FUNCIONES

Dr. Cristián U. Sánchez

Prólogo de la presente edición.

Estas notas para el Curso de Nivelación son una parte de un cuadernillo impreso, por primera vez, para tal fin en 1992. Han pasado varias correcciones y adiciones de las personas que se mencionan en el Prólogo de la edición de 1998 y que mucho agradezco y valoro.

Los conceptos que se introducen son herramientas muy usadas y que deben ser manejadas con soltura por todas aquellas personas que se acerquen a estudiar algunas de las ciencias que se cultivan en esta institución.

Estudiar Matemática es una actividad a la que, en general, (siempre hay excepciones) los ingresantes no están acostumbrados.

En la escuela ocurren dos posibilidades con los estudiantes:

a) La Matemática les resulta fácil.
b) La Matemática les resulta odiosa.

En el caso (a) no se estudia porque no hace falta. En el caso (b) no se estudia por miles de razones. El resultado es similar en ambos casos.

Así las cosas, lo primero que debemos aprender no es la Matemática sino a estudiarla y ese debiera ser el objetivo número uno durante este cursillo y tal vez extenderse mucho más allá.

Por supuesto hay tantas maneras de estudiar como de bañarse y a nadie le gusta que le digan que hay que jabonar primero. Sin embargo mi escasa experiencia me indica que hay al menos dos reglas de oro (o de hierro) que quiero compartir con ustedes.

I) Nadie maneja un tema a menos que sea capaz de explicárselo a otra persona.

Esta regla es sumamente útil como herramienta para evaluar nuestro conocimiento. La segunda regla está muy relacionada con la primera y es muy importante si uno estudia solo.

II) El tiempo de escritura debe ser por lo menos el doble del de lectura.

Ésta es crucial pues al escribir uno siempre piensa que esto será leído (al menos por uno mismo) y entonces debe entender y explicar los pasos del razonamiento sin aceptar ninguno hasta tenerlo claro.

Estas sencillas (o triviales) ideas nos hacen vislumbrar que el tiempo necesario para esta actividad debe ser abundante y la concentración y dedicación necesaria también. Por suerte frente a la Matemática todos somos iguales y todos estamos como el David de Miguel Ángel. El avanzar con éxito depende sólo de nosotros y es un desafío apasionante.

Sólo me resta decir que estudiar Matemática, Astronomía, Física o Computación es una formidable aventura en más de un sentido y para lograrlo son necesarias cinco cosas: paciencia, perseverancia, paciencia, entusiasmo y paciencia.

Que tengan el mayor de los éxitos en la carrera que están iniciando.

Córdoba, noviembre de 2004.

Cristián U. Sánchez

FUNCIONES

Distancia en el plano.

En el Capítulo I vimos que todo número real se puede representar en una recta y, recíprocamente, cada punto de ésta representa un número real.
Esta misma idea se puede aplicar ahora para representar en el plano los pares ordenados de números reales, o sea los elementos de $\mathbf{R}^2 = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ **.** Recordemos que

(1) $$\mathbf{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbf{R}\}$$

Sin duda el lector conoce bien el plano, con el que ha trabajado desde su más tierna infancia.
Para hacer dicha representación gráfica de $\mathbf{R}^2$, adoptamos el método de dibujar el producto cartesiano. Se dibujan dos rectas perpendiculares que se cortan en sus respectivos puntos O, una horizontal, y la otra vertical, y se indica la unidad en cada una de las dos rectas que en adelante llamaremos ejes coordenados. Las unidades se toman, a la derecha en el eje horizontal, llamado eje de abscisas o más usualmente eje de las *x*, *y* hacia arriba en el vertical, denominado eje de ordenadas o eje de las *y*. El fijar la posición de las unidades determina los positivos en cada eje *y* el orden entre las rectas es primero la horizontal y luego la vertical (Figura 1).

