y Diego es p - d.

-Por lo tanto p - d = 4.

- La suma de la edad de Pablo más la mitad de la de Diego es:

$p+\frac{d}{2}$ ó $p+\frac{1}{2}d$

-Por lo tanto: $p+\frac{d}{2}=22$

- p y d deben cumplir simultáneamente las dos ecuaciones:

$$\begin{cases} p-d=4 \\ p+\frac{d}{2}=22 \end{cases}$$

Como puede ver hemos obtenido un sistema de ecuaciones con dos incógnitas que son p y d.

Volviendo al problema de calcular las edades de Pablo y Diego.
¿Podría ser la edad de Pablo 20 años y la de Diego 16?

La diferencia: p - d = 20 - 16 = 4, pero $p+\frac{d}{2}=20+\frac{16}{2}\neq 22$

Por lo tanto estas no son las edades buscadas.
¿Podría ser la edad de Pablo 16 años y la de Diego 12?

La diferencia: p - d = 16 - 12 = 4 y también $p+\frac{d}{2}=16+\frac{12}{2}=22$

Por lo tanto son las edades buscadas: p = 16, d = 12

Recuerde que en este caso el par (16,22) se dice que es solución del sistema.

En el problema planteado anteriormente hemos hallado el valor de 2 incógnitas que llamamos p y d, es decir hemos resuelto un sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas.

Verá que este problema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, ha sido resuelto de manera intuitiva, pero generalmente esto no se puede hacer.

> Un sistema de ecuaciones lineales está formado por dos o más ecuaciones de primer grado, cada una de ellas con el mismo número de incógnitas, consideradas simultáneamente.

Una forma de expresar simbólicamente un sistema que tiene dos ecuaciones y dos incógnitas es:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

donde:
- x e y son las incógnitas.
- a_1, b_1, a_2, b_2 son números reales fijos y se llaman coeficientes.
- c_1, c_2 son también números reales fijos y se llaman términos independientes.

Resolver un sistema de ecuaciones, o sea hallar su solución, consiste en hallar todos los pares de valores de las incógnitas que satisfagan simultáneamente todas las ecuaciones, si es que esto fuera posible (ya que podría no tener solución).

El par ordenado que verifica las dos ecuaciones simultáneamente es la solución del sistema, para nuestro ejemplo de Matías, la solución es el par ordenado (16; 22) es decir p= 16 y d= 12, que para nuestro problema significa que Pablo tiene 16 años y Diego 12 años.

> El par $(x_0 ; y_0)$ es una solución del sistema: $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$
> si al reemplazar x por x_0 e y por y_0 ambas ecuaciones se transforman en identidades numéricas

Ejemplo:
Consideremos el sistema:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ x + 4y = -3 \end{cases}$$

- El par (1; -1) es solución del sistema pues satisface las dos ecuaciones simultáneamente:

$$2 \cdot \mathbf{1} - 3 \cdot (-\mathbf{1}) = 5$$
$$\mathbf{1} + 4 \cdot (-\mathbf{1}) = -3$$

• El par (4; 1) no es solución del sistema pues satisface la primera ecuación, pero no la segunda:

$2 \cdot \mathbf{4} - 3 \cdot \mathbf{1} = 5$

$\mathbf{4} + 4 \cdot \mathbf{1} = 8 \neq -3$

Dado que la solución de un sistema es el conjunto de todas sus soluciones, se anota como tal, o sea, como un conjunto.

• Si el sistema tiene una única solución será: $S = \{(x_0; y_0)\}$.

• Si el sistema carece de soluciones: $S = \{\ \}$ ó $S = \varnothing$.

• Si el sistema tiene infinitas soluciones, dado que es imposible enumerarlas una por una, se da una expresión general de dichas soluciones:

$S = \{(x, mx + b) \mid \ x \in \tilde{N}\}$

En el caso del problema de las edades, la solución se escribe:

$S = \{(16\ ;\ 12)\}$.

Estos sistemas, de 2 ecuaciones con 2 incógnitas, son los únicos que se estudiarán por el momento. Situaciones más complejas, que involucran más ecuaciones y más variables serán estudiadas en el curso de Introducción al Álgebra Lineal posteriormente.

Ejercicio 192:
Indique cuál de las siguientes expresiones constituye un sistema de ecuaciones lineales. Justifique su respuesta en cada cuadro.

a) $\begin{cases} 2x + \dfrac{4}{y} = -3 \\ -x - 2y = 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + 4y = -3 \\ -x - 2y = 5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + 4y^2 = -3 \\ -x - 2y = 5 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x + x.y = -3 \\ -x - 2y = 5 \end{cases}$

Ejercicio 193:
Para que la solución del sistema

$$\begin{cases} 3x - ky = 5 \\ -2kx - 3y = 4 \end{cases}$$

sea: $S = \{(1\ ;\ -2)\}$, ¿cuál debe ser el valor de k?

Ejercicio 194:
Escriba un sistema lineal de dos ecuaciones y dos incógnitas que tenga como soluciones x = 5; y = -2.

¿Cuál es el número de soluciones de un sistema?

Para responder esta pregunta te propongo que analicemos las siguientes situaciones:

Situación 1:
Hay sistemas cuyas ecuaciones dicen cosas contradictorias. Por ejemplo:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 15 \\ 2x + 3y = 91 \end{cases}$$

En este caso, nos dice por una parte que 2x + 3y = 15 y por otra que 2x + 3y = 91 y eso es absolutamente imposible porque cada solución de la primera ecuación no verifica la segunda.

Así se llega a la conclusión de que el sistema no tiene soluciones comunes a las dos ecuaciones y entonces se dice que el sistema es incompatible. El conjunto solución de este sistema es vacío.

Situación 2:

Hay sistemas cuyas ecuaciones dicen lo mismo o en donde una ecuación es proporcional a la otra, es decir, tenemos dos veces la misma ecuación. Veamos un ejemplo:

(1) $\begin{cases} 2x + 3y = 15 \\ 2x + 3y = 15 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 2x + 3y = 15 \\ 10x + 15y = 75 \end{cases}$

En (1) tenemos que las dos ecuaciones son idénticas y en (2) tenemos que la segunda ecuación es la misma, pero multiplicada por 5, entonces si dividimos ambos miembros de la ecuación por 5, obtendremos de nuevo dos ecuaciones idénticas.

Así cada solución de una de las ecuaciones también lo será de la otra, entonces el sistema tiene infinitas soluciones.

Situación 3:
En el caso de problemas de las edades, en donde las ecuaciones no se contradicen, ni una es múltiplo de la otra, el sistema tendrá sólo una solución.

Se dice que el sistema es compatible determinado, porque tiene solución y puede determinarse. Su conjunto solución es un conjunto unitario (con sólo un par ordenado de números reales).

Luego de haber analizado las situaciones anteriores podemos dar respuesta a la pregunta planteada anteriormente:

Al resolver un sistema de ecuaciones lineales, puede ocurrir que el sistema tenga:
Única solución - Sistema compatible ó consistente determinado.
Infinitas soluciones - Sistema compatible indeterminado
No tenga solución - Sistema incompatible ó inconsistente

Ejercitación:

Ejercicio 195:
Si el sistema $\begin{cases} 2x + 4my = 6 \\ -3x + 6y = -9 \end{cases}$ tiene infinitas soluciones, entonces m = …..

Ejercicio 196:
¿Para qué valores de m, el sistema: $\begin{cases} x - 2y = m \\ -2x + 4y = 3 \end{cases}$

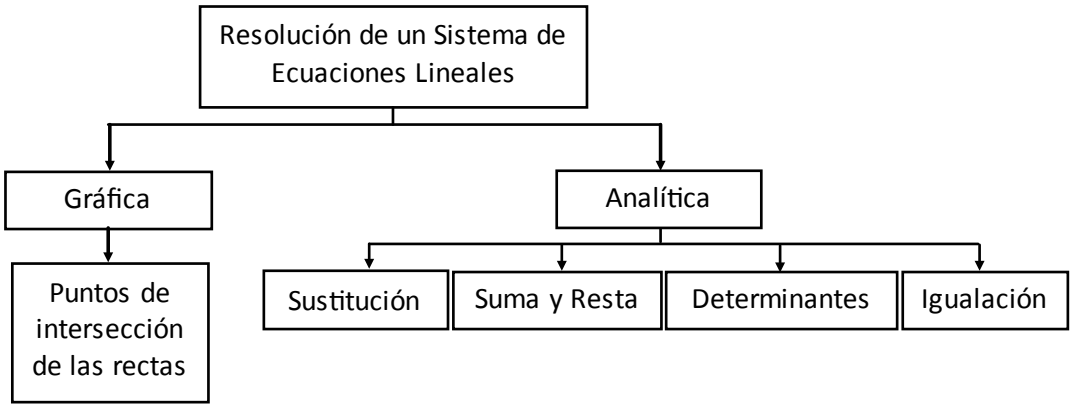
a) tiene solución?
b) no tiene solución?

Ejercicio 197:
¿Para qué valor de m el sistema $\begin{cases} x + 2my = 3 \\ -3x + 6y = -9 \end{cases}$

a) tiene infinitas soluciones?
b) tiene solución única?

Modos de resolución de sistemas

Un sistema de ecuaciones puede resolverse analítica o gráficamente.



1. Resolución de un sistema de ecuaciones lineales por el método gráfico.

Clasificación

Cuando tratamos el tema de ecuaciones lineales con dos incógnitas dijimos que las soluciones de ecuaciones lineales se representan mediante rectas y que para obtener las soluciones de la misma se despeja una de las incógnitas y se le dan valores a la otra. Si representamos las dos ecuaciones que forman un sistema con sus respectivas rectas, se observan tres casos diferentes. Puede suceder que:

a) Las rectas sean secantes, entonces el punto donde se cortan dichas rectas es la solución al sistema, que es compatible determinado.

b) Las rectas sean paralelas disjuntas, en ese caso las rectas no tienen puntos comunes; por lo tanto el sistema carece de solución. Es decir, es incompatible.

c) Las rectas sean paralelas coincidentes, entonces las rectas tienen todos sus puntos en común; luego el sistema tiene infinitas soluciones y se clasifica como compatible indeterminado.

Describamos los pasos que conviene dar para aplicar este método:

1º) Se despeja la variable "y" en cada una de las ecuaciones.
2º) Se grafican ambas ecuaciones en un mismo plano cartesiano.
3º) Se observa el punto de intersección de ambas gráficas.
4º) Se comprueba la solución, sustituyendo los valores del punto de intersección observado en las ecuaciones dadas.

Veamos ejemplos de cada caso:

Ejemplo A:
Resolver gráficamente el sistema:

$$\begin{cases} x - y = -3 & (1) \\ 3x + 2y = -4 & (2) \end{cases}$$

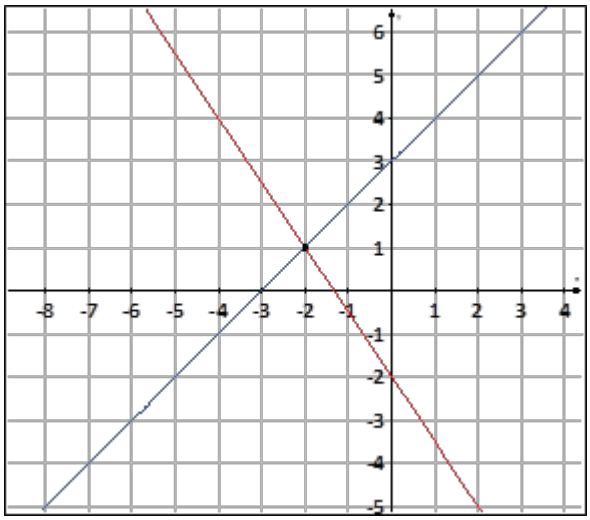
Despejamos "y" en (1)

$$x - y = -3$$
$$-y = -3 - x$$
$$y = 3 + x$$

Despejamos "y" en (2)

$$3x + 2y = -4$$
$$2y = -4 - 3x$$
$$y = \frac{-4 - 3x}{2}$$
$$y = -2 - \frac{3}{2}x$$

Graficamos ambas ecuaciones en un mismo sistema:



En el gráfico podemos notar que el punto de intersección es (-2 ; 1). Es un sistema compatible determinado o consistente.

Comprobamos los valores observados:

Ecuación (1)

$$x - y = -3$$
$$-2 - 1 = -3$$
$$-3 = -3$$

Ecuación (2)

$$3x + 2y = -4$$
$$3 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 = -4$$
$$-6 + 2 = -4$$
$$-4 = -4$$

Ejemplo B:
Resolver gráficamente el sistema:

$$\begin{cases} -x - 3y = -5 & (1) \\ 2x + 6y = 10 & (2) \end{cases}$$

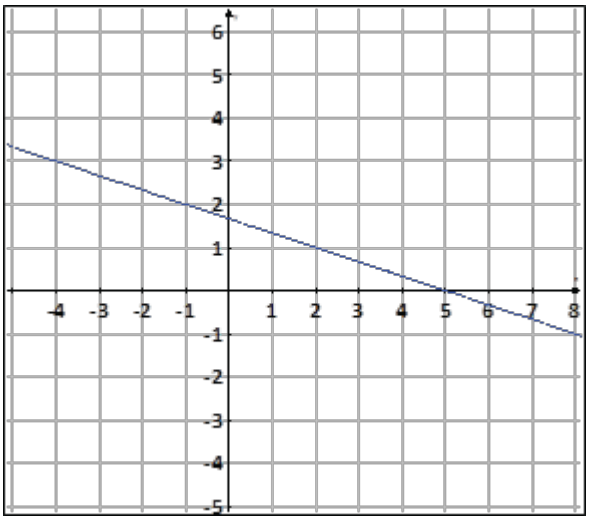
Despejamos "y" en (1)

$$-x - 3y = -5$$
$$-3y = -5 + x$$
$$y = \frac{-5 + x}{-3}$$
$$y = \frac{5}{3} - \frac{1}{3}x$$

Despejamos "y" en (2)

$$2x + 6y = 10$$
$$6y = 10 - 2x$$
$$y = \frac{10 - 2x}{6}$$
$$y = \frac{5}{3} - \frac{1}{3}x$$

Graficamos ambas ecuaciones en un mismo sistema:



Se nota que las dos rectas son paralelas coincidentes y por lo tanto se cortan en infinitos puntos. La solución del sistema, que es Compatible Indeterminado se expresa igual que la solución de una ecuación lineal con dos incógnitas:

$$S = \left\{ \left(x; -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3} \right) \middle| x \in \tilde{N} \right\}.$$

Ejemplo C:
Resolver gráficamente el sistema

$$\begin{cases} -x - 3y = -5 & (1) \\ 2x + 6y = 4 & (2) \end{cases}$$

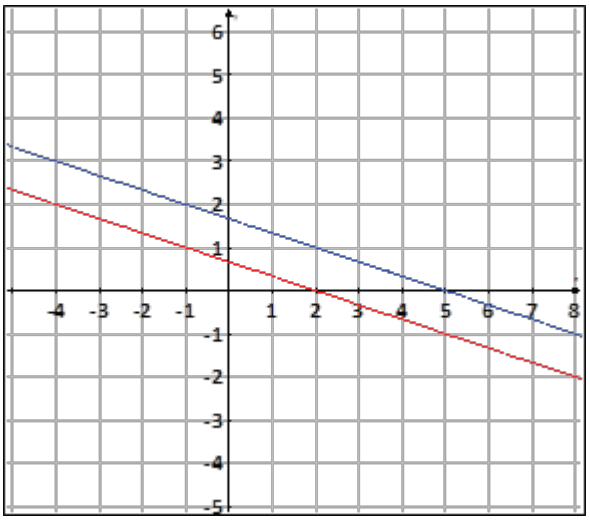
Despejamos "y" en (1)

$$-x - 3y = -5$$
$$-3y = -5 + x$$
$$y = \frac{-5 + x}{-3}$$
$$y = \frac{5}{3} - \frac{1}{3}x$$

Despejamos "y" en (2)

$$2x + 6y = 4$$
$$6y = 4 - 2x$$
$$y = \frac{4 - 2x}{6}$$
$$y = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}x$$

Graficamos ambas ecuaciones en un mismo sistema:



Claramente, aquí no hay puntos de intersección. Las rectas no comparten puntos y por lo tanto no existe solución o, lo que es equivalente, el conjunto solución es vacío, o sea el sistema es Incompatible.

$$S = \{\ \}$$

Aunque el método gráfico es un gran auxiliar para comprender los tres anteriores tipos de sistemas de ecuaciones de primer grado, no es sin embargo un método eficaz para obtener la solución, cuando ésta existe. En primer lugar, es excesivamente laborioso. En segundo lugar (y más importante), la exactitud del método depende de la habilidad del operador para construir las gráficas de las dos ecuaciones y para estimar las coordenadas del punto de intersección cuando éste es visible.

Recordando que la expresión general de un sistema de ecuaciones lineales es

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Observe ahora cómo son los coeficientes a_1, b_1, a_2, b_2, c_1, c_2 de los ejemplos anteriores.

- Si $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ las rectas se cortan en un punto (ejemplo A - Sistema Compatible determinado)

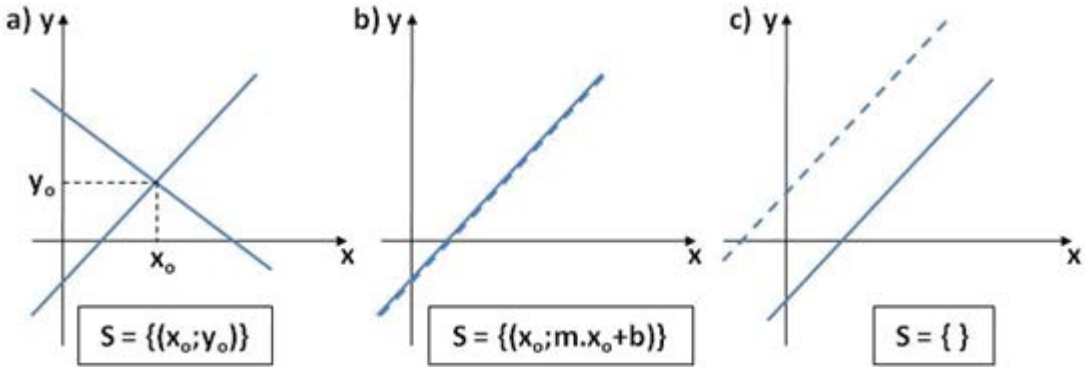
- Si $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ las rectas son paralelas coincidentes (ejemplo B - Sistema Compatible Indeterminado).

- Si $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ las rectas son paralelas disjuntas
(ejemplo C - Sistema Incompatible)

Conclusión:
Hay sólo tres casos posibles.

A continuación se da un resumen de los tipos de sistemas y la solución de cada uno:

Tipo de sistema	Tipo de solución	Representación Gráfica
Compatible determinado	Solución única	Rectas secantes
Compatible indeterminado	Infinitas soluciones	Rectas paralelas coincidentes
Incompatible	No tiene solución	Rectas paralelas disjuntas



Ejercicios:

Ejercicio 198:
Encuentre gráficamente la solución de los siguientes sistemas de ecuaciones lineales.

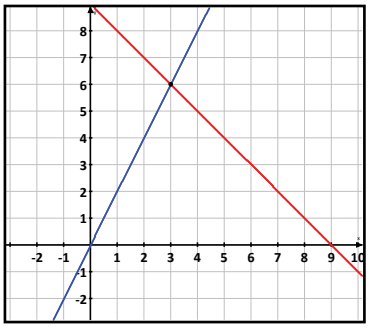
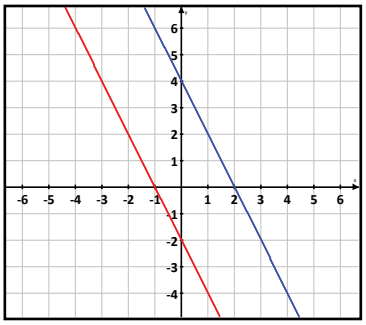
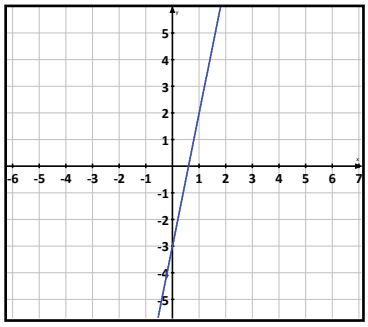
a) $\begin{cases} x + 3y = -5 \\ 2x + 3y = -1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 3y = -5 \\ 2x - 3y = -1 \end{cases}$

Ejercicio 199:
Representa gráficamente los siguientes sistemas. Responde luego las preguntas que te proponemos a continuación.

$\begin{cases} y = \frac{2}{3}x + 2 \\ -2x - 6 = -3y \end{cases}$ $\begin{cases} 3x - y = 9 \\ x - \frac{1}{3}y = 2 \end{cases}$

a) ¿Qué ocurre con las gráficas de cada recta? ¿Cómo son las pendientes?
b) Compara los coeficientes y término independiente de la segunda ecuación de cada sistema con los de la primera.
c) Relaciona cada gráfica que obtuviste, con la comparación que realizaste de los coeficientes.

Ejercicio 200:
Dado los siguientes gráficos encuentra las ecuaciones de cada una de las rectas y arma el sistema correspondiente a cada uno de ellos.

Ejercicio 201:
Escriba una ecuación para formar con la ecuación x - y = 1, un sistema que sea:

a) Compatible determinado
b) Incompatible
c) Compatible indeterminado

Ejercicio 202:
Las dos rectas que se obtienen al representar gráficamente las dos ecuaciones de un sistema se cortan en el punto (3; -2).
¿Puede ser 4x - 2y =15 una de las ecuaciones del sistema?

2. Métodos analíticos de resolución de sistemas.

Como los métodos gráficos no son tan confiables en su precisión, especialmente si los valores de las incógnitas no son números enteros es conveniente usar métodos analíticos.

Hay métodos analíticos que son muy fáciles de operar y permiten además obtener con absoluta exactitud la solución, cuando ésta existe.

Estudiaremos a continuación los cuatro (4) más conocidos: reducción por suma o resta, sustitución, igualación y determinantes.

Aunque no sea el más usado en el tipo de sistemas que resolveremos, el que representará más para lo que estudiarás posteriormente es el de reducción por suma o resta ya que la generalización de éste permite resolver problemas más complejos.

Antes de comenzar con los métodos analíticos, veremos un concepto que nos será muy útil a la hora de resolver un sistema de ecuaciones lineales:

Recordando que una solución de un sistema de ecuaciones lineales es aquel par (x_0,y_0) que reemplazado en el sistema verifica ambas ecuaciones simultáneamente.

Ahora, trabajamos con los siguientes sistemas, reemplazando a x por 1 e y por 2:

$$\begin{cases} 2x+6y=-10 \\ 2x+5y=-8 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+3y=-5 \\ 2x+5y=-8 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+3y=-5 \\ 0x+y=-2 \end{cases}$$

Se verifica que el par (1; -2) verifica las ecuaciones de los tres sistemas. Como además es la única solución que tienen los tres, concluimos que la solución S ={(1; -2)} es la misma para los tres casos.

Observe las ecuaciones del segundo sistema con respecto a las del primero y las del tercero con respecto al segundo.

¿Qué relación guardan entre sí? ¿Qué ventaja representa trabajar con uno u otro?

Para dar respuesta a estas preguntas, te será necesario leer lo siguiente:

> Se dice que dos sistemas de ecuaciones lineales son equivalentes cuando tienen las mismas soluciones, es decir, toda solución del primero lo es también del segundo y, recíprocamente.

Generalmente se pueden modificar las ecuaciones para obtener otras más sencillas, sin afectar la solución. En esto se basa la resolución por suma o resta.

Se puede obtener un sistema equivalente teniendo en cuenta los criterios de equivalencia:

Criterio 1:
Si se multiplican o dividen los dos miembros de una ecuación de un sistema por un número real distinto de cero, se obtiene otro sistema equivalente al inicial.

> Ejemplo: Los siguientes sistemas son equivalentes, ya que para pasar del primero (1) al segundo (2), multiplicamos la primera ecuación por 3, y la segunda ecuación por 2.
>
> (1) $\begin{cases} 2x+3y=-1 \\ 3x-4y=3 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 6x+9y=-3 \\ 6x-8y=6 \end{cases}$

Criterio 2:
Si a una ecuación de un sistema se le suma o resta otra ecuación del mismo, se obtiene otro sistema equivalente al inicial.

Los siguientes sistemas son equivalentes, puesto que para pasar del primero (1) al segundo (2), a la segunda ecuación le restamos la primera.

(1) $\begin{cases} 3x - 7y = -1 \\ 3x - 4y = 3 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 3x - 7y = -1 \\ 3y = 4 \end{cases}$

Criterio 3 (combinación de los anteriores):
Si a una ecuación de un sistema se le suma o resta otra ecuación del mismo, multiplicada por un número real distinto de cero, se obtiene otro sistema equivalente al dado.

Ejemplo: Los siguientes sistemas son equivalentes, puesto que para pasar del primero (1) al segundo (2), a la segunda ecuación le restamos la primera multiplicada por 3.

(1) $\begin{cases} x - y = -2 \\ 3x - 4y = 3 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x - y = -2 \\ -y = 9 \end{cases}$

Es obvio, además, que si en un sistema de ecuaciones lineales cambiamos el orden de las ecuaciones, el sistema obtenido es igual al anterior. El sistema tampoco cambia si en todas las ecuaciones del mismo, permutamos el orden de las incógnitas.

Ejercicio 203:
Indique el criterio utilizado en cada sistema planteado al inicio del tema teniendo en cuenta las ecuaciones del segundo sistema con respecto a las del primero y las del tercero con respecto al segundo.

Método de sumas y restas

Este método consiste en procurar que una de las incógnitas tenga el mismo coeficiente en las dos ecuaciones para que, al restarlas miembro a miembro, se elimine dicha incógnita, dando lugar a una ecuación con sólo la otra incógnita. Se resuelve dicha ecuación y el valor de la incógnita se sustituye en una de las ecuaciones primitivas, y con ello se puede obtener el valor de la otra incógnita.

Ejemplo: Resuelve por este método el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 2x - 2y = 10 \ \ (E_1) \\ 4x + 3y = 6 \ \ (E_2) \end{cases}$$

¿Por qué número hay que multiplicar la "x" de la primera ecuación (E1) para que sea igual al coeficiente de "x" de la segunda ecuación (E2)?

Multiplicamos E1 por… 2: $\mathbf{2} \cdot 2x - \mathbf{2} \cdot 2y = \mathbf{2} \cdot 10 \rightarrow 4x - 4y = 20$

No modificamos la E2: $\rightarrow \quad 4x + 3y = 6$
Restamos miembro a miembro: $\rightarrow \quad 0x - 7y = 14 \rightarrow y = -2$

Repetimos el proceso para igualar los coeficientes de "y" en ambas ecuaciones. En este caso conviene multiplicar la E1 por 3 y la E2 por 2. Luego sumar.

Multiplicamos E_1 por… 3: $\mathbf{3} \cdot 2x - \mathbf{3} \cdot 2y = \mathbf{3} \cdot 10 \rightarrow 6x - 6y = 30$

$+$

Multiplicamos E_2 por…2: $\mathbf{2} \cdot 4x + \mathbf{2} \cdot 3y = \mathbf{2} \cdot 6 \rightarrow 8x + 6y = 12$

Sumamos miembro a miembro: $\rightarrow 14x - 0y = 42 \quad \rightarrow x = 3$

Y la solución es: $S = \{(3;-2)\}$

Verificamos:

Recuerde que debemos reemplazar el valor encontrado de las incógnitas en cada ecuación.

Reemplazamos en la E_1:

$2x - 2y = 10$
$2.\mathbf{3} - 2.(\mathbf{-2}) = 10$
$6 + 4 = 10$
$10 = 10$

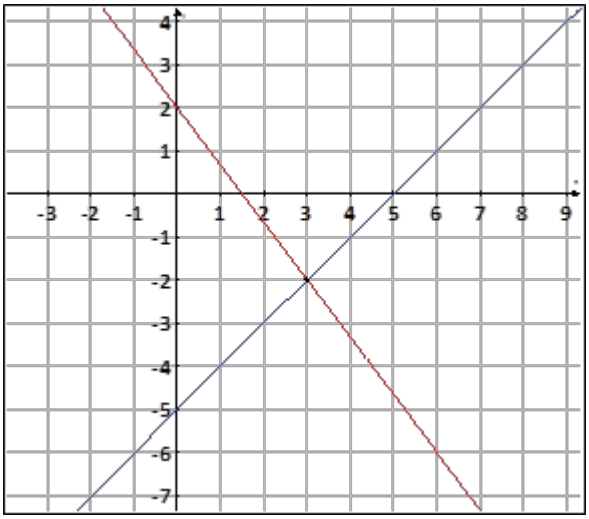
Si verifica

Reemplazamos en la E_2:

$4x + 3y = 6$
$4.\mathbf{3} + 3.(\mathbf{-2}) = 6$
$12 - 6 = 6$
$6 = 6$

Si verifica

Como se verifican ambas ecuaciones, el conjunto planteado sí es solución.
El sistema está formado por dos rectas que se intersecan en el punto (3;-2)



El secreto de este método es encontrar los números "adecuados" para multiplicar. Esto depende de distintos factores. En el ejemplo anterior si observas los coeficientes verás que:

• En la primera parte (donde eliminamos x) multiplicamos E_1 por E_2; piense por qué, mirando los coeficientes de cada una.

• En la segunda parte (donde eliminamos y) multiplicamos las ecuaciones por los coeficientes "cruzados". Es decir, la E_1 por el coeficiente de y en la E_2 y viceversa, la E_2 por el coeficiente de y en la E_1.

Ejercicios:

Ejercicio 204:
Resuelva por este método el ejemplo anterior, de los sistemas equivalentes:

$$\begin{cases} x + 3y = -5 \\ 2x + 5y = -8 \end{cases}$$

Ayuda: ¿Por qué número hay que multiplicar la "x" de la primera ecuación para que sea igual al coeficiente de "x" de la segunda ecuación?

Ejercicio 205:
Resuelva por este método los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} 5x - 10y = 25 \\ 8x + 2y = 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x + 3y = 21 \\ 7x + 8y = 37 \end{cases}$

Método de sustitución

Este método de resolución consiste en despejar una incógnita en una de las ecuaciones y sustituir en la otra.

Los pasos que conviene dar para aplicar este método son:

1º) Despejar una incógnita en una de las ecuaciones.

2º) Sustituir la expresión de esta incógnita en la otra ecuación, obteniendo una ecuación con una sola incógnita.

3º) Resolver esta ecuación.

4º) Sustituir el valor obtenido como solución en el paso (3°) en la ecuación despejada en el paso (1°) para encontrar el valor de la otra variable del sistema.

Ejemplo:

Resuelva, aplicando los pasos, el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 4x + y = -3 & (E_1) \\ 2x - 3y = -19 & (E_2) \end{cases}$$

1º) Despejamos y de la E_1:

$$4x + y = -3$$
$$y = -4x - 3$$

2º) Reemplazamos la expresión obtenida en E_2:

$$2x - 3y = -19$$
$$2x - 3.(-4x - 3) = -19$$

3º) Resolvemos la ecuación:

$$2x - 3.(-4x - 3) = -19$$
$$2x + 12x + 9 = -19$$
$$14x = -19 - 9$$
$$14x = -28$$
$$x = -28:14$$
$$x = -2$$

4º) Sustituimos el valor de x obtenido en la expresión obtenida en el 1º paso:

$$y = -4x - 3$$
$$y = -4.(-2) - 3$$
$$y = 8 - 3$$
$$y = 5$$

5º) Y la solución es: $S = \{(-2, 5)\}$

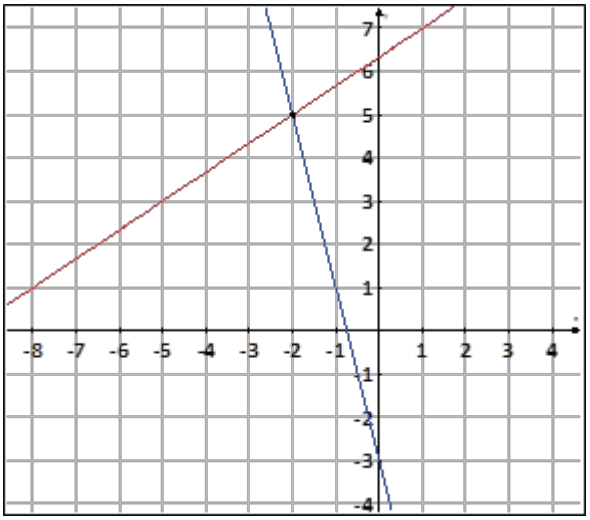
Verificamos:

Reemplazamos en la E_1:
4x + y = -3
4.(-2) + 5 = -3
-8 + 5 = -3
-3 = -3 Sí verifica

Reemplazamos en la E_2:
2x - 3y = -19
2.(-2) - 3.5 = -19
-4 - 15 = -19
-19 = -19 Sí verifica

Como se verifican ambas ecuaciones, el conjunto planteado sí es solución.

El sistema está formado por dos rectas que se intersecan en el punto (-2;5).



¿Qué pasa cuando las rectas son superpuestas o coincidentes?

Veamos el siguiente ejemplo:

Ejemplo:
Resuelva por este método el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 4x + y = -3 & (E_1) \\ -8x - 2y = 6 & (E_2) \end{cases}$$

Podemos ver que el sistema es Compatible indeterminado y por lo tanto tiene infinitas soluciones. Recuerde:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \quad \rightarrow \quad \frac{4}{-8} = \frac{1}{-2} = \frac{-3}{6}$$

Aplicamos el método para hallar su solución:
1º) Despejamos y de la E_1:

$$4x + y = -3$$
$$y = -4x - 3$$

2º) Reemplazamos la expresión obtenida en E_2:

$$-8x - 2y = 6$$
$$-8x - 2.(-4x - 3) = 6$$

3º) Resolvemos la ecuación:

$$-8x - 2.(-4x - 3) = 6$$
$$-8x + 8x + 6 = 6$$
$$-8x + 8x = 6 - 6$$
$$-8x + 8x = 0$$
$$8x = 8x$$

Hemos obtenido una identidad, que es válida para cualquier valor que tome x.
Por ejemplo:

Para x = 4 32 = 32
Para x = -6 -48 = -48

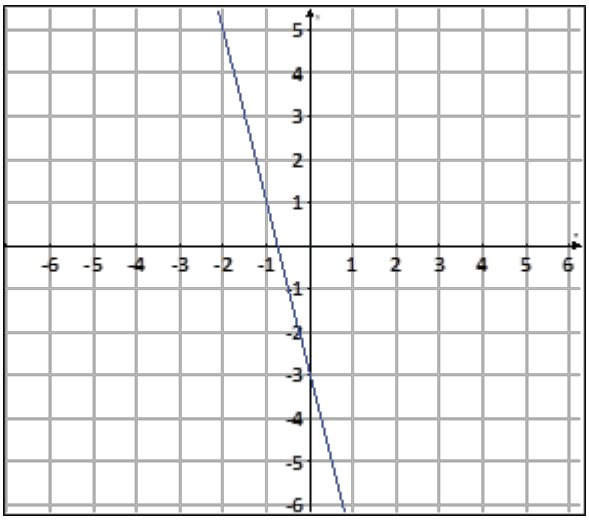
Y así podemos continuar indefinidamente, ya que x puede tomar infinitos valores, que dan lugar a las infinitas soluciones del sistema de ecuaciones lineales.
Es lo mismo que sucede con una ecuación con dos incógnitas, ya que la solución está formada por todos los puntos de la recta que se obtiene despejando y de cualquiera de las ecuaciones, en este ejemplo:

$$y = -4x - 3$$

Entonces el conjunto solución es:

$$S = \{(x; -4x - 3) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

El sistema está formado por dos rectas paralelas coincidentes.