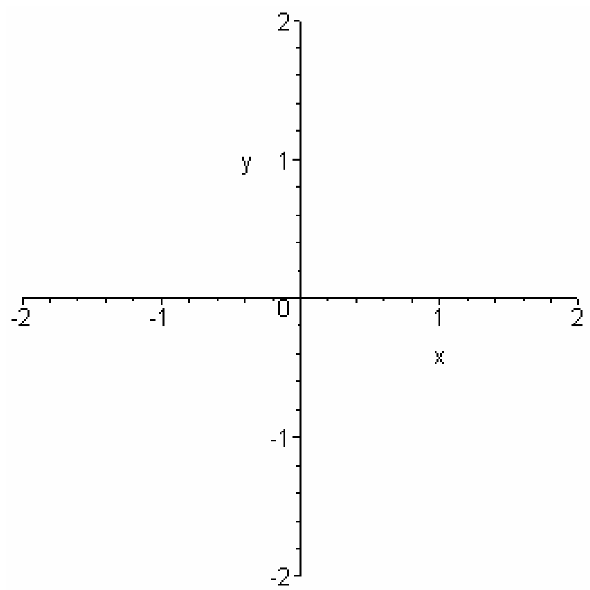

Figura 1

Entonces para representar el par ordenado (*a*, *b*), se marca el número real *a* en el eje de las *x* y el *b* en el eje de las *y*, se trazan las paralelas a los ejes coordenados que pasan por *a* y *b* respectivamente, y el punto donde se cortan es el que representa a (*a*,*b*)

Por ejemplo, para representar (3,2) se toman tres unidades en la recta horizontal y dos en la vertical y se ubica el punto de corte de la recta vertical por 3 y la horizontal por 2, como indica la figura 2.
Es obvio a partir de este procedimiento, pero conviene enfatizarlo, que de este modo a todo par ordenado (*a*,*b*) le corresponde un punto en el plano. Recíprocamente, si tomamos un punto en el plano, podemos encontrar un par ordenado de números reales al cual representa.

Teniendo en cuenta esta correspondencia usaremos habitualmente la expresión “punto del plano” para referirnos también a un elemento de $\mathbf{R}^2$.

El lector debe ver rápidamente cómo representar en el dibujo los puntos

$$(1,1),\quad \left(\frac{1}{2},2\right),\quad (-1,-3),\quad \left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right),\quad \left(\sqrt{2},\sqrt{3}\right)$$

Tomemos un par de puntos en el plano, digamos (a_1,b_1) y (a_2,b_2) y los representemos en nuestro dibujo.