¿Y si las rectas no se tocan?

Ejemplo:
Resuelve por este método el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 4x + y = -3 & (E_1) \\ -8x - 2y = -5 & (E_2) \end{cases}$$

que es Incompatible y por lo tanto no tiene solución. Recuerde:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2} \quad \rightarrow \quad \frac{4}{-8} = \frac{1}{-2} \neq \frac{-3}{-5}$$

Obtenemos el conjunto solución:

1º) Despejamos y de la E_1:

$$4x + y = -3$$
$$y = -4x - 3$$

2º) Reemplazamos la expresión obtenida en E_2:

$$-8x - 2y = 6$$
$$-8x - 2.(-4x - 3) = -5$$

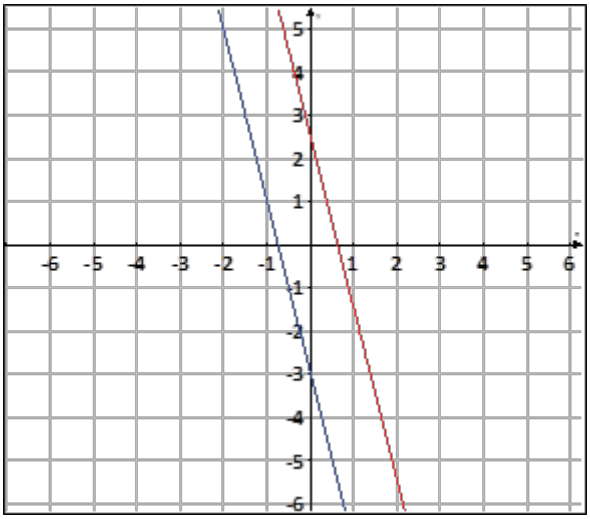
3º) Resolvemos la ecuación:

$$-8x - 2.(-4x - 3) = -5$$
$$-8x + 8x + 6 = -5$$
$$0x + 6 = -5$$
$$¿6 = -5?$$

Obviamente no puede ser, por lo que el sistema no tiene solución
Entonces la solución es vacía:

$$S = \{\ \}$$

El sistema está formado por dos rectas paralelas disjuntas.



Ejercicios:

Ejercicio 206:
¿Qué tipo de solución tiene el sistema?

$$\begin{cases} 2x - y = -1 \\ 4x - 2y = 3 \end{cases}$$

Ejercicio 207:
Resuelva por este método los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} x + 4y = -5 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -x - 4y = -5 \\ 2x + 8y = -10 \end{cases}$

Método de igualación

El método de igualación consiste en despejar la misma incógnita en las dos ecuaciones e igualar sus expresiones, obteniendo así una ecuación con una incógnita. Una vez resuelta se obtiene fácilmente el valor de la otra incógnita.

Describimos los pasos que conviene dar para aplicar este método:

1º) Despejar la misma incógnita en ambas ecuaciones.

2º) Igualar las expresiones obtenidas en (1°), lo cual da lugar a una ecuación con sólo una incógnita.

3º) Resolver la ecuación obtenida en (2°).

4º) Sustituir el valor obtenido en (3°) en cualquiera de las dos expresiones obtenidas en (1°).

Ejemplo:
Resuelva por este método el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 4x - 3y = -2 & (E_1) \\ 5x + 2y = 9 & (E_2) \end{cases}$$

1º) Despejamos y ambas ecuaciones:

E1: $4x - 3y = -2$

$-3y = -4x - 2$

$y = \dfrac{-4x - 2}{-3}$

E2: $5x + 2y = 9$

$2y = -5x + 9$

$y = \dfrac{-5x + 9}{2}$

2º) Igualamos ambas expresiones:

$$\frac{-4x-2}{-3}=\frac{-5x+9}{2}$$

3º) Resolvemos la ecuación:

$$\frac{-4x-2}{-3}=\frac{-5x+9}{2}$$

$$2.(-4x-2)=-3\cdot(-5x+9)$$

$$-8x-4=15x-27$$

$$-8x-15x=-27+4$$

$$-23x=-23$$

$$x=-23:(-23)$$

$$x=1$$

4º) Sustituimos el valor de x obtenido en cualquiera de las expresión obtenida en el 1º paso:

$$y=\frac{-4x-2}{-3}$$

$$y=\frac{-4.1-2}{-3}$$

$$y=2$$

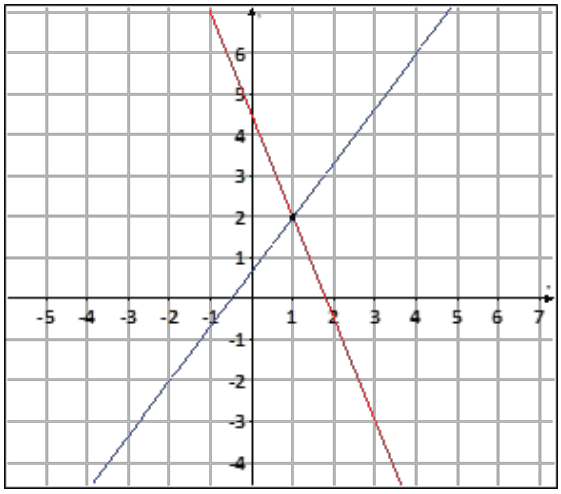
5º) Y la solución es: $S=\{(1,2)\}$

Verificamos:

Reemplazamos en la E_1:
4x - 3y = -2
4.1 – 3.2 = -2
4 - 6 = -2
-2 = -2 Sí verifica

Reemplazamos en la E_2:
5x + 2y = 9
5.1 + 2.2 = 9
5 + 4 = 9
9 = 9 Sí verifica

Como se verifican ambas ecuaciones, el conjunto planteado sí es solución. El sistema está formado por dos rectas secantes que se intersecan en el punto (1;2)



Ejercitación:

Ejercicio 208:
Resuelve por este método los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} -4x + y = 20 \\ 6x - 9y = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -3x - 4y = 31 \\ 5x - 9y = 11 \end{cases}$

Método de determinantes

Para poder aplicar este método es buena idea comenzar con una explicación sobre qué es un determinante.

Un determinante es un número obtenido de un arreglo de números ordenados en "n" filas y "n" columnas.

El modo de obtener este número, el determinante , cuando se tienen cuatro números reales, a, b, c y d, es el siguiente:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a.d\text{-}b.c$$

Es decir, multiplicamos en forma cruzada y restamos los productos. Es importante que se respete el orden de los números.

Ejemplo:
¿Cuánto vale el siguiente determinante?

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 6 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = 3.1 - (-2).6 = 3 + 12 = 15$$

O sea, primero se multiplican los números que quedan en la diagonal de izquierda arriba a derecha abajo (llamada diagonal principal); y a este resultado se le resta el producto de los números en la diagonal de derecha arriba a izquierda abajo.

Para hallar la solución de un sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

usando determinantes, se calcula el determinante del sistema formado con los coeficientes de las incógnitas, estando ordenadas por columnas:

La 1ª columna para x, la 2ª columna para y (si se elige al revés, este orden debe respetarse hasta el final).

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 \cdot b_2 - b_1 \cdot a_2$$

Este determinante debe ser distinto de cero: $\Delta \neq 0$

Si este determinante es distinto de cero, el sistema es compatible determinado y por lo tanto tiene solución única.

Luego se obtiene un determinante asociado a cada incógnita, reemplazando la columna correspondiente a esa incógnita, por los términos independientes:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1 \cdot b_2 - b_1 \cdot c_2 \qquad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1 \cdot c_2 - c_1 \cdot a_2$$

Entonces:

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{c_1.b_2 - b_1.c_2}{a_1.b_2 - b_1.a_2} \qquad y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{a_1.c_2 - c_1.a_2}{a_1.b_2 - b_1.a_2}$$

Cada incógnita es igual al cociente entre su determinante y el determinante del sistema.

Veamos un ejemplo con todos sus pasos.

Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ 6x + y = 13 \end{cases}$$

Halle primero el determinante del sistema, formado por los coeficientes de las incógnitas del sistema (considerados en forma ordenada):

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = 3.1 - (-2).6 = 3 + 12 = 15 \neq 0$$

el sistema de ecuaciones lineales es compatible determinado, o sea, tiene solución única.

Ahora calculamos los determinantes de las incógnitas reemplazando la columna de las incógnitas por la de los términos independientes:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 13 & 1 \end{vmatrix} = 4.1 - (-2).13 = 30 \quad \rightarrow \quad x = \frac{30}{15} \quad \Rightarrow \; x = 2$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 13 \end{vmatrix} = 3.13 - 4.6 = 15 \quad \rightarrow \quad y = \frac{15}{15} \quad \Rightarrow y = 1$$

Observe el procedimiento:
Se reemplaza la columna de las incógnitas por los términos independientes

La solución es S = {(2;1)}

Verificamos:

Reemplazamos en la E_1:
3x - 2y = 4
3.2 – 2.1 = 4
6 - 2 = 4
4 = 4 Sí verifica

Reemplazamos en la E_2:
6x + y = 13
6.2 + 1 = 13
12 + 1 = 13
13 = 13 Sí verifica

¿Qué ocurriría si el determinante del sistema fuera cero?

Este caso lo verá en la facultad. No lo trabajaremos en este curso., aunque podemos anticiparle que se deberá seguir analizando para ver si el sistema en cuestión es compatible indeterminado o inconsistente. En ambos casos el determinante de los dos sistemas se anula.

Ejercitación:

Ejercicio 209:
Resuelve por este método los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} 2x + 5y = 4 \\ x + 4y = 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - 6 = 2y \\ x = -y - 1 \end{cases}$

3. Aplicación a la Resolución de ejercicios y problemas

Como observamos en el inicio de éste módulo, el planteo y resolución de sistemas de ecuaciones nace, a menudo, del planteo y solución de problemas originados en hechos de la vida cotidiana.

Un sistema de ecuaciones puede expresarse también en lenguaje coloquial (verbal) y el primer paso a seguir para encontrar la solución es armar el sistema en lenguaje simbólico mediante fórmulas (ecuaciones) que representen la situación dada y relacionen los datos con las incógnitas.

En general la resolución de problemas es una tarea que requiere dedicación, tiempo y práctica. Trataremos de ayudarlo.

Nuestro objetivo es que adquiera en su trabajo personal la más amplia experiencia posible. Para resolver problemas mediante el planteamiento de un sistema de ecuaciones lineales, le proponemos seguir algunos pasos:

• Lea atentamente el problema, comprendiendo su enunciado y distinguiendo datos e incógnitas.

• Busque las relaciones que existen entre los datos y las incógnitas, convirtiéndolas en ecuaciones con coeficientes, constantes e incógnitas.

• Analice el tipo de sistema que se obtiene.

• Elija un método de resolución (analítico y/o gráfico) y aplíquelo.

• Analice si las soluciones obtenidas son pertinentes en el contexto del problema.

• Verifique todo el proceso y las soluciones en las ecuaciones planteadas.

Ejemplo:
María y su hija Sara tienen en la actualidad 56 años entre las dos. Si dentro de 18 años Sara tendrá 5 años más que la mitad de la edad de su madre, ¿qué edad tiene actualmente cada una?

Resolución:
• Una vez leído detenidamente el enunciado del problema y entendido éste, hay que tener claro qué es lo que se pretende averiguar y cómo vamos a llamar a estas incógnitas. Está claro que lo que se quiere dilucidar es qué edad tiene actualmente cada una.

• Identificamos incógnitas: $\begin{cases} x: \text{edad de María} \\ y: \text{edad de Sara} \end{cases}$

• Efectuamos ahora el planteamiento del problema, atendiendo a las condiciones que nos propone el enunciado y a cómo hemos nombrado las incógnitas, tendremos las siguientes ecuaciones:

La suma de las edades es 56 → $x + y = 56$ (Ecuación 1)

Dentro de 18 años tendrán: - María: $x + 18$
- Sara: $y + 18$

La mitad de la edad de su madre: $\frac{x+18}{2}$

Entonces la edad de Sara será: $y + 18 = 5 + \frac{x+18}{2}$ (Ecuación 2)

• El sistema es:

$$\begin{cases} x + y = 56 \\ y + 18 = 5 + \frac{x+18}{2} \end{cases}$$

• Ya tenemos el sistema planteado, sólo resta resolverlo. Para ello, podemos utilizar cualquiera de los métodos vistos anteriormente. Si aplicamos, por ejemplo, el método de sustitución tendremos:

1º) Despejamos y de la E_1:

$$x + y = 56$$
$$y = -x + 56$$

2º) Reemplazamos la expresión obtenida en E_2:

$$y + 18 = 5 + \frac{x + 18}{2}$$
$$(-x + 56) + 18 = 5 + \frac{x + 18}{2}$$

3º) Resolvemos la ecuación:

$$(-x + 56) + 18 = 5 + \frac{x + 18}{2}$$
$$-x + 74 - 5 = \frac{x + 18}{2}$$
$$2.(-x + 69) = x + 18$$
$$-2x + 138 = x + 18$$
$$-2x - x = 18 - 138$$
$$-3x = -120 \quad \text{entonces} \quad x = -120:(-3).$$
$$\text{Esto es:} \quad x = 40$$

4º) Sustituimos el valor de x obtenido en la expresión obtenida en el 1º paso:

$$y = -x + 56$$
$$y = -40 + 56 \quad \text{o sea,} \quad y = 16$$

5º) Y la solución es: S = {(40;16)}

Una vez hallada la solución del sistema, la traducimos a las condiciones del problema, es decir, tal y como habíamos nombrado las incógnitas, María tiene actualmente 40 años y Sara 16 años.

• Podemos pasar a la cuarta fase que consiste en comprobar si la solución es correcta. Si María tiene 40 años y Sara 16 años, entonces en total suman 56 años. Dentro de 18 años María tendrá 58 años y Sara 34 años, la cual es la mitad de la edad que tendría María (29 años) más 5 años.

Vemos que se cumplen las condiciones del problema por lo tanto la solución hallada es correcta y válida.

Le proponemos ahora un ejemplo para aplicar estos pasos:

Problema del piso: "El perímetro de un piso rectangular es de 90m. Determine las dimensiones del piso si la longitud es el doble del ancho".

Resolución:

Para armar el sistema de ecuaciones en lenguaje simbólico que represente al enunciado, lo primero que tendremos que realizar es identificar las incógnitas. En este caso ¿cuáles y cuántas son?

Asigne una letra distinta a cada una de ellas. Puede usar las que quieras, por ejemplo: L y A

L: medida del largo del piso
A: medida del ancho del piso

Siempre ayuda tener un esquema:

Lea atentamente la primera parte del enunciado del problema:
"El perímetro de un piso rectangular es de 90m".
Escriba la primera ecuación ……..

Ahora vamos por la segunda ecuación. Lea la segunda parte del enunciado.
"Determine las dimensiones del piso si la longitud es el doble del ancho"

En esta parte del enunciado además de indicar lo que se busca da un dato adicional: "la longitud es el doble del ancho".

Exprese ahora en lenguaje simbólico esta expresión verbal
……

¡Ya está! Tiene armada la segunda ecuación que forma el sistema de ecuaciones.

Abarcando ambas ecuaciones con una llave indicamos que se quieren buscar las soluciones comunes a ambas ecuaciones:
……..

Resuelva por alguno de los métodos vistos.
(Respuesta: S = {(30; 15)})

Ejercitación:

Ejercicio 210:
¿Recuerda el problema que resolvimos intuitivamente al inicio del módulo? Como a esta altura ya ha aprendido los distintos métodos para resolver sistemas de ecuaciones lineales, determine las edades de Pablo y Diego haciendo uso de alguno de los métodos analíticos y el método gráfico.

Ejercicio 211:
En la esquina me encontré con Juanchi y Nacho, que volvían de entrenar en el Club. Al preguntarle a Juanchi cuál era su edad me contestó que la diferencia de edades entre él y Nacho era de siete años, agregando que si se realizaba la suma de su edad y la mitad de la de Nacho se obtendría, curiosamente, 7 años. Mientras tanto Nacho se reía, no sé si de puro nabo que es o porque calculó las edades más rápido que yo...

Ejercicio 212:
Un inversionista compra acciones y bonos por 18000 pesos y los vende por 18360 pesos. Si gana el 10% en la venta de los bonos y pierde el 8% en la venta de las acciones. ¿Cuánto invirtió en cada uno?

Ejercicio 213:
Un químico tiene dos soluciones del mismo ácido. Una tiene una concentración del 15% y la otra del 25%. ¿Cuántos cm3 de cada solución deberá utilizar para obtener 120 cm3 de una solución al 21%?