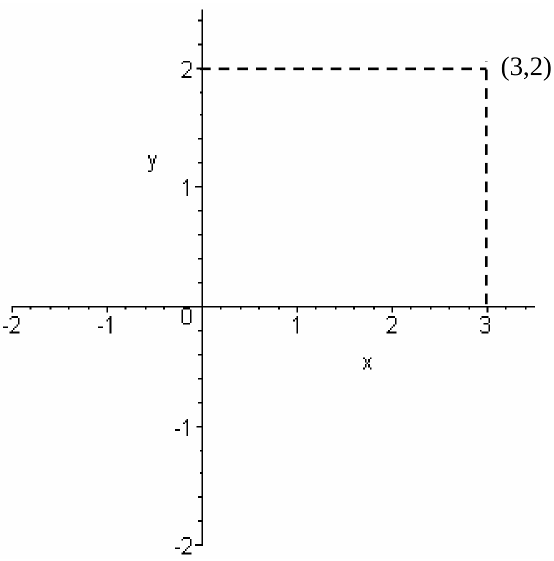

Figura 2

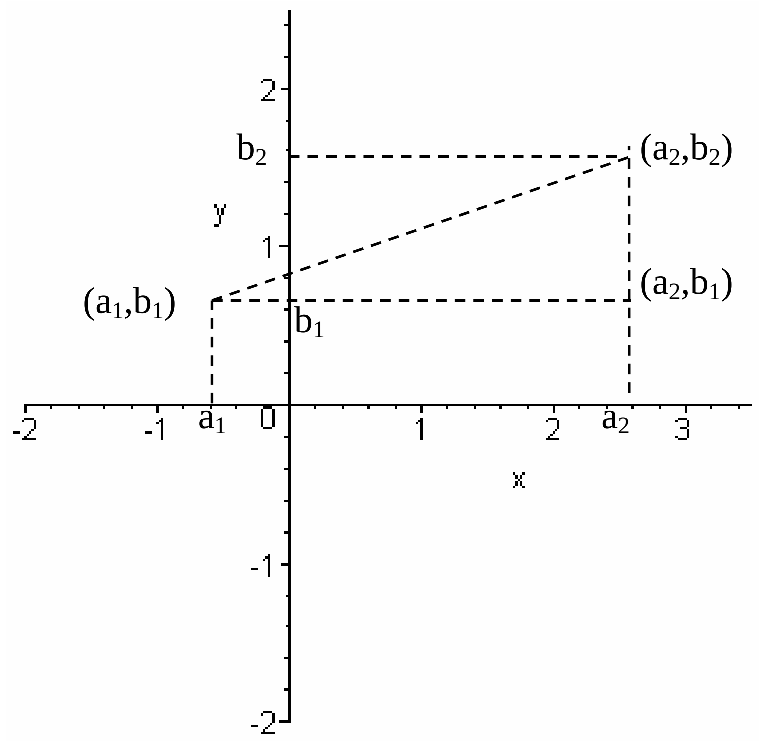

Figura 3

¿Cómo podemos “calcular” la “distancia” entre estos dos puntos? Pitágoras nos dice cómo hacer esto, ya que conocemos (como indica la figura 3) las longitudes de los catetos del triángulo rectángulo formado por estos dos puntos y el (a_2,b_1), que son $(a_1,-a_2)$ y $(b_1,-b_2)$. Guiados por esta idea podemos dar la siguiente definición de distancia entre dos puntos del plano.

Para cada par de puntos (a_1,b_1), $(a_{2,}b_2)$ de $\mathbf{R}^2$ definimos su distancia como el número real

(2) $$d((a_1,b_1),(a_2,b_2)) = \sqrt{(a_1-a_2)^2+(b_1-b_2)^2}$$

Esta distancia, por definición, es **siempre ≥ 0** y es cero si y sólo si $(a_1,b_1)=(a_2,b_2)$, o sea $a_1=a_2$ y $b_1=b_2$.

Naturalmente asociado con la noción de distancia en el plano aparece el conjunto de puntos de dicho plano que equidistan de uno fijo y que, como sabemos, se llama **circunferencia.**

(3) $$C_r = \{(x,y)\in \mathbf{R}^2 : d((x,y),(a,b)) = r\}$$

Como para los puntos de C_r se cumple: $d((x,y),(a,b)) = r$

podemos escribir $r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2$.

El punto (a,b) se llama centro de C_r y el número real r (que es siempre ≥ 0 por definición) **su radio**.

El conjunto

$$D_r = \{(x,y) \in \mathbf{R^2}, : d((x,y),(a,b)) \le r\}$$

se llama **círculo o disco** de radio r y centro (a,b).

Desigualdad Triangular

Es inmediato notar que si tenemos tres puntos en el plano **R², ** distintos dos a dos, digamos (a_1,b_1), (a_2,b_2), (a_3,b_3), y los representamos en un diagrama, ellos formarán un triángulo, a menos que sean colineales. De nuestro conocimiento de la geometría elemental sabemos que las tres distancias que podemos calcular con ellos, cumplirán la desigualdad siguiente.

(4) $$d((a_1,b_1),(a_3,b_3)) \le d((a_1,b_1),(a_2,b_2)) + d((a_2,b_2),(a_3,b_3))$$

La igualdad sólo se dará en el caso especial en que el punto (a_2,b_2) esté en el segmento que une (a_1,b_1) con (a_3,b_3).

Esta desigualdad se llama **desigualdad triangular** en el plano.

Funciones

El lector ha tenido casi seguramente algún encuentro con el concepto de **función** que esperamos haya sido “cercano del tercer tipo”. De todos modos haremos unos breves comentarios muy elementales por los cuales el “iniciado” no debe sentirse afectado.

En general la noción de función involucra tres cosas:

(1) un conjunto D llamado dominio,
(2) un conjunto C que se llama codominio o conjunto de llegada y
(3) una regla que asigna a cada elemento de D un elemento (y solamente uno) de C.