Ejercicio 214:
El dueño de una fábrica de aceite de oliva dispone de dos calidades de ese producto, uno de $13 y otro de $21 el litro. ¿Cuánto necesita de cada clase de aceite si quiere obtener 50 litros de mezcla para vender a $17 el litro?

Ejercicio 215:
Para construir las paredes del obrador de una construcción se dispone de chapas para un perímetro de 20 m. El obrador es de forma rectangular. Si en el proyecto inicial se disminuye el largo en 1 m y se aumenta el ancho también en 1 m, manteniendo el perímetro, la superficie cubierta aumenta en 3 m2. ¿Cuáles eran las dimensiones iniciales del obrador y cuáles son las nuevas?

Ejercicio 216:
En una sección de una mueblería se fabrican armazones para biblioteca con perfiles de hierro en L. Uno de los tipos de armazón lleva 8 perfiles y el otro 10. Hay un pedido de 50 armazones y se tienen 74 hierros en L. Si de cada hierro se pueden obtener 6 perfiles, ¿cuántas armazones de cada clase se deben construir para no desperdiciar hierro?

Ejercicio 217:
La relación entre la temperatura medida en °Fahrenheit y en º Celsius es: °F = 9/5 ºC + 32. ¿Será un día caluroso o frío el día en que la temperatura indicada en un termómetro Fahrenheit sea tres veces la indicada en uno centígrado?

Ejercicio 218:
Un fabricante de lámparas ofrece un beneficio de $0,60 por cada pieza que sale de su taller a la venta, pero sufre una pérdida de $0,80 por cada pieza defectuosa que debe retirar. En una jornada de trabajo ha fabricado 2100 lámparas, obteniendo una ganancia de $968,80 ¿Cuántas lámparas buenas y cuántas defectuosas se fabricaron ese día?

Ejercicio 219:
Dos líquidos de densidades 0,7 kg./l y 1,3 kg./l se mezclan obteniéndose un líquido de densidad 0,9 kg./l. Halla la cantidad de líquido que hay que tomar de cada clase para obtener una mezcla de 30 litros.

Ejercicio 220:
Se quiere obtener 90 kg de café a 850 $/kg mezclando café de 15 $/kg con café de 6 $/kg, ¿cuántos kg de cada clase hay que mezclar?

Ejercicio 221:
Una granja tiene pavos y cerdos, en total hay 40 cabezas y 168 patas. ¿Cuántos cerdos y pavos hay?

Ejercicio 222:
Andrea y Marina fueron a comprar agroquímicos para el monte nogales. Pagaron $3600 y le sobraron $1200. Andrea gastó las dos terceras partes del efectivo de la caja chica y Marina el 80% del saldo bancario. ¿Qué cantidad de dinero había en la caja y en el banco antes de realizar la compra?

Ejercicio 223:
Un coleccionista de pinturas, compra dos cuadros por $2100 y los vende por $2202. Si en la venta de uno de los cuadros gana el 10% y en el otro pierde el 8% ¿Cuánto pagó por cada uno?

Ejercicio 224:
Un matrimonio compra siempre en un negocio donde no marcan los precios de los artículos. Un día la señora fue y compró tres paquetes de panceta de 1 kg cada uno y dos cartones de huevos pagando un total de $74,5. Sin saber que ella había ido, ese mismo día su marido fue a la tienda y compró un paquete de panceta y tres cartones de huevos, pagando un total de $64,5. Ahora quieren devolver dos paquetes de panceta y dos cartones de huevos. ¿Cuánto dinero les devolverán?

Ejercicio 225:
Cierto día, mujeres, niños, y hombres abordaron el tren que partió de la estación Mitre con destino a La Paz. En total lo hicieron 122 personas, de las cuales 12 eran niños. El 50% del número de mujeres era la tercera parte de los hombres. ¿Cuántas mujeres y hombres subieron al tren?

Ejercicio 226:
Un abuelo de 70 años de edad quiso repartir entre sus nietos cierta cantidad de dinero. Si les daba $300 a cada uno le sobraba $600 y si les daba $500 le faltaba $1000. ¿Cuántos nietos tiene? ¿Qué cantidad quería repartir?

Ejercicio 227:
A lo largo del año se han producido 11.600 accidentes de tráfico, de los que 5.600 se han debido a un exceso de velocidad. Averigua el número de coches y de motos accidentados si el 40% de los accidentes de coches y el 60% de los de motos se han producido por no llevar la velocidad adecuada.

Ejercicio 228:
Una persona tiene 2 inversiones y el porcentaje de ganancia por año en cada una de ellas es el mismo. Del total de la cantidad invertida 30% de ella más $600 se invirtieron en una empresa de riesgo, y al final del año la persona recibió un rendimiento de $384 de esa empresa. Si el rendimiento total después de un año fue de $1120, encuentre la cantidad total invertida.

Ejercicio 229:
Dos obreros trabajan 8 horas diarias en la misma empresa. El primero gana $50 por día menos que el segundo; pero ha trabajado durante 30 jornadas mientras que el segundo sólo 24. Si el primero ha ganado $330 más que el segundo. Calcule el salario diario de cada obrero.

Ejercicio 230:
Por la compra de dos electrodomésticos hemos pagado $3500. Si en el primero nos hubieran hecho un descuento del 10% y en el segundo un descuento del 8% hubiéramos pagado $3170. ¿Puede decir cuál es el precio de cada artículo?

Ejercicio 231:
Una empresa aceitera ha envasado 3 000 litros de aceite en 1 .200 botellas de dos y de cinco litros. ¿Cuántas botellas de cada clase se han utilizado?

Ejercicio 232:
En una primera prueba queda eliminado el 52% de los participantes. En la segunda prueba se elimina el 25% de los que restantes. Si el número de personas suspendidas es 512, ¿cuántos participantes se presentaron?

Ejercicio 233:
Un distribuidor de café mezcla un nuevo café que costará $3,90 por kilo. El café será una mezcla de un tipo de café de $3 por kilo y de otro de $6 por kilo. ¿Qué cantidad de cada café debe usar para obtener la mezcla deseada? (Suponga que el peso del café mezclado es de 100kg)

Ejercicio 234:
Cierto día, mujeres, niños, y hombres abordaron el tren que partió de la estación Mitre con destino a La Paz. En total lo hicieron 122 personas, de las cuales 12 eran niños. El 50% del número de mujeres era la tercera parte de los hombres. ¿Cuántas mujeres y hombres subieron al tren?

UNCUYO
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO

FCEN
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Trabajos Prácticos

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad Nacional de Cuyo
Cuadernillo de Ingreso 2016

facebook.com/fcen.uncu
4290824
www.fcen.uncu.edu.ar

PRÁCTICO 1: Conjuntos-Números-Valor Absoluto-Intervalos.

1. Describe por extensión cada uno de los siguientes conjuntos o escribe Ø si son vacíos:
   a. $\{n \mid n \in N \text{ y } n^2 = 9\}$
   b. $\{x \mid x \in R \text{ y } x^2 = 9\}$
   c. $\{n \mid n \in Z \text{ y } 3 < |n| < 7\}$
   d. $\{x \mid x \in R, x < 1 \text{ y } x \geq 2\}$
   e. $\{x \mid x \in Q, x^2 = 3\}$
   f. $\{3n + 1 \mid n \in N \text{ y } n \leq 6\}$

1. Encuentre el conjunto indicado si: $A = \{1,2,3,4,5,6,7\}, B = \{2,4,6\}$ y $C = \{7,8,9,10\}$.
   a. $A \cup B$
   b. $A \cup C$
   c. $A \cap C \cap B$
   d. $A \cup B^C \cup C$
   e. $A \cap B$
   f. $B \cap C^C$
   g. $A^C \cap C$
2. Encuentre el conjunto indicado si: $A = \{x|x \geq -2\}; B = \{x|x < 4\}; C = \{x|-1 < x \leq 5\}$.
   a. $B \cup C$
   b. $A \cap C$
   c. $A \cap B^C$
3. Describir por extensión los siguientes conjuntos:
   a. $\{x: x \in N \text{ y } 4x < 20\}$
   b. $\{x: x \in N, x \text{ es par, y } 10 < x < 20\}$
4. Justificando su respuesta, diga si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones.
   a. Si $A \subset B$ entonces $A \cap B = A$.
   b. Si $A \subset B$ entonces $A \cup B = B$.
   c. Si $A \cap B = A$ entonces $A \subset B$.
   d. Si $A \cap B = \emptyset$ entonces $A = \emptyset$.
5. De un total de 60 alumnos de un colegio 15 sólo estudian francés; 11 estudian francés e inglés; 12 estudian sólo alemán; 8 estudian alemán y francés; 10 estudian sólo inglés; 5 estudian inglés y alemán y 3 estudian los tres idiomas.
   a. ¿Cuántos no estudian ningún idioma?
   b. ¿Cuántos estudian alemán?
   c. ¿Cuántos estudian alemán e inglés?
   d. ¿Cuántos estudian francés?

Ayuda: Utilizar diagramas de Venn.

1. Aplique las propiedades de los números reales para escribir las expresiones sin paréntesis.
   a. $3(x + y) =$
   b. $4(2m) =$
   c. $-\frac{6}{7}(x + 2y) =$
   d. $2(m + n - p) =$
   e. $(3m)\left(5j + \frac{2}{3}l - 8t\right) =$

6. Establezca la propiedad de los números reales que se está usando.
   a. $8 + 5 = 5 + 8$
   b. $2(10 + 6) = (10 + 6)2$
   c. $(x + 2y) + 3z = x + (2y + 3z)$

d. $2(10 + 3) = 2.10 + 2.3$
e. $(5x + 1)3 = 15x + 3$
f. $(x + a)(x + b) = (x + a)x + (x + a)b$
g. $7(a + b + c) = 7(a + b) + 7c$

7. Resolver las siguientes operaciones con números naturales

a. $(5 + 7 \times 2)(7 + 3) =$
b. $16(2 + 3) =$
c. $11 + (4 + 3)5 + 1 =$
d. $4 \times 2 \times 3 + 2(3 + 1) =$
e. $9 + 2(3 + 7)(2 + 1) + 5(3 + 2 \times 4) =$
f. $(6 + 4 \times 3)[(2 + 3) \times 5 + 5 \times 3] =$
g. $2 \times 12 + 5 + 45 \times 5 + 1 =$
h. $2(6 + 3 \times 4) + (1 + 4)3 + (2 + 3 \times 1)(4 + 2) =$
i. $13 + 4 \times 5 - 23 =$
j. $3(3 \times 5 + 12)(6 + 4) =$

8. Resolver las siguientes operaciones combinadas

a. $5 \times 4 \times 7 + (6 + 5 - 3) - 12 : 4 =$
b. $7 \times 2\{4[7 + 4(5 \times 3 - 9)] - 3(40 - 8)\} =$
c. $-6 + [8 - (-3 + 5)]2 =$
d. $(-9 + 7)(3 - 2 \cdot 4) \div [6 - (-9 + 10)]$
e. $[8 - (-10 + 14)] \div [9 - (4 + 2 \times 3)] =$
f. $-5[4 - (3 - 2 \times 5 + 8)] - [15 - (-5)] =$

9. Si *n* es un número natural, determine para qué valores de *n* estos números pertenecen al conjunto de los números enteros.
a) $n/2$
b) $n/3$
c) $n - 5$
d) $n + ½$
e) $\sqrt{n}$

10. Indicar cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas:

a. Si dos números enteros son negativos, el mayor de ellos es el que está más alejado del cero.
b. Dados dos números enteros, uno positivo y otro negativo, el mayor es siempre el positivo.
c. El cero es mayor que cualquier número entero negativo y menor que cualquier número entero positivo.

11. Calcular y:

- Decir a qué conjunto de números pertenece.
- Dar el opuesto de cada número.
- Dar el inverso de cada número.

a. $3 - \left(-4 + \frac{5}{2}\right) =$
b. $\frac{3}{22} - \frac{1}{57} =$
c. $\frac{7}{27} - \frac{5}{12} + \frac{3}{2} =$
d. $\frac{-\frac{2}{3}+\frac{5}{2}}{-\frac{4}{3}\times\frac{1}{3}} =$

e. $\frac{\frac{2}{7}+\frac{1}{13}\left(-\frac{1}{5}+\frac{3}{2}\right)}{-2\frac{1}{5}+\frac{3}{5}} =$

f. $\frac{-\frac{1}{5}+\left[\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{5}\right)\right]}{3} =$

g. $\frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{6}\right] =$

h. $\frac{2}{3}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}+\frac{3}{4}\right)-\frac{5}{6}\right] =$

12. Si tenemos dos ruedas dentadas formando un engranaje, de *40* y *16* dientes, respectivamente. ¿Cuántos dientes de cada rueda deben pasar para que vuelvan a coincidir en el mismo punto? ¿Cuántas vueltas habrá dado cada una de ellas?

13. Las alarmas de tres relojes suenan cada *4* minutos, *10* minutos y *15* minutos, respectivamente. Si acaban de coincidir las tres alarmas dando la señal. ¿Cuánto tiempo pasará para que vuelvan a coincidir?
14. Ordenar de menor a mayor los siguientes números racionales y representarlo en la recta numérica.

$$\frac{2}{3};\frac{3}{2};\frac{5}{4};\frac{6}{12};\frac{55}{53};-\frac{7}{3};1;\frac{3}{4};\frac{5}{6};\frac{10}{8};$$

15. Encontrar la expresión fraccionaria de los siguientes números racionales:
16. $\frac{104}{57}$ b) $\frac{34}{108}$ c) $\frac{3021}{340}$ d) $\frac{11}{22}$ e) $\frac{3}{33}$
17. Encontrar la expresión fraccionaria de los siguientes números racionales:

a) $3{,}236$ b) $14{,}2469$ c) $43{,}\widehat{45}$ d) $32{,}2\widehat{796}$ e) $0{,}46\widehat{299}$

18. Expresar el resultado de la siguientes operaciones como una fracción

a) $0{,}04+0{,}\widehat{3}$ b) $5{,}04+0{,}\widehat{23}+5{,}\widehat{71}$ c) $\left(-0{,}06+0{,}0\widehat{2}\right)\cdot 3{,}\widehat{5}$

d) $\frac{2}{-0{,}8}$ e) $\frac{-0{,}\widehat{36}}{-3}$ f) $\frac{0{,}\widehat{02}-0{,}\widehat{1}}{1{,}5}$

19. Complete el cuadro siguiendo el ejemplo de la primera fila.

Porcentaje	Fracción	Número Decimal
10%	1/10	0.1
20%		
	1/2	
		0.8
	3/4	
		1

20. Un camión que marcha a *24* km/h demora *5* horas en recorrer cierto trayecto. Si el conductor acelerara *8* km/h su velocidad, ¿en qué tiempo cubriría el trayecto?

21. Al subir el precio de una bicicleta un *20%*, el precio final es ahora de *3.600* pesos. ¿Cuál era el precio inicial?

22. Calcule el beneficio obtenido de un capital de *5.000* pesos colocado al *2,5%* anual durante *7* meses.
23. Si el inverso de un número racional a - 4 es 1/5, determine el opuesto de a + 1.
24. Sabiendo que $a = \frac{3+\sqrt{3}}{4}$ y $b = \frac{3-3\sqrt{2}}{4}$ halle los siguientes números irracionales:
    a. $a + b$
    b. $-b$
    c. $a - \frac{2}{b}$
25. Sean *a* y *b* dos números reales. Indicar cuál es el error en el siguiente razonamiento, dado que suponemos que $a > b$, y deducimos $a = b$.

Como $a > b$, existe un número real positivo *c* tal que:

$$a = b + c$$

Multiplicamos a ambos miembros por $a - b$

$$a(a-c) = (b+c)(a-b)$$

Aplicando propiedad distributiva:

$$a^2 - a \cdot b = b \cdot a - b^2 + c \cdot a - c \cdot b$$

Sumamos en ambos miembros $-a \cdot c$ y factorizamos:

$$a^2 - a \cdot b - a \cdot c = b \cdot a - b^2 - c \cdot b$$
$$a \cdot (a - b - c) = b \cdot (a - b - c)$$

Multiplicamos miembro a miembro por $\frac{1}{a-b-c}$ y simplificamos. Así tenemos:

$$a = b$$

26. Señale con una **x** la respuesta correcta.

a) El antecesor del número natural $4(x-1)$ está representado por:

☐ $4x$ ☐ $4x-1$ ☐ $4x-4$ ☐ $4x-3$ ☐ $4x-8$

b) El hermano de Andrea tenía *x* años cuando ella nació. Si ahora Andrea tiene *y* años.

¿Qué edad tendrá su hermano en *y* años más?