La función f de D en C es el conjunto de los pares ordenados

f = {(x,y): $x \in D$, y es el **correspondiente** elemento de C}

Notar que f no contiene dos pares con el mismo primer elemento. En otras palabras, si $(x,y_1) \in f$ y $(x,y_2) \in f$, entonces $y_1 = y_2$**.** Podemos ahora dar formalmente la siguiente

(5) **Definición.** Una función f de D en C es un subconjunto de D x C tal que si $(x,y_1) \in f$, $(x,y_2) \in f$, entonces $y_1 = y_2$ y además para cada $x \in D$ existe un $y \in C$ de modo que $(x,y) \in f$. D se llama dominio de f y se denota Dom f.

A veces uno puede ingeniarse para describir los pares (x,y) que constituyen una función de manera sencilla; pero otras veces, hay que describir cada par. Por ejemplo sea D el conjunto de todos los seres humanos vivos hoy y sea $C=\{n\in Z{:}0 \le n \le 200\}$. Nuestra función es la función **Edad** y para definirla debemos construir cada par (yo, 18), (Tito, 20), (Marta, 15), (Mirta Legrand, ?)...

Afortunadamente, las funciones que encontraremos, al menos por ahora, serán todas muy sencillas y tanto D como C serán subconjuntos de los reales **R**. Por ejemplo,

$$f_1 = \{(x,y)\in \mathbf{R}^2 : x\in \mathbf{R}, y = x\}$$

$$f_2 = \{(x,y)\in \mathbf{R}^2 : x\in \mathbf{R}, y = |x|\}$$

son claramente funciones pues, por ejemplo, si

$(x,y_1)\in f_2$ y $(x,y_2)\in f_2$

entonces $y_1 = |x|$ y también $y_2 = |x|$, de modo $y_1 = y_2$. El lector verificará que f_1 es una función.

Es muy fácil encontrar ejemplos de subconjuntos de $\mathbf{R}^2$ que no constituyen funciones. Por ejemplo, es inmediato que $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x = 1,\ y\in \mathbf{R}\}$ no es una función.

Es usual denotar por $f(x)$ el segundo elemento del par $(x, y)\in f$ y decir que $f(x)$ es el **valor** de f en el punto $x\in D$, o también la **imagen** de x por f. El conjunto $\{f(x) : x\in D\}$ se llama **imagen** de f y se denota Im f.

Generalmente la función es descripta especificando D y luego la regla para formar los pares (x, y) que están en f.

Ejemplo. D = **R** , $f(x) = x^2 + 2$.

Muchas veces se sobreentiende el dominio de la función pensando que D es el subconjunto de **R** donde la expresión $f(x)$ tenga sentido. Por ejemplo podemos escribir

$$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \qquad f(x) = 3 + \frac{1}{x}$$

y así se entiende que Dom $f \subset \mathbf{R}$, Codominio de f = **R** y que Dom $f = \{x\in \mathbf{R} : x\neq 0\}$. El lector notará que en este caso Im $f = \{y\in \mathbf{R} : y \neq 3\}$.

Ejemplo. Encontrar el dominio y la imagen de la función

$$h: \mathbf{R}\to\mathbf{R} \qquad h(x) = \frac{x}{|x|}$$

Sólo tiene sentido calcular $h(x)$ en los números reales no nulos. Así que Dom $h=\{x\in R : x \neq 0\}$. Encontramos la imagen: Si $x > 0$, entonces $h(x) = \frac{x}{x} = 1$, mientras que si $x < 0$ tenemos $h(x) = \frac{x}{-x} = -1$. Vemos así que la imagen de h está formada sólo por los reales 1 y -1, o sea Im $h = \{1,-1\}$.

Gráficos de funciones

Como las funciones con las que tratamos son conjuntos de pares de números reales y podemos ver los subconjuntos de $\mathbf{R}^2$ presentados o dibujados en el plano, entonces podemos dibujar nuestras funciones. Es usual la denominación de “gráfico de función *f*” para indicar exactamente lo mismo que nosotros llamamos “la función *f*”, es decir el subconjunto del plano

$$\{(x,y)\in \mathbf{R}^2 : x\in D, y = f(x)\}$$

Adheriremos también a esta manera de expresarse pues es generalmente conveniente hablar el idioma que se habla en el lugar donde uno vive.

Hagamos algunos ejemplos de gráficos de funciones sencillas

(6) $$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \qquad f(x) = x^2$$

Hacemos una pequeña tabla de algunos de los valores de la función y luego tratamos de completar el gráfico. Los puntos calculados nos dan una idea, aunque muy grosera, de la forma de nuestro gráfico. El método de calcular algunos puntos y luego completar es un mal método, pero es el único que podemos usar por el momento. El gráfico de esta función es un ejemplo de una **parábola.**

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9

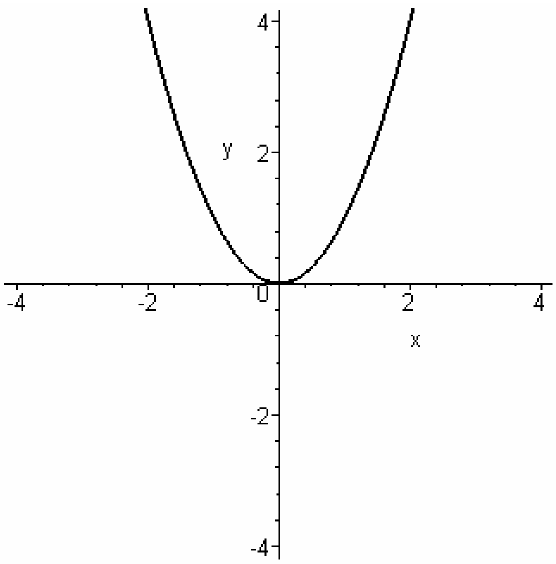

Figura 4

$$h : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \qquad h(x) = \frac{x}{|x|}$$

Este resulta más sencillo aunque hay que recordar lo que notamos arriba, Dom h $= \{x\in \mathbf{R} : x \neq 0\}$. Aquí no hace falta calcular nada pues vimos que si x > 0, entonces $h(x) = 1$, mientras que $h(x) = -1$ si $x < 0$. Se ve claramente que el gráfico de h es

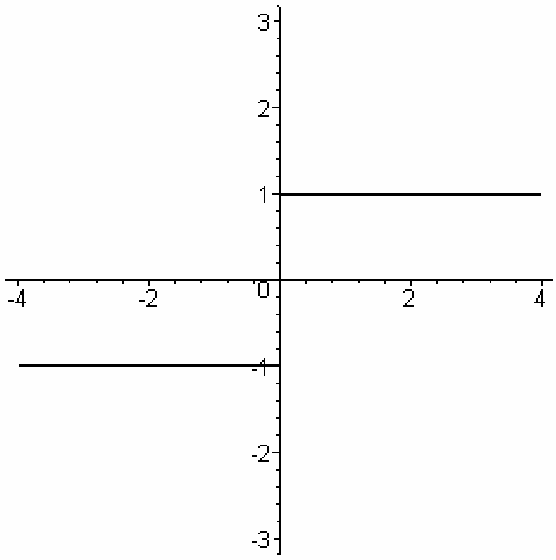

Figura 5

En el gráfico de h no hay pares de la forma (0, algo).

(7) $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ $f(x) = \dfrac{1}{x}$

Recurrimos nuevamente a la tabla. Una observación paciente de ésta, agregada a nuestra intuición de que al dividir 1 por un número muy pequeño da un cociente grande y al revés, al dividir por un número grande da un resultado chico, nos permite visualizar la forma de este gráfico.

x	-4	-3	-2	-1	- 1/2	- 1/4	- 1/6	1/6	1/4	1/2	1	2	3	4
y	- 1/4	- 1/3	- 1/2	-1	-2	-4	-6	6	4	2	1	1/2	1/3	1/4