☐ $2y$ ☐ $x+2y$ ☐ $2x+y$ ☐ $x-2y$ ☐ $2x-y$

c) Si *m* es el antecesor de *n + 2*, entonces el doble del sucesor de *m*, expresado en relación de *n* es:

☐ $2n+2$ ☐ $2n+3$ ☐ $2n+4$ ☐ $2n+6$ ☐ $2n+8$

d) Si el inverso multiplicativo de $\frac{1}{x-4}$ es *– 6*, entonces *x* es igual a:

☐ $a-2$ ☐ -10 ☐ $\frac{23}{6}$ ☐ $\frac{25}{6}$ ☐ $-\frac{25}{6}$

e) Sean *a, b,* y *c* números enteros tales que *a – b = c*. Si *a = 3* y *c = 10 a*, entonces el cuádruplo de *b* es:

☐ *120* ☐ *30* ☐ $-\frac{27}{4}$ ☐ -108 ☐ -27

f) Si $a = \frac{2}{3}$ y $b = \frac{1}{2}$, entonces el aditivo inverso de ab es:

☐ *−1/3* ☐ *1/3* ☐ *1/6* ☐ *−1/6* ☐ *3*

27. Evalúe cada una de las expresiones:
    a. $|100| =$
    b. $|-72| =$
    c. $|10 - \pi| =$
    d. $\big||-6| - |-4|\big| =$
    e. $\big|2 - |-12|\big| =$
    f. $1 - \big|1 - |-1|\big| =$
    g. $\left|\frac{7-12}{12-7}\right| =$

28. Grafique los siguientes intervalos y luego expréselos en forma de desigualdad.

    a. (-3,0)
    b. (2,8]
    c. [2,8)
    d. [-6,-1/2]
    e. [2,∞)
    f. (-∞,1)

29. Representa en la recta real cada uno de los siguientes intervalos, y descríbelos por comprensión:

    a. [1, 5]
    b. (−2, 4)
    c. [−1, ∞)
    d. (−∞, 5]
    e. (2, 7]
    f. [−4, 0)

30. Describe por comprensión el conjunto que resulta de las siguientes operaciones y grafícalo en la recta real. Indica si el conjunto obtenido es un intervalo, y en tal caso represéntalo en la notación de intervalos.

    g. [−1, ∞] ∩ (−3, 2).
    h. (−∞, 2) ∪ [0, ∞)
    i. (−3, 1] ∩ (2, ∞)
    j. (−2, 3] ∪ (−∞, 1)
    k. [−3, 0) ∩ (−2, 3)

31. Exprese la desigualdad con notación de intervalo y luego grafique el intervalo correspondiente.

    l. $1 \leq x \leq 2$
    m. $-5 < x < 2$
    n. $x \geq -2$

32. Verificar las siguientes afirmaciones.
    g. Si $x \in [1,5]$ entonces $3x-2 \in [1,13]$.
    h. Si $x \in (-2,3)$ entonces $2-5x \in (-13,12)$.
    i. Si $x \in [1,5]$ entonces $x^2 \in [1,25]$
    j. Si $x \in [-1,-5]$ entoces $x^2 \in [1,25]$

33. Patricio y Bob han medido la pizarra a palmos. Patricio ha contado entre 16 y 17 palmos. Bob cuenta más de 17 pero no llega a 18. Si el palmo de Patricio mide 19,5cm y el de Bob 18cm, ¿cuánto mide la pizarra?

34. ¿Cuáles son los números cuyo triplo excede a su duplo en más de *20*?

<u>Ejercicios a entregar:</u>

1. Sea $\mathcal{U} = \{1,2,3,4,5,\ldots,12\}$, $A = \{1,3,5,7,9,11\}$, $B = \{2,3,5,7,11\}$, $C = \{2,3,6,12\}$ y $D = \{2,4,8\}$. Determine los conjuntos:
    a. $A \cup B$
    b. $A \cap C$
    c. $(A \cup B) \cap C^c$
    d. $A - B$
    e. $C - D$
    f. $(B - D) \cup (D - B)$
    g. $(A - B)^c \cap (C - B)^c$
2. En diagramas de Venn como el de la figura, sombree los conjuntos siguientes:
    a. $A \cup B$
    b. $A \cap B$
    c. $(A \cup C) \cap B$
    d. $A \cap B \cap C$
    e. $(A \cup C)^c$
    f. $(A - B) \cap C$
    g. $(A \cap C) \cup C^c$
    h. $(A \cap B \cap C)^c$
    i. $(A - B) - C$
    j. $(A \cap B) \cup (A \cap C)$
3. A la entrada de la escuela, se les aplicó a 156 niños una encuesta respecto a sus juguetes favoritos. La encuesta arrojó los siguientes resultados:
    ▪ A 52 niños les gustaba el balón; a 63 les gustaban los carritos; a 87 les gustaban los videojuegos.
    ▪ Además algunos de ellos coinciden en que les gustaba más de un juguete: 26 juegan con el balón y carritos; 37 juegan con carritos y videojuegos; 23 juegan con el balón y los videojuegos; por ultimo 7 expresaron su gusto por los tres.
    a. ¿A cuántos niños les gusta otro juguete no mencionado en la encuesta?
    b. ¿A cuántos niños les gusta solamente jugar con los videojuegos?
    c. ¿A cuántos niños les gusta solamente jugar con el balón?
4. Calcular y:

    - Decir a qué conjunto de números pertenece.
    - Dar el opuesto de cada número.
    - Dar el inverso de cada número.

    a. $\left(\frac{5}{7} + \frac{7}{9}\right) : (-1 + 0.5) =$

b. $\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{12}\right)=$
c. $\frac{3}{4}\left[\frac{3}{5}-\frac{1}{2}\left(\frac{5}{7}+\frac{7}{9}\right)\right]=$
d. $\frac{-2}{\frac{2}{3}-\frac{5}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)}-\frac{\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\left(-3+\frac{4}{3}\right)}{-\frac{1}{6}}=$
e. $-\frac{4}{5}\left(\frac{\frac{3}{4}\times\frac{2}{5}}{2-\frac{1}{2}}\right)=$
f. $-\frac{5}{27}-\frac{7}{12}-\frac{3}{8}-\frac{2}{3}+\frac{11}{15}-\frac{1}{14}=$

5. Justificando su respuesta diga si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones.
   a. La suma de dos números racionales es racional.
   b. La suma de un racional y un irracional es irracional.
   c. La suma de dos irracionales es racional.
   d. La suma de dos irracionales es irracional.
6. Se sabe que a, b y c son números distintos y que además deben ser algunos de los siguientes $-2, 4$ y $\frac{1}{3}$ El menor valor que puede tomar la expresión $\frac{a}{bc}$ es:
   a. $-\frac{1}{6}$
   b. 0
   c. $\frac{1}{3}$
   d. -3
   e. Ninguna de las anteriores
7. Exprese cada uno de los siguientes números decimales en forma fraccionaria.
   a. $0.\hat{7}$
   b. $0.2\hat{8}$
   c. $5.\widehat{23}$
   d. $3.13\widehat{67}$
8. Si $x \in N$ y $x > 1$, ordene los siguientes números y justifique.

$$\frac{1}{x+1}; \frac{1}{x}; x; -\frac{1}{x}; \frac{1}{-1-x}$$

9. Resuelva:

   a. $|5 \times (-2)| =$
   b. $\left|1-\left|-5\times 8\times\left|-\frac{1}{2}\right|\right|\right|=$

10. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando:
    a. El valor absoluto de cualquier número es siempre no negativo
    b. Existen números cuyo valor absoluto es -4
    c. El valor absoluto de 5 da 5 o -5
    d. Existen solo dos números cuyo valor absoluto es 5
11. Calcule la distancia entre los siguientes números **por definición**. Represente en la recta real.

    a. 1.5 y 0.6
    b. -8.3 y 10.25
    c. $\frac{1}{4}$ y $-\frac{1}{16}$
    d. $1{,}5\hat{6}$ y 0.02

12. Exprese como intervalo, las siguientes situaciones

    a) Cada mes de un año, una compañía tuvo ingresos mayores que $*37.000* pero menores que $ *53.000*. Con*x* designe los ingresos totales del año.

b) El número de horas de trabajo *x* para fabricar un producto no es menor que 3½ ni mayor que 5.

11. Un estudiante debe mantener un promedio numérico final en cinco exámenes de *60%* a *79%*, para obtener la regularidad de una materia. Si en los primeros cuatro exámenes obtuvo calificaciones de *96%*, *70%*, *61%* y *65%* ¿Qué nota deberá obtener en el quinto examen para poder regularizar la materia?
12. Verificar las siguientes afirmaciones.
    a. Si $x \in (-2,2]$ entonces $3 - x \in [-13,12)$
    b. Si $x \in (-3,2]$ entonces $x^2 \in [0,9)$

PRÁCTICO 2: Exponentes-radicales-racionalización y notación científica

1. Verifique las siguientes igualdades:
   a. $\frac{\frac{1}{2}\div\left(\frac{3}{4}\div\frac{3}{2}\right)}{\left(1-\frac{1}{3}\right)\div\left(1-\frac{1}{5}\right)}=\frac{6}{5}$
   b. $\frac{(3^4)^3(3^2)^3}{(-3)\times5\times3^4}=-\frac{1}{3}$
   c. $\frac{\left[3^{-2}-(-2)^{-2}\right]^{-1}}{3-\frac{3(-2)}{3-2}}=-\frac{4}{5}$
   d. $\left(\sqrt[4]{\sqrt{\sqrt[3]{2}}}\right)^{96}+\left\{\left[\left(\sqrt[6]{\sqrt[3]{2}}\right)^2\right]^3\right\}^9=24$
2. Indicar si las siguientes afirmaciones son correctas o no, realizando los cálculos correspondientes.
   a. $\left(\sqrt{2}-3\right)^2+\left(\sqrt{2}+3\right)^2$ es un número irracional.
   b. $\left(\sqrt{2}-3\right)^2\times\left(\sqrt{2}+3\right)^2$ es un número entero.
   c. $\left(\sqrt[3]{9}\right)^2-\left(\sqrt[3]{8}\right)^2=\left(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{8}\right)^2\times\left(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{8}\right)^2$
   d. $\left(\sqrt[3]{7}+5\right)^2=\sqrt[3]{49}+25$
3. Resolver las siguientes operaciones:
   a. $(-3)^{-2}=$
   b. $(3^{-2}+2^{-1})=$
   c. $-3^{-2}=$
   d. $(5+2(-4)^2)\div(-3)-\big(5(-4)+(-6)\big)-(-1)^2=$
   e. $\frac{1}{2}-\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{5}-\left(\frac{1}{3}+\frac{5}{3}\right)\right)=$
   f. $\left(2+\frac{1}{3}\times\frac{6}{5}\right)\times\frac{1}{18}-2\times\frac{1}{6}=$
   g. $-\frac{1}{6}+\frac{20}{7}\left(-\frac{14}{5}\right)-\frac{\frac{16}{15}}{-\frac{2}{5}}=$
   h. $\frac{4}{\frac{1}{5}+6}-\frac{-\frac{1}{31}+1}{-\frac{1}{2}}=$
   i. $2\sqrt[3]{4}\left(\sqrt{2}+\sqrt[3]{16}\right)=$
   j. $5\sqrt{2}-\sqrt{18}+\frac{1}{2}\sqrt[3]{2}=$
   k. $\left(\sqrt{2}\right)^{-2}+\left(\sqrt{3}\right)^{-2}=$
   l. $\frac{-2^2+(-3)^4-\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}}{\sqrt{55-\sqrt{36}}}$
   m. $\frac{\left(\frac{1}{3}+\frac{5}{4}-1\right)^{-2}}{\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}}+\frac{\sqrt{\frac{64}{9}}}{\sqrt[3]{\frac{64}{27}}}$
4. Señale con una **x** la respuesta correcta.

a) La expresión que representa al enunciado "el cuadrado de la diferencia entre dos números" es:

☐ $2x-2y$ ☐ $2x-y$ ☐ x^2-y ☐ $(x-y)^2$ ☐ x^2-y^2

b) La expresión "Al número *x* se le suma (- *4*)**,** dicha suma se divide por *a* y el resultado se multiplica por *y*", se representa con una expresión algebraica que es:

i) La expresión $(2x)^3$ se lee:

☐ El doble del cubo de un número.

☐ El doble del triple de un número.

☐ El cubo del doble de un número.

☐ El cubo del cuadrado de un número.

☐ El triple del doble de un número.

j) Si el largo de un rectángulo se triplica y su ancho disminuye al *50%*, entonces se afirma que su área:

I) se hace *1,5* veces mayor
II) se incrementa en el *50%*
III) aumenta en el *150%*

de estas afirmaciones son verdaderas:

☐ Sólo I ☐ Sólo II ☐ Sólo III ☐ Sólo I y II ☐ I, II y III

35. Racionalizar los siguientes denominadores.
    a. $\frac{\sqrt[3]{16}}{2\sqrt[4]{32}}$
    b. $\frac{3}{\sqrt{8-2}}$
    c. $\frac{1}{\sqrt{3a^3}}$
36. Resolver de modo que no queden raíces cuadradas en el denominador.
    a. $\frac{\sqrt{6}+2}{\sqrt{6}-2} =$
    b. $\frac{4}{\sqrt{5}-3} =$
    c. $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-3} =$
    d. $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{-\sqrt{3}+\sqrt{2}} =$
    e. $\frac{7+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} =$
    f. $\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{5}{2\sqrt{2}} =$
37. Expresar los siguientes números en notación científica:

    a) *26.000.000.000.000.000* b) *0,0000000000798* c) *269,06* d) *0,0055*

38. Calcular cuántos segundos hay en un año bisiesto y expresar el resultado en notación científica.
39. La luz viaja a una velocidad aproximada de *300.000* kilómetros por segundo y la distancia de la Tierra al Sol es de *150.000.000* kilómetros.
40. Escribir en notación científica la velocidad de la luz y la distancia de la Tierra al Sol.
    a) Calcular cuánto tiempo tarda la luz del Sol en llegar a la Tierra.
    b) Calcular utilizando la notación científica la distancia que recorre un haz de luz en un año de *365* días.
41. La distancia de la Tierra al Sol es de $1.5\ 10^8$ km. Saturno esta a *9,54* veces más lejos del Sol que la Tierra, ¿a qué distancia está Saturno del Sol?
42. Expresar el resultado en notación científica:
    a) $2{,}6 \cdot 10^{-3}\left(4{,}3.10^{-4}\right)^2 - 1{,}1 \cdot 10^{-11} + \left(4{,}3.10^2\right)^3 =$
    b) $\dfrac{\left(4{,}3.10^4\right)^3 - 5{,}1.10^9}{2{,}6.10^{11}}$

43. $\dfrac{3000^3-(0{,}0006)^6}{(0{,}0012)^3}=$

44. Completar el siguiente cuadro:

km	hm	dam	m	dm	cm	Mm
			15			
0,23						
					9876	
	55					
				0,8		
		13				
						2

45. Hallar el resultado de las siguientes operaciones.

    k. *0,025*hm + *3,36*dam – *34,25*cm

    l. *625*m – *2,96*dam + *62.361*cm

    m. *234*m^2 + *15.327*mm^2 + *4*dam^2

46. Si el espesor de una hoja es de *0,12*mm ¿Cuál es el ancho en centímetros de un libro de *750* hojas?

<u>Ejercicios a entregar:</u>

1. Indicar si las siguientes igualdades son correctas. Para las incorrectas escribir a que número es igual el miembro izquierdo de la igualdad.
    a. $\sqrt{25+4}=\sqrt{25}+\sqrt{4}$
    b. $(3+8)^2=3^2+8^2$
    c. $\sqrt{(-4)^2}=-4$
    d. $\frac{3}{4}+\frac{6}{9}=\frac{3+6}{4+9}$
    e. $\sqrt{81\times 4}=\sqrt{81}\times\sqrt{4}$
    f. $\sqrt[5]{(-8)^5}=-8$
    g. $\sqrt{\pi}+\sqrt{\pi}=2\sqrt{\pi}$
    h. $\frac{4}{3}-\frac{2}{3}=\frac{2}{0}$
    i. $\frac{8}{6}\times\left(-\frac{2}{3}\right)=-\frac{8}{9}$
    j. $\frac{9}{25}\div\frac{3}{5}=\frac{9\div 3}{25\div 5}$
    k. $\left(-\frac{4}{6}\right)^3=\frac{(-4)^3}{(-6)^3}$
    l. $\sqrt{\frac{25}{81}}=\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{81}}$
    m. $(-2)^0=0$
    n. $2^4\times 3^4=6^{16}$
    o. $15^{-2}\div 5^{-2}=3^{-2}$
    p. $(-8)^0=-1$

q. $\pi^0 = 1$
r. $2^3 = 3^2$

2. Resuelva:

a. $\left[\left(2+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{\sqrt{1+\frac{16}{9}}}{\frac{20}{21}}\right]^{-1/3} - 2^2 =$

b. $\left(\frac{1-\frac{5}{4}}{\sqrt[3]{-\frac{11}{8}-2}} + \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}}\right)^{-1} =$

c. $\sqrt[3]{\frac{\left(\frac{3}{5}\right)^{-1}-\frac{1}{6}}{\sqrt[3]{\frac{3}{4}-1+\frac{1}{8}}} \times \frac{10}{\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}+\frac{2}{3}}} =$

d. $\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}}}$

e. $\left(\frac{\left(\frac{3}{5}\right)^4\left(\frac{3}{5}\right)^{-3}+1}{1-\frac{2}{3-\frac{1}{2}}}\right)^{-\frac{1}{3}} =$

f.

3. En cada caso racionalice el denominador y simplifique al máximo la expresión resultante.

f. $\frac{x^2-x}{x-\sqrt{2x-1}}$

g. $\frac{2x+14}{\sqrt{2-x}-3}$

4. Escribir en notación científica los siguientes números.

a. 1830000000000

b. 0.00000289

5. Una vacuna tiene *100.000.000* bacterias por centímetro cúbico. ¿Cuántas bacterias habrá en una caja de *120* ampollas de *80* milímetros cúbicos cada una?

6. Exprese los siguientes números en notación científica sin usar calculadora

a. $\frac{25\times10^{12}\times5\times10^{-32}}{12.5\times10^{15}\times2\times10^{14}} =$

b. $\frac{6\times10^{9}\times5\times10^{8}}{2.5\times10^{2}\times4\times10^{-11}} =$

c. $\frac{4\times10^{12}\times(5\times10^{3})^2}{2.5\times10^{5}\times(2\times10^{-10})^3} =$

PRÁCTICO 3: Expresiones Algebraicas-Polinomios-Casos de Factoreo.

1. Escribir algebraicamente los siguientes enunciados:
   a. El doble de un número.
   b. La mitad de un número.
   c. El opuesto de un número.
   d. El inverso de un número.
   e. La suma de dos números.
   f. La suma de un número y el opuesto de otro.
   g. La suma de un número y su inverso.
   h. El producto de tres números.
   i. El producto de los inversos de tres números.
   j. El inverso del producto de tres números.
   k. La suma de los cuadrados de dos números.
   l. El cuadrado de la suma de dos números.
   m. La diferencia entre el cubo de un número y su cuadrado.
   n. La diferencia entre el triplo de un número y su doble.
   o. El valor absoluto del cubo de un número.
   p. El cubo del valor absoluto de un número.
2. Escribir un enunciado que se traduzca en la expresión algebraica dada:
   a. $a - a^2$
   b. $a - b^2$
   c. $x - 2$
   d. $x^2 - 5$
   e. $(x + 5)^2$
   f. $(x + y)^3$
3. Escribir una expresión algebraica que represente a los siguientes enunciados:
   a. El cuadrado de la suma de dos números es igual al cuadrado de uno de ellos, más el cuadrado del doble producto de ambos.
   b. El valor absoluto de un número es igual al valor absoluto de su opuesto.
   c. La diferencia entre los cuadrados de dos números es igual al producto entre la diferencia y la suma de los mismos.
   d. En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.
   e. El triple de un número más el doble del otro es igual a 17.
   f. La razón entre el perímetro de una circunferencia y su diámetro es π.
   g. El precio de un viaje en taxi es de $2 más $ 1,50 por kilometro recorrido.
4. Despejar y de las siguientes ecuaciones:
   a. $y = 3x + 2y + 1$
   b. $xy = 5$
   c. $x^2 + 2xy = y - 5$
   d. $ay = 8y - 5x + 6$
5. Despejar la incógnita encerrada entre {} en cada una de las siguientes ecuaciones:
   a. $\{n\}\ I = \frac{nE}{R+nr}$
   b. $\{P\}\ x = \frac{Pgt^2}{2u(1+p)}$
   c. $\{x\}\ a = \frac{2bx}{1+b(x-1)}$
   d. $\{L\}\ T = \frac{W(u^2-2gL)}{gL}$
   e. $\{K\}\ T = 2\pi\sqrt{\frac{K^2+h^2}{gh}}$
   f. $\{c\}\ 2ax = \sqrt{b - 4ac} - b$
   g. $\{S\}\ T = \sqrt{\frac{R-S}{S}}$

h. $\{R\}\ I = E\sqrt{R^2 + w^2L^2}$

i. $\{p\}\ \frac{1}{f} = (p-1)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s}\right)$

6. Resuelva los siguientes cálculos e indique, cuando sea posible, el grado del monomio resultante:

a) $0{,}5x^2 + 1{,}25x^2 - 3x^2$

b) $\frac{4}{3}a^3 - \left(-1{,}5a^3 + 2a^3\right)$

c) $-\frac{5}{7}\ x^2\ a^5\left(\frac{49}{40}x^2\ a^5\right)$

d) $\frac{6a^4\ x^5\ y^3}{2\,a^4\ x^5\ y^3}$

e) $\frac{26\ b^4\ x^5\ y^3}{3\,a^4\ x^5\ y^3}$

f) $\frac{\sqrt{12}\,x^m}{5\ x^n}$

7. En el siguiente grupo de expresiones algebraicas algunas son polinomios, indique cuál de ellas lo son y justifique su elección. En aquellas elegidas indique: grado, coeficiente principal, término independiente y además complételas y ordénelas en forma decreciente.

a) $P(x) = -3x^3 - \sqrt{3}x + x^2 - 1$

b) $R(t) = 5{,}2^t + 1 - 3^{2t}$

c) $S(m) = 0m^4 + 0m^3 - 3$

d) $Q(p) = \sqrt[3]{2px} - p^2x^2$

e) $A(s) = 3(s-2a)^{-1} - 2as^2$

f) $T(r) = \frac{p}{2}r^4 - pr^2 - 2r$

8. Para cada uno de los siguientes polinomios indicar grado y coeficiente principal.

a. $-7x^3 + 8x^2 + 0x^5 + x$

b. $1 + x^2 - x^6 + 3$

c. 8

d. $x^3 + 3x$

e. $2^3 + 3^3x + 4^3x^2 + 5^3x^3 + 6^3x^4$

f. $\sqrt{9} + x^3 - \frac{2}{3}x^5$

9. Completar y ordenar los polinomios dados en el ejercicio anterior.

10. Escriba cada una de las siguientes expresiones en la forma $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$.

g. $(x-3)(x+5) + x(x^2-1)$

h. $(x^2-8)(2+x) + 3(x-1)$

i. $(x^2-1)(x^2+2)(x^2-3)$

11. Si $P(x)$es un polinomio de grado 2 y $Q(x)$ es u polinomio de grado 3, ¿Cuál es el grado de los siguientes polinomios?

j. $(x^2+x+1) + P(x) + Q(x)$

k. $P(x)Q(x) - x^8$

l. $P(x) - 3x^3$

m. $Q(x) - 7x^2P(x)$

12. Sean $A(x) = 3x^2 - 2x - 1$; $B(x) = x^3 - 2$ y $C(x) = x - 1$, calcular los polinomios que resultan de las siguientes operaciones.
    n. $A(x)B(x) + xC(x)$
    o. $(A(x))^2 - (B(x))^2$
    p. $xA(x) - 3C(x) + B(x)x^2$
    q. $B(x) - 2(C(x) - 1)$
13. Determine los valores de las constantes ***a, b, c*** y ***d*** para que los polinomios P(x) y Q(x) sean iguales.

$$P(x) = 3x^3 + (c - d)x^2 - 4x + a$$

$$Q(x) = (a + 2b)x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2cx + 1$$

14. Encuentre el valor de los polinomios para cada valor de x indicado:

a) $Q(x) = x^3 + 4x^2 + 5x + 4 \quad si \;\; x = -2$

b) $S(t) = t^3 - 5t^2 + 8t - 4 \quad si \;\; t = 1$

15. Marque con una cruz la única respuesta correcta:
El polinomio $P(x) = (m-4)x^3 + (m^2 - 16)x^2 + (m+4)x + 4$ es de grado 2:

a) si $m = 4 \;\; ó \;\; m = -4$
b) si $m \neq 4 \;\; y \;\; m \neq -4$

c) si $m \neq 4$

d) si $m \neq -4$

e) para ningún valor de *m*

16. Calcule el polinomio $P(x)$ que dividido por $(x+1)$ tiene por cociente

$C(x) = 3x^2 + 2x + 3$ y resto 2

17. Calcule el valor de k, para que el resto de la división de los polinomios $T(x) : P(x)$ sea 4,

siendo $T(x) = 4x^3 - x^2 + kx - 2 \quad y \quad P(x) = (x-2)$

18. Los siguientes polinomios son divisibles por $(x - a)$. Calcular el valor de b en cada caso.
    a. $P(x) = 3x^5 - 2x^3 + bx^2 - 7; \quad a = 1$
    b. $P(x) = -3x^5 - 2x^4 + bx - 5; \quad a = -1$
    c. $P(x) = bx^4 - 2x^3 + x^2 - x; \quad a = 2$
    d. $P(x) = x^6 - bx^5 + 3x^2 - 4x + 1; \quad a = -\frac{1}{2}$
19. Determinar el valor de $b \in$ R para el cual el polinomio $M(x) = x^6 + bx^3 - 5x^2 - 7$ tiene resto 3 en la división por el polinomio $D(x) = x + 2$.
20. Determinar el valor de $b \in$ R para el cual el polinomio $P(x) = 2x^6 - bx^4 + x^2 + 2$ tiene resto 3 en la división por el polinomio $D(x) = x + 1$.
21. Encontrar un factor común para los polinomios $P(x) = x^5 - 5x^3 + 4x$ y $Q(x) = x^2 + x - 2$.

22. Decir a que son iguales los polinomios $P(x)$y $Q(x)$ que satisfacen que $P(x) + Q(x) = 2x^3 + 1$ y $P(x) - Q(x) = 1$.
23. Escriba un polinomio $Q(x)$ de grado tres sabiendo que $Q(-2) = Q(1) = Q(5) = 0$ y que $Q(0) = 50$
24. Calcule el valor de **a**, sabiendo que $T(x) = \frac{1}{2}x^4 + 3ax^3 - 2x \quad y \quad T(-2) = 2$

Dado $Q(x) = x^6 - 64$, indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) El binomio $P(x) = x^3 + 8$ divide a Q(x). $P(x) = x^3 + 8$

b) - 2 es raíz de $Q(x)$.

c) El polinomio $x^2 + 2x + 4$ es múltiplo de $Q(x)$

d) $Q(x) = (x^3 - 8)(x + 2)(x^2 - 2x + 4)$

25. Complete la siguiente tabla:

$(3x+1)^3$	.....
.....	$x^3 - \frac{3}{2}x^2y + \frac{3}{4}xy^2 - \frac{1}{8}y^3$
$(mp^2 - p)^3$	.....

26. Factorice las siguientes expresiones:

a) $8a^3 + 36a^2b + 54ab^2 + 27b^3$ Escriba el cubo de un binomio.

b) $x^3 - \frac{3}{5}x^2 + \frac{3}{25}x - \frac{1}{125}$

Diferencia de cuadrados

Complete con la expresión correspondiente: $(a+b)(a-b) = ...?$

Aplicando propiedad distributiva, obtenemos:

$$(a+b)(a-b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2$$

Luego, por la propiedad simétrica de la igualdad:

$$\underbrace{a^2 - b^2}_{\text{Diferencia de cuadrados}} = \underbrace{(a+b)(a-b)}_{\text{Producto de la suma por la diferencia de las bases}}$$

27. Escriba las siguientes expresiones como producto de una suma por una diferencia:

$16y^2 - x^4 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.$

$1 - m^2 n^4 p^6 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.$

28. ¿Las siguientes expresiones son iguales o distintas?

a) $(m+n)^2 \quad y \quad (-m-n)^2$

b) $(m-n)^2 \quad y \quad (n-m)^2$

c) $(m+n)^2 \quad y \quad m^2+n^2$

29. Complete el polinomio $T(x)$ para que sea trinomio cuadrado perfecto:

$T(x) = 16x^4 + \ldots\ldots\ldots\ldots + 25 = (\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)^2$

$T(x) = 49x^6 - 70x^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots = (\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)^2$

$T(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots - 30x \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = (\ldots\ldots - 5)^2$

30. Factorice hasta llegar a la mínima expresión:

a) $4axn - 6bnx - 10nxy + 2axn =$

b) $4x^5 + 16x^4 + 16x^3 =$

c) $3x^3 + 6x^2 + 5x + 10 =$

d) $4x^4 + 1/16 - x^2 =$

e) $a^4x^6 - 49 =$

f) $-x^2 + 100 =$

g) $2x^3 - 3x^2 - 8x + 12 =$

h) $8x^3 - 4x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{27} =$

i) $312x^5 + 1 =$

j) $x^6 - 729 =$

31. Simplificar las expresiones. Si es necesario factorice.

a. $a^{10} - a^8 - a^6 + a^4$

b. $\frac{x^2-x}{2x-2}$

c. $\frac{4x^4+2x^3+2x^2+x}{2x^2-2}$

d. $\frac{x+2}{x^2+4x+4}$

e. $\frac{x^3-x^2-2x+2}{x^2+4x-5}$

f. $x^2 - a^2 + 2xy + y^2 + 2ab - b^2$

g. $\frac{x^3-3x^2+3x-1}{2x^2-2}$

Ejercicios a entregar:

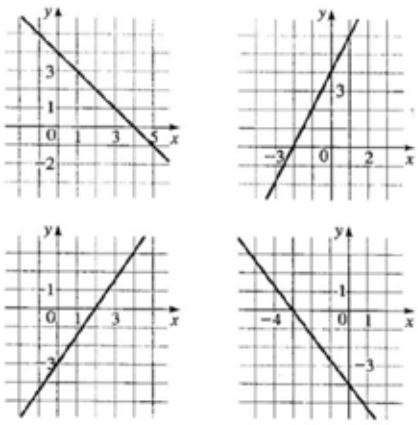
1. Despejar la incógnita encerrada entre {} en cada una de las siguientes ecuaciones:
   a. $\{r\}\ R = \frac{w}{2a}\left(a - \frac{v^2 h}{gr}\right)$
   b. $\{s\}\ P = \frac{f}{2}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{4s^2}{f^2}}\right)$
   c. $\{M\}\ B = \frac{1}{2}\left(M + \sqrt{M^2 + T}\right)$
   d. $\{n\}\ \lambda = \lambda_0 \frac{n^2}{n^2 - 4}$
2. Indique si son verdaderas o falsas las siguientes proposiciones:
   a. Si $P(x) = x^4 + 5x + 6$ *entonces* $P(-1) = 2$.
   b. Si $P(x) = x^2 - 4x$, una raíz de $P(x)$ es -4.
   c. Si $a = 3$, el grado del polinomio $P(x) = (a^2 - 9)x^3 - (3 - a)x + a$ es *1*.
   d. El polinomio $T(x) = 0$ tiene grado *0*.
3. Dados $P(x) = 2x^3 + 11x^2 - 3x - 4$ y $D(x) = x^2 + 7x + 9$,
   a. Calcular el cociente y el resto de la división del polinomio $P(x)$ con $D(x)$.
   b. Usando el teorema del resto calcular el resto de la división entre $P(x)$ y el polinomio $(x - 6)$.
4. ¿Cuánto debe valer a, b y c para que el polinomio $x^3 + ax^2 + bx + c$ sea divisible por $x, (x + 2)$ y $(x - 2)$.
5. Encuentre los valores de los coeficientes a y b sabiendo que el polinomio $P(x) = ax^6 - x^4 - bx^3 + 2x^2 - 4$ sea divisible por $(x - 1)$ y que el reto de la división por $(x - 2)$ sea 84.
6. Escribir un polinomio de grado 6 cuyo resto en la división por $x^4 + 3$ sea $x^2 - 1$.
7. Opere algebraicamente, factorice y simplifique al máximo las siguientes expresiones formales.
   h. $\frac{bx^2 - b - x^2 + 1}{b^2 x - x + b^2 - 1}$
   i. $\frac{a^{-2} - 2b^{-1}}{a^{-4} - 4b^{-2}}(b - 2a)^{-1}$
   j. $\frac{(a+b)^{-2}}{(ab)^{-2}} \div \frac{1}{b^{-2} - a^{-2}}$
   k. $\frac{m+n}{m^2 - n^2} \times \frac{m-n}{m^2 - 2nm + n^2}$
   l. $\left(\frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y}\right)\left(1 - \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right)$
8. Compruebe la siguiente igualdad $\frac{(x^{-1} + y^{-1})^{-1}}{x^{-1} - y^{-1}} \div (x^{-2} - y^{-2})^{-1} = 1$
9. Resuelva las operaciones indicadas:
   a. $\frac{1-x}{2} - \frac{4}{x-3} + \frac{x}{2} =$
   b. $\frac{x+2}{4-x^2} - \frac{1}{x} - \frac{x^2}{2x+x^2} =$
   c. $\frac{y^2}{(y-x)^2} - \frac{y+x}{y-x} =$

PRÁCTICO 4: Ecuación Lineal-Función lineal-Sistema de ecuaciones

1. Resolver las siguientes ecuaciones lineales.
   a. $2x + 5 = 0$
   b. $\frac{3x}{7} - 2 = 4$
   c. $\frac{3x-2}{7} = 4$
   d. $\sqrt{2}x + 3 = 1$
   e. $\pi + \sqrt{3}x = 2\pi$
   f. $\frac{3}{4}y + \frac{1}{2} = \frac{2}{\sqrt{7}}$
   g. $4x + 7 = 9x - 3$
   h. $2(1 - x) = 3(1 + 2x) + 5$
   i. $x - 3x + \frac{1}{2}x - 3 = 0$
   j. $\frac{1}{x} = \frac{4}{3x} + 1$
   k. $\frac{2x-1}{x+2} = \frac{4}{5}$
2. Determine la pendiente de la recta que pasa por los siguientes puntos, escriba la ecuación de la recta y grafíquela.
   a. (0,0) y (4,2).
   b. (3,2) y (5,1).
   c. (0,5;3) y (3,8).
   d. (1,-3) y (-1,6).
   e. (-1,-4) y (6,0).
   f. (2,-5) y (-4,3).
3. Complete la tabla teniendo en cuenta los datos proporcionados:

Ecuación	Pendiente	Intersección de la recta con el eje x	Intersección de la recta con el eje y
$5y = -3x + 2$			
$-2y + 5x = 7x + 3$			
$3 - 4y = 10x - 5$			
$3x + 3y = 9$			
$2(x - 3) = y - 6$			

4. Dada las siguientes gráficas de rectas escriba la ecuación correspondiente:



5. Escriba la ecuación de una recta que contenga al punto de coordenada (3,-3) y cumpla con las condiciones dadas. Luego grafique.
   a. paralela a la recta $y = 2x + 5$.

b. perpendicular a la recta $y = 2x + 5$.
c. paralela a la recta $2x + 3y = 6$.
d. perpendicular a la recta $2x + 3y = 6$.
e. paralela a la recta $x = 8$.
f. perpendicular a la recta $x = 8$.
g. paralela al eje de ordenadas.
h. perpendicular al eje de absisas.
i. paralela a la recta que pasa por (2,5) y (-2,1).
j. perpendicular a la recta que pasa por (2,5) y (-2,1).

6. Determine la recta que pasa por los siguientes puntos $P(2,2)$ y $Q(-5,0)$. Grafique.
7.
   a. Dar la ecuación de la recta L que pasa por los puntos $P = (1;\ 2)$ y $Q = (3;\ 6)$.
   b. Escribir una recta que sea paralela y una perpendicular a la recta L dada en el inciso a).
   c. Graficar las tres rectas en el mismo plano cartesiano.
8. Escriba una ecuación que exprese el enunciado:
   a. T varía directamente con x.
   b. s es inversamente proporcional a w.
   c. w es proporcional conjuntamente a m y n.
   d. z es proporcional a la raíz cuadrada de y.
   e. A es proporcional al cuadrado de t e inversamente proporcional al cubo de x.
   f. R es conjuntamente proporcional a i e inversamente proporcional a P y t.
9. Resuelva las siguientes situaciones problemáticas utilizando proporcionalidad directa o inversa, según corresponda.
   a. Si Juan paga $2000 por una heladera y este precio incluye el impuesto del 21% sobre
   b. el precio real de la heladera, ¿cuánto paga Juan por la heladera propiamente dicha y de cuánto es el impuesto?
   c. Un comerciante compra un artículo por $105 y lo vende a $150. Calcule el porcentaje de ganancia sobre el precio del costo y sobre el precio de venta.
   d. Un móvil que desarrolla una velocidad de 80 km/h ¿A cuántos metros por segundo se mueve?
   e. Se distribuyen $200000 entre tres familias de 2, 3 y 5 hijos respectivamente, en forma proporcional al número de hijos. ¿Cuánto le corresponde a cada familia?
10. Cada uno de los siguientes sistemas es equivalente al sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y = 7 \end{cases}$$

Explicar cuál es la transformación que los hace equivalentes:

a. $\begin{cases} 2x + 2y = 10 \\ 6x - 3y = 21 \end{cases}$
b. $\begin{cases} x + y = 5 \\ 3x = 12 \end{cases}$
c. $\begin{cases} \frac{3}{2}y = \frac{3}{2} \\ 2x = 7 + y \end{cases}$

11. Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones. Indique para cada uno de ellos si es compatible o incompatible. Si tiene solución indique si es determinado o indeterminado. Grafique.
   a. $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 3x + 2y = 4 \end{cases}$
   b. $\begin{cases} 4x + 0.5y = 13 \\ -\frac{1}{3}x - 3y = -7 \end{cases}$
   c. $\begin{cases} x - 2y = 5 \\ 2x - 4y = 0 \end{cases}$
   d. $\begin{cases} x - 3 = 2y \\ x = 4 + y \end{cases}$

e. $\begin{cases} 2x - 3y - 9 = 0 \\ 6x + 4y = 12 \end{cases}$

f. $\begin{cases} 12x = y \\ x = 12y \end{cases}$

g. $\begin{cases} -3x + 2y = 6 \\ 3 + y = \frac{3}{2}x \end{cases}$

h. $\begin{cases} y - 3 = -x \\ 2x + 5y = 6 \end{cases}$

i. $\begin{cases} 2x + 6y = 14 \\ x - 7 = -3y \end{cases}$

12. Resuelva los siguientes problemas e indique en cuáles de ellos se debe plantear una ecuación lineal o un sistema de ecuaciones lineales:
    a. El área de un cuadrado es 125m^2. ¿Cuál es la medida del lado?
    b. Hallar dos números cuya suma es 62 y su diferencia es de 4.
    c. Determinar el perímetro de un rectángulo cuyo lado mayor es 1 cm más largo que el menor, y el lado menor es la mitad del mayor.
    d. El triple del cuadrado de un número es 75, ¿cuál es dicho número?
    e. En una parcela, la piscina ocupa 25 metros cuadrados, la casa ocupa tanto como la piscina y la mitad de jardín, el jardín ocupa tanto como la piscina y la casa juntas. ¿Cuántos metros cuadrados ocupan la casa, piscina y jardín juntos?

13. En dos vasijas hay la misma cantidad de agua. Si sacáramos 15 litros de una de ellas y la hecháramos en la otra, entonces ésta tendría triple número de litros que la primera. ¿Cuántos litros había inicialmente en cada vasija?
14. Un grupo de personas sale a comer afuera. Si se sientan tres personas en cada mesa quedan dos personas sin mesa. Si se sientan cuatro personas por mesa, queda una mesa vacía. ¿Cuántas personas y mesas hay?
15. María dice que en su aula son 37 compañeros y que hay el doble de varones que mujeres. ¿Es posible?
16. Las entradas de una fiesta de estudiantes costaron $8 por persona sola y $15 por pareja. Si asisitieron a la fiesta 144 personas y se recaudó $1098 por venta de entradas. Determine la cantidad de parejas y personas solas asistieron.
17. Una persona tiene 2 inversiones y el porcentaje de ganancia por año en cada una de ellas es el mismo. Del total de la cantidad invertida 30% de ella más $600 se invirtieron en una empresa de riesgo, y al final del año la persona recibió un rendimiento de $384 de esa empresa. Si el rendimiento total después de un año fue de $1120, encuentre la cantidad total invertida.
18. Dos obreros trabajan 8 horas diarias en la misma empresa. El primero gana $50 por día menos que el segundo; pero ha trabajado durante 30 jornadas mientras que el segundo sólo 24. Si el primero ha ganado $330 más que el segundo. Calcule el salario diario de cada obrero.
19. Por la compra de dos electrodomésticos hemos pagado $3500. Si en el primero nos hubieran hecho un descuento del 10% y en el segundo un descuento del 8% hubiéramos pagado $3170. ¿Puede decir cuál es el precio de cada artículo?
20. Una empresa aceitera ha envasado 3 000 litros de aceite en 1 .200 botellas de dos y de cinco litros. ¿Cuántas botellas de cada clase se han utilizado?

<u>Ejercicios a entregar:</u>

1. Resolver las siguientes ecuaciones:
    a. $2x - 3 = 5x + 1$

b. $3-(1-x)=4+x-(2+x)$

c. $5(-3+x)-(1+x)(-2)=2$

d. $\frac{1}{2}+\frac{3}{5}x-2\left(x+\frac{2}{3}\right)=5$

e. $\frac{4}{3}(1-3y)=\frac{1}{4}+y$

f. $-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}+\frac{b}{2}\right)=-b+\frac{3}{2}$

2. Determinar el valor de k para el cual la ecuación de la recta -$9x+ky=6$:
   a. contiene al punto (1,5).
   b. es paralela al eje de las ordenadas.
   c. es paralela a la recta de la ecuación $3x+y=1$.
   d. es perpendicular a la recta $y-3=2(x-1)$.
3. La recta $y=-\frac{4}{5}x-2$ determina dos semiplanos. Grafique. ¿El punto de coordenadas (1,1) está por arriba o por debajo de la recta?
4. Determine la recta que pasa por los puntos $P(-3,6)$ y $Q(2,-2)$. Escribir una recta paralela y perpendicular a la misma. Grafique las tres rectas en el mismo plano cartesiano.
5. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones. Indique para cada uno de ellos si es compatible o incompatible. Si tiene solución indique si es determinado o indeterminado. Luego resuelva por el método gráfico.

   a. $\begin{cases} 2x-3y=9 \\ 6x+4y=12 \end{cases}$

   b. $\begin{cases} 2x+3y=6 \\ \frac{x}{3}-\frac{y}{2}=\frac{1}{6} \end{cases}$

   c. $\begin{cases} 2x-3y=-5 \\ -4x+3y=9 \end{cases}$

6. Resuelva:

   a. Un grupo de estudiantes tiene varios libros y mochilas, de modo que si colocan seis libros en cada mochila, queda una mochila vacía y si colocan cinco libros en cada mochila, quedan dos libros sin guardar. ¿Cuántos libros y cuántas mochilas hay?

   b. En una librería los cuadernos cuestan \$1, 20 y los lápices cuestan \$0, 80. En la venta de estos dos artículos, el lunes se recaudaron \$68. El día martes se vendieron la mitad de cuadernos y 15 lápices más que el lunes y se recaudaron \$56. ¿Cuántos cuadernos y cuántos lápices se vendieron el día lunes?

   c. En un colegio hay 1300 alumnos. Si se hubieran inscripto 50 mujeres más, el número de mujeres duplicaría al número de varones. ¿Cuántas mujeres y cuántos varones hay en el colegio?

   d. La suma de dos números es de 123 y uno es el doble del otro. ¿De qué números se trata?

PRÁCTICO 5: Ecuación Cuadrática-Función Cuadrática

1. Cada una de las siguientes expresiones corresponde a una ecuación de segundo grado. Para cada una de ellas,
   a. Calcular el discriminante Δ
   b. Determinar la cantidad de raíces, si son distintas, dobles o complejas.
   c. Calcular las raíces y expresar la ecuación de la forma $a(x-x_1)(x-x_2)$.
      i. $x^2+2x-3=0$
      ii. $x^2+3x-10=0$
      iii. $3x^2+5x-6=0$
      iv. $x^2-5x-5=0$
      v. $x^2+x-1=0$
      vi. $4x^2+4=5x$
      vii. $32x^2+20x+3=0$
      viii. $-x^2-28x+192=0$
      ix. $x^2+7x-9=0$
      x. $3x^2-5x+2=0$
      xi. $9x^2-8x=-1$
      xii. $\left(\frac{5}{2}-2x\right)^2+(x-0.5)^2=x^2$
      xiii. $2x^2=(x+2)^2$
      xiv. $-2x^2+3x=7x+4$
      xv. $5+x(x-7)=9$
      xvi. $x(x-2)=15$
      xvii. $2x^2-12x=-18$
2. Escribir una ecuación de segundo grado de la forma $2x+bx+c=0$ sabiendo que la suma de sus raíces es igual a 2 y su producto también.
3. Escribir tres ecuaciones de segundo grado cuyas raíces sean de igual valor absoluto pero de distinto signo. ¿Qué forma tienen estas ecuaciones?
4. Resolver mentalmente las siguientes ecuaciones, recordando la propiedad de la suma y producto de las raíces de una ecuación de segundo grado. Verificar la respuesta.
   a. $3x^2+2x=0$
   b. $x^2+2x-3=0$
   c. $x^2+2x-15=0$
5. Considerar la ecuación de segundo grado $cx^2+12x+c=0$.
   a. Calcular el valor de c si se sabe que la ecuación tiene dos raíces reales iguales y positivas.
   b. Calcular las raíces de la ecuación para el valor de c calculado en el inciso anterior.
6. La ecuación de segundo grado $ax^2+10x+a=0$ tiene dos raíces iguales.
   a. Indique cual es el valor de a sabiendo que las raíces son negativas.
   b. Calcular las raíces de la ecuación para el valor de a calculado en el inciso anterior.
7. Considerar la ecuación de segundo grado $x^2+bx+c=0$. Sabiendo que $r_1+r_2=2$ y $r_1r_2=-15$.
   a. Indique cual es el valor de b, c, r_1, r_2.
   b. Grafique.
8. Considere la función cuadrática $y=ax^2+bx+c$. Si $a=2$ y sabiendo que posee dos raíces reales x_1 y x_2 y cumplen que $x_1+x_2=-2$ y $x_1x_2=-3$.
   a. Calcule los valores de $b;\ c;\ x_1$ y x_2.

b. Determine las coordenadas del vértice y diga si corresponde a un máximo o un mínimo.
c. Grafique.

9. Resuelve las siguientes ecuaciones completando cuadrados. Verifica la respuesta.
   a. $x^2 + 4x - 4 = 0$
   b. $x^2 - 8x - 20 = 0$
   c. $9x^2 + 36x + 20 = 0$
   d. $3x^2 - 5x - 1 = 0$
10. Escribe un polinomio de segundo grado sabiendo que sus raíces son -1 y 3. ¿Es único? ¿Por qué?
11. Para cada una de las siguientes ecuaciones se les da un valor de raíz. Determinar el valor de la otra raíz y de la constante K.
   a. $x^2 - Kx + 6 = 0;\ x_1 = 3$
   b. $y^2 - 6y + K = 0;\ y_1 = 3$
   c. $w^2 - Kw + 4 = 0;\ w_1 = -2$
   d. $Kb^2 - 3b + 4 = 0;\ b_1 = 1$
12. Encuentre una función cuadrática que tenga a $x = 2$ y $x = 3$ como ceros y cuyo gráfico pase por el punto (0,10).
13. ¿Cuánto debe valer b para que la parábola de la ecuación $y = x^2 + bx + 3$ tenga vértice en el punto (2,-1)?
14. Resolver las siguientes ecuaciones. Verificar que las soluciones obtenidas satisfagan la ecuación.
   a. $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$
   b. $x^4 - 8x^2 - 15 = 0$
15. Un depósito contiene 50 litros de agua, que drenan desde un orificio del fondo, lo cual causa que el depósito se vacíe en 20 minutos. El depósito drena más rápido cuando está casi lleno porque la presión del orificio es mayor. El volumen de agua que permanece en el depósito después de t minutos está dada por $V(t) = 50\left(1 - \frac{t}{20}\right)^2,\ 0 \leq t \leq 20.$

   Determine $V(0)$ y $V(20)$. ¿Qué representan las respuestas anteriores? Grafique.

16. Desde una terraza que se encuentra a 20 metros de altura una mujer lanza una pelota hacia arriba con velocidad inicial de 30m/s. La altura de la pelota en cada instante está dada por la función $y = 5\left[\frac{m}{s_2}\right]t^2 + 30\left[\frac{m}{s}\right]t + 20$. ¿En qué instante la pelota alcanza su altura máxima? ¿Cuál es esa altura? Grafique.
17. Dentro de 11 años la edad de Marcela será la mitad del cuadrado de la edad que tenía hace 13 años. ¿Cuál es la edad de Marcela?
18. ¿Cuáles son las dimensiones de un terreno rectangular, cuya área es de *4 800* m^2 sabiendo que su largo es el triple de su ancho?

a) Realice un esquema interpretativo.

b) Determine el área del terreno en función del ancho *a*.

c) Calcule las dimensiones.

19. Una ventana tiene la forma de un rectángulo con una semicircunferencia en la parte superior, cuyo diámetro mide lo mismo que la base del rectángulo. La altura del rectángulo es el doble de la base.
   a. Realice un esquema interpretativo.
   b. Exprese el área de la ventana en función de la base e identifique el término cuadrático, el término lineal y el término independiente.
   c. Calcule el área si la base mide 60 cm.

20. Se quiere calcular las dimensiones mínimas de una chapa rectangular con la que se va a construir un tarro cilíndrico con base pero sin tapa, de un litro de capacidad, cuya altura mide lo mismo que el diámetro de la base.
    a. Realice un esquema interpretativo.
    b. Exprese el área del tarro en función de una sola variable, diámetro de la base o altura.
    c. Calcule las dimensiones del tarro.
    d. Calcule las dimensiones mínimas de la chapa para construirlo.

<u>Ejercicios a entregar:</u>

1. Resolver:
    a. $x^2 - 3x + 2 = 0$
    b. $x + \frac{6}{x} = 5$
    c. $(x+1)^2 + 3 = 0$
    d. $(2x+3)^2 - 9 = 0$
    e. $(2x+3)(7x-1) = 0$
    f. $(x-1)(x+1) = 3$
2. Escribir en la forma de $k(x+a)^2 + b$, hallar las raíces y graficar.
    a. $x^2 + x - 1$
    b. $x^2 - 2x + 1$
    c. $x^2 - x$
    d. $2x^2 - x + 5$
    e. $\frac{7}{2}x^2 - \frac{1}{5}x + 1$
3. Hallar el máximo o mínimo según correspondan.
    a. $y = x^2 + 2$
    b. $y = -x^2 - \frac{1}{5}$
    c. $y = -2(x+3)^2 + 1$
    d. $y = -3x^2 + 2x + 1$
4. Considere la función cuadrática $y = ax^2 + bx + c$. Si $a = 4$ y sabiendo que posee dos raíces reales x_1 y x_2 y cumplen $x_1 + x_2 = -3$ y $x_1 x_2 = 2$.
    a. Calcule los valores de b, c, x_1 y x_2.
    b. Determine las coordenadas del vértice y diga si corresponde a un máximo o un mínimo.
    c. Grafique.
5. Si $\mathrm{P(x)} = 4\mathrm{x}^2 - 4\mathrm{x} + \mathrm{k}$, ¿Cuánto vale k si sabemos que P tiene dos raíces iguales?
6. Sean r_1 y r_2 las raíces de un polinomio $\mathrm{ax}^2 + \mathrm{bx} + \mathrm{c}$. Encuentre los siguientes números:

    a. $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$
    b. $|r_1 - r_2|$
7. Resolver las siguientes ecuaciones. Verificar que las soluciones obtenidas satisfagan la ecuación.
    a. $x^4 - 4x^2 + 4 = 0$
    b. $x^2(x+4) = 5x$

8. La altura de un proyectil que es disparado desde 120 metros del suelo puede describirse mediante la fórmula $-15t^2 + 30t + 120$. Donde t es el tiempo transcurrido, medido en segundos.
    a. Hallar la altura máxima del proyectil
    b. ¿Cuánto tarda el proyectil en caer al suelo?
9. La suma de dos números es 10, y la suma de sus cuadrados es 60. Hallar los números.

PRÁCTICO 6: Ecuaciones

1. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, reemplazando el valor de x en la ecuación. Justifique su respuesta.
   a. $x = 3$ es solución de $x^2 - 3 = 6$
   b. $x = \sqrt{2}$ es solución de $x^2 - \sqrt{2} = \sqrt{2}$
   c. $x = \sqrt{2} + 1$ es solución de $(x - 1)\sqrt{2} = 2$
2. Resolver las siguientes ecuaciones. Verifique el resultado obtenido.
   a. $x^2 + 3x - 5 = x(x - 8) + 9$
   b. $(x - 3)(2x - 5) = (x - 3)(3 - 4x)$
   c. $(x^2 + x)^2 - x(x^2 + x) = 0$
   d. $\frac{2x-4}{x} = 7$
   e. $\frac{x^2+2x-8}{4x+7} = 1$
   f. $\frac{2x+1}{x+2} = \frac{x-2}{3}$
   g. $\frac{7x+1}{2x-4} = \frac{10x+3}{3x-6}$
   h. $\frac{2}{x-5} - \frac{3}{x-4} = 0$
   i. $\frac{5}{x+3} = \frac{3}{2x} - \frac{2}{x-3}$
   j. $\frac{x+2}{x+1} = 2\frac{x-2}{x-1}$
   k. $\frac{4x}{x+2} - \frac{10}{3} = \frac{2}{x-2}$
   l. $\frac{x}{6} = \frac{4}{x+2}$
   m. $\frac{(x+1)(2x+3)}{x+5} = \frac{(1+x)(x-3)}{x-5}$
   n. $\frac{x\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\frac{3x}{2}-2} = \frac{(2x-1)x}{x-1}$
   o. $\frac{(x+1)^2}{3x+2} = \frac{4(x+1)}{7x-3}$
   p. $x = 13\sqrt{x} - 36$
   q. $\left(\sqrt{y} - 2\right)^2 = 5 - \sqrt{y}$
   r. $z + \frac{6}{z} = 7$
   s. $\frac{1}{x-5} + x^{-1} = \frac{3}{4}$
   t. $\frac{x+2}{x+1} - \frac{x+4}{x+3} + 2 = 0$
   u. $-3x + 1 = \frac{1}{3x+1}$
   v. $\frac{3x^2-1}{2} - \frac{2x}{3} = \frac{x}{6} + \frac{5x^2}{4}$
   w. $\sqrt{\frac{1}{3}}x^2 - \sqrt{12}x = 0$
   x. $\frac{x+1}{3x} - 1 = \frac{1-x}{2}$
   y. $\sqrt[5]{x^3 + 63} = -1$

3. Resuelva las siguientes ecuaciones en R.
   a. $|x| = 1$
   b. $|x + 2| = 0$
   c. $|x^2 + 3x| = 0$
   d. $|x| = -1$
   e. $|3x - 2| = 4$
   f. $|5x| = 5$

g. $|x-5| = 1.5$
h. $|3x+4| = 1$
i. $|-2x-7| = 3$
j. $\left|\frac{1}{2}x-3\right| = 2$
k. $\left|3x-\frac{1}{5}\right| = 2$
l. $|2x+3| = |3x+2|$

4. Un niño tiene el triple de la edad que tenía hace 8 años. ¿Qué edad tiene ahora?

5. Un padre tiene 42 años y su hijo 10 años. ¿Dentro de cuántos años la edad del padre será el triple de la edad del hijo?

6. De una cierta clase de vino que contiene 12% de alcohol, se han obtenido por destilación 67,68 litros de alcohol. ¿Cuál fue la cantidad de vino empleado?

7. El jueves, Leticia invirtió el 40% de sus ahorros en ropa. El viernes, gastó las dos terceras partes del dinero que le quedaba en un libro para su hermano, y aún tiene $120.
   m. ¿Cuánto dinero tenía ahorrado Leticia?
   n. ¿Es cierto que gastó lo mismo en ropa que en el libro para su hermano?

8. Un hombre repartió su herencia del siguiente modo: a su hijo mayor le dejó la mitad, al segundo la tercera parte del resto, al tercero la sexta parte del resto y al cuarto $1.000.000. ¿Cuál era el valor de la herencia?

9. Un comerciante hace un testamento de la siguiente forma: dos tercios a su único hijo; un quinto, a una familia muy amiga, y los 49000 restantes, a una institución de beneficencia. ¿A cuánto asciende el total de la herencia?

10. En una reunión hay el doble número de mujeres que de hombres y el triple número de niños que de hombres y mujeres juntos. Hallar el número de hombres, mujeres y niños que hay en la reunión si el total es de 156 personas.

11. Durante su primera hora de trabajo, el dueño de un puesto de revistas vendió la cuarta parte de los diarios que tenía y, durante la segunda hora, vendió la sexta parte de los que le quedaban. Contó los ejemplares y notó que aún había 25. ¿Cuántos diarios tenía al principio?

12. Ana, Vivi y Carla comparten un departamento y las tres aportaron su último sueldo a un fondo común, que fue de $3600. Ana gana las dos terceras partes del sueldo de Vivi, y Carla gana la mitad del sueldo de Ana. ¿Cuál fue el último sueldo de cada una? ¿Es cierto que Vivi cobró tanto como Ana y Carla juntas?

13. Una compañía de aviación divide a los pasajeros en tres categorías. En uno de sus aviones, la cantidad de asientos de primera clase es la octava parte del total; la categoría ejecutiva tiene una vez y media la cantidad de asientos que primera clase, y hay 165 asientos de clase turista. ¿Cuántos asientos tiene ese avión?

14. Resolver las siguientes ecuaciones fraccionarias:
   a. $\frac{11}{x} - 2 = \frac{3}{x}$
   b. $\frac{5}{x} - \frac{3}{2} = \frac{3}{x}$
   c. $\frac{2x-1}{3x+2} = 7$
   d. $\frac{5}{0.6x} + \frac{7}{3} = \frac{16}{1.5x}$
   e. $\frac{2}{x+1} = \frac{3}{x-1}$

f. $\frac{7}{2x}-\frac{8}{3x}+\frac{9}{4x}-\frac{1}{3}=\frac{31-7x}{6x}$

g. $\frac{3}{4x}-\frac{5}{14}-\frac{8}{7x}=\frac{1}{x}+\frac{1}{4}-\frac{11}{14x}$

h. $\frac{x+4}{x-3}-\frac{2x+5}{2x}=0$

i. $\frac{13}{2x+3}-\frac{11}{x+3}=0$

<u>Ejercicios a entregar:</u>

1. Resolver las siguientes ecuaciones:

   a. $8x-(4+2x)=-52$

   b. $\frac{3(x-1)}{4}+\frac{x}{2}=3$

   c. $\frac{2}{x}+\frac{3}{x}-\frac{4}{x}=5$

   d. $2(3-x)+5x-11=x-4+2\left(x-\frac{1}{2}\right)$

   e. $\frac{6x}{x-1}-\frac{2x-3}{x-2}=\frac{2x+2}{x-2}+\frac{2x}{x-2}$

   f. $2(3x-1)+5=1-3(4-2x)$

   g. $\frac{3x^2+4x}{2x-1}+\frac{2x-4x^2}{3-x}=\frac{4x^2+2}{x-3}-\frac{3x^2-6}{1-2x}$

   h. $\frac{2x+1}{x+3}=1+\frac{x+3}{x-1}$

   i. $\frac{x+4}{x-4}-\frac{x-4}{x+4}=\frac{(2x)^2}{x^2-16}$

   j. $\frac{\frac{x^2+2x+4}{(x+2)^2}}{\frac{x^3-8}{x^2-4}}=1$

   k. $\frac{x^2-5x+4}{x^2+2x+1}=0$

   l. $\frac{3}{x-1}=\frac{8x}{2x-1}$

2. Resolver las siguientes ecuaciones:

   a. $y^4+3y^3+3y^2+y=0$

   b. $y^5-4y^3+4y=0$

   c. $2\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}=1$

   d. $x^2+x+|x|+1=0$

   e. $|x^2-9|+|x^2-4|=5$

   f. $x^2+2|x|=0$

   g. $x^2+|2x+1|=0$

1. La cantidad de pasos que da una persona al caminar durante un minuto (N), dividida por la longitud de un paso en metros (P) es aproximadamente 140. a)
   a. Si la longitud es P=0,80 ¿Cuál es la velocidad en metros por minuto? ¿Y en kilómetros por hora?

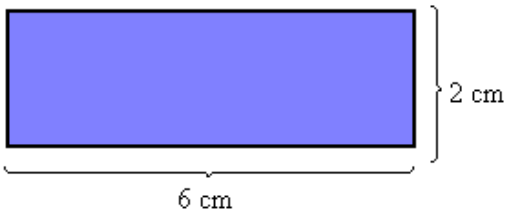
   b. Calcule su propia velocidad a partir de su longitud de paso P
2. Resolver:
   a. Si doy 70 pasos por minuto ¿Cuál es la longitud de mi paso? Ejercicio A4 a) Si 326 automóviles pesan 521 toneladas ¿Cuántas toneladas pesan 732 automóviles?
   b. Carlos y Laura corren la misma velocidad en una rotonda, pero Laura empezó mas tarde. Si cuando Laura dio 5 vueltas, Carlos dio 15 ¿Cuántas habrá dado Carlos cuando Laura dio 15? c) Con 10kg de harina hago 13kg de pan ¿Cuántos haré con 23kg de harina? d) Cuelgo 3 toallas en una soga y se secan en 12 horas. Si el vecino cuelga 6 toallas ¿Cuánto tardaran en secarse? e) La locomotora de un tren mide 12m. Si se conectan a la locomotora 4 vagones, el tren mide 52m. ¿Cuánto medirá si se conectan 8?
3. En Ciudad Gótica el 80% de la gente votaría a Batman antes que a Superman, pero en Metrópolis solo lo haría el 40%. Si en Ciudad Gótica la población es la cuarta parte que en Metrópolis ¿Qué porcentaje de gente de ambas ciudades votaría a Batman?
   a. 60%
   b. 48%
   c. 40%
   d. 30%
   e. Ninguna de las anteriores
4. Juan va al gimnasio y utiliza la cinta. Si quema el triple de calorías corriendo que caminando, y por cada minuto caminado corre 3 minutos ¿Qué porcentaje del total de calorías quemadas en la cinta las consume corriendo?
   a. 50%
   b. 70%
   c. 80%
   d. 90%
   e. 95%
5. Nerón dijo que de los 4 caminos que conducen a Roma, el más largo tiene una longitud igual a la suma de los otros 3, aunque los dos más cortos suman la mitad del segundo más largo. El segundo más largo mide entonces:
   a. $\frac{2}{3}$ del más largo
   b. $\frac{1}{10}$ del más largo
   c. $\frac{1}{2}$ del más largo
   d. $\frac{1}{3}$ del más largo
   e. $\frac{1}{4}$ del más largo

PRÁCTICO 7: Inecuaciones

1. Encuentre y dibuje en la recta real los conjuntos de puntos que satisfacen las siguientes desigualdades.
   a. $2x + 3 \leq x + 7$
   b. $2 < 4x < x + 9$
   c. $1 - x < 3 - 2x$
   d. $x + 1 < 3x < 3 + x$

2. Sean $x, y \in$ R. Si $x > y > 0$, indique cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas.
   a. $\frac{1}{x} > \frac{1}{y}$
   b. $-x > -y$
   c. $x - y > 0$
2. Resolver las siguientes inecuaciones y representar el conjunto solución en la recta real:
   a. $2x - 3 < 4 - 2x$
   b. $5 + 3x \leq 4 - x$
   c. $4 - 2t > t - 5$
   d. $x + 8 \leq 3x + 1$
   e. $2\left(x - \frac{1}{2}\right) > 3x$
   f. $\frac{a+2}{4} \leq \frac{a-1}{3}$
   g. $3x - 12 \leq \frac{5x-6}{4}$
   h. $3(4 - x) > 18x + 5$
   i. $\frac{x}{3} + \frac{x}{2} > 5 - \frac{x}{6}$
   j. $-\frac{x}{4} - 4 \geq \frac{5x}{3} - \frac{1}{6}$
   k. $\frac{5x-2}{3} - \frac{x-8}{4} > \frac{x+14}{2} - 2$
   l. $\frac{x}{2} + \frac{x+1}{7} - x + 2 < 0$
   m. $\left(2 - \frac{1}{3}x\right)(-3) + 4\left(-\frac{1}{2}x + \frac{7}{4}\right) > 0$
   n. $x - \sqrt{2} > 0$

3. ¿Cuál es el menor número entero múltiplo de *4*, que satisface la siguiente inecuación $x + 2 < 3x + 1$?
4. Si el lado de un cuadrado es mayor o igual que *7*cm. ¿Qué se puede decir de su perímetro *p*?
5. Si el perímetro de un cuadrado no supera el perímetro del rectángulo de la figura, qué se puede asegurar acerca de la superficie *S* del cuadrado?



6. Un padre y su hijo se llevan *22* años. Determinar en qué período de sus vidas, la edad del padre excede en más de *6* años al doble de la edad del hijo.
7. Un coche se desplaza por una carretera a una velocidad comprendida entre *100* Km/h y *150* Km/h. ¿Entre qué valores oscila la distancia del coche al punto de partida al cabo de *3* horas?
8. Halle los valores de *x* para los cuáles el área del cuadrado es mayor que la del rectángulo si uno de los lados del rectángulo mide 23 cm.

9. El largo l y el ancho a de un terreno rectangular son tales que $70 \leq l \leq 72$ y $54 \leq a \leq 56$. Calcular entre que valores pueden variar el área y el perímetro del terreno.
10. El conjunto solución de $\left|-\frac{1}{3}(4x-5)\right| = 4$ es:
    a) {17/4, -7/4}
    b) {-7/4; -17/4}
    c) $\{\ \}$
    d) {-7/4}
    e) {17/4}
11. Obtenga el conjunto solución de las siguientes desigualdades:
    a. $|x+2| < 1$
    b. $|4x-5| < 10$
    c. $|2x-7| > 3$
    d. $|x-2| \geq 5$
    e. $|2x-1| > 2$
    f. $\left|\frac{x}{a}+1\right| < 1$
    g. $\left|\frac{2x}{7}-5\right| \geq 7$
    h. $\left|\frac{x-2}{3}\right| < 2$
    i. 8-$|2x-1| \geq 6$
    j. $7|x+2|+5 > 4|x|$
    k. $-|2x+1| > |x|$
    l. $|x-5| \leq 3|x+2|$

<u>Ejercicios a entregar:</u>

1. Sean $r, s \in$ R. Si $r > s$, indique cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas.
    a. $\frac{1}{r-s} > \frac{1}{s-r}$
    b. $(r-s)(s-r) > 0$
    c. $\frac{r-s}{s-r} > 0$
2. Resolver las siguientes desigualdades, grafique el conjunto solución y expréselo en notación de intervalo.
    a. $10 - \frac{5x}{5} \geq 0$
    b. $\frac{34-2x}{3} + 9 < \frac{3x-8}{4} - x$
    c. $4 > \frac{2-3x}{7} \geq 2$
    d. $-3x+1 \leq 5(x-3)+2$
    e. $(x-1)^2 - 7 > (x-2)^2$
    f. $-1 \leq \frac{3x-1}{7} < 3$
    g. $x(x-2) > 0$
    h. $(1-2x)x > 0$
    i. $(2x-1)(x-3) > 0$
    j. $x(1-2x)\left(x+\frac{1}{2}\right) \leq 0$
    k. $2x^3 - x^2 > 0$
    l. $x^2 < x$
    m. $\frac{x^2-x}{(x+1)(2-x)} \geq 0$
    n. $\frac{-1-3x}{1-4x} \leq 2$
    o. $\frac{1}{x+2} \leq -\frac{x^2}{x+2}$
    p. $-\frac{2}{x} \geq -\frac{5x}{x^2+6}$

3. Halle y represente en la recta los números reales que verifican:
   a. $|x - 4| > 2$
   b. $|x+2| \leq 3$
   c. $|4 - x| > 0$
   d. $0 < |x+3| < 1$
   e. $0 < |x-3| < \frac{1}{4}$
   f. $|12 - 4x| > 3$
   g. $|4x - 3| \leq 5$
   h. $|-3x + 6| < 2$
   i. $|1 + 2x| \geq \frac{1}{2}$
   j. $|3 - x| - 5 \geq 0$
4. Una fábrica paga a sus viajantes $10 por artículo vendido más una cantidad fija de $500. Otra fábrica de la competencia paga $15 por artículo y $300 fijos. ¿Cuántos artículos debe vender el viajante de la competencia para ganar más dinero que el primero?
5. La temperatura en la escala Fahrenheit y Celsius están relacionadas por la fórmula $C=(5/9)(F - 32)$. ¿A qué temperatura Fahrenheit corresponderá una temperatura en escala centígrada que se encuentra entre 27°C y 40°C ?
6. Clara tiene varios rollos de 36 fotografías cada uno. Si le falta tomar, a lo sumo 28 fotos para completar 5 rollos, ¿Cuántas fotografías tomó Clara como máximo?

   a. 172 b. 168 c. 162 d. 152 e. 148

7. Una persona sabe que en un bar 3 medialunas y un café con leche cuestan lo mismo que una medialuna, un jugo y un café chico. Como el café chico cuesta la mitad que el café con leche, entonces el jugo cuesta:
   a. Más que dos medialunas y un café con leche
   b. Menos que el café chico
   c. Menos que dos medialunas
   d. Más que dos medialunas
   e. Ninguna de las anteriores