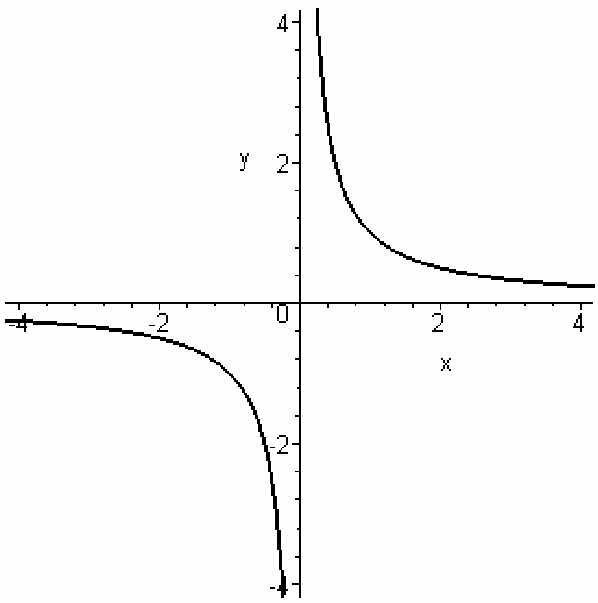

Figura 6

El gráfico de esta función es un ejemplo de una **hipérbola equilátera.**

$$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \qquad f(x) = \frac{1}{x^2} \qquad \text{Dom } f = \{x \in \mathbf{R} : x \neq 0\}$$

A esta altura el lector debe poder imaginar el gráfico de esta función sin necesidad de hacer una tabla.

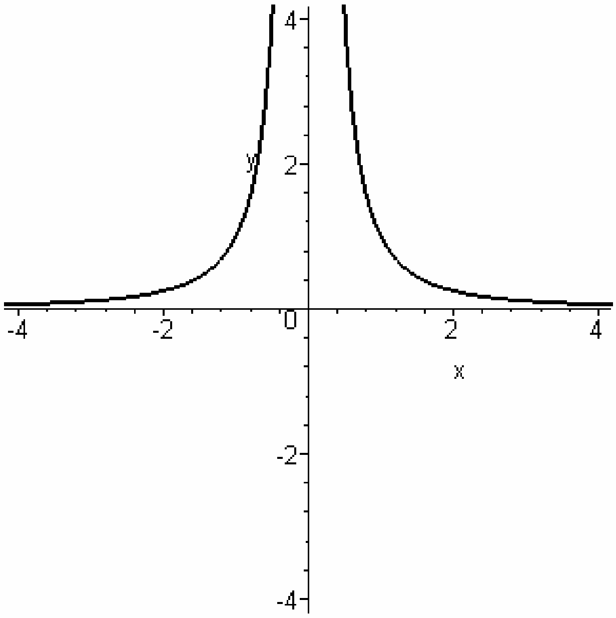

Figura 7

Gráficos de Ecuaciones

Volvamos a nuestra circunferencia (3), $C_r = \{(x,y) \in R^2 : (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2\}$ y específicamente en la situación r = 1 y $(a,b) = (0,0)$.

Todos sabemos dibujar en $\mathbf{R}^2$ la circunferencia C_1.

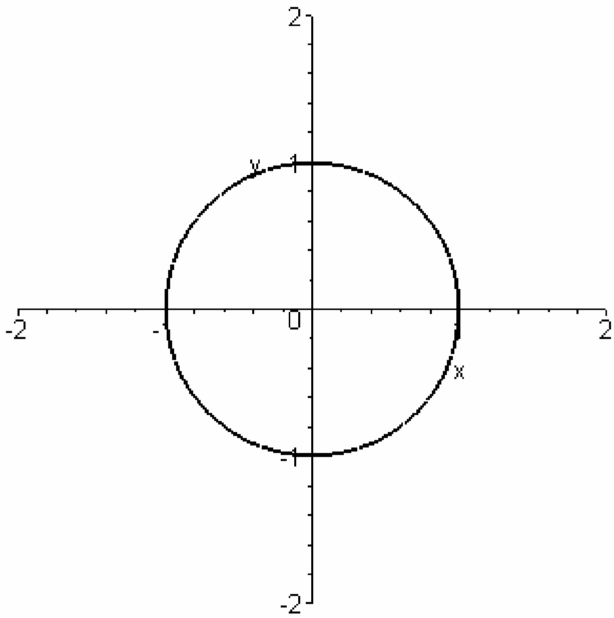

Figura 8

Este conjunto de puntos en el plano **no es el gráfico de una función**. Es claro que para cada $x \in (-1,1)$ hay dos valores de y que satisfacen la ecuación $x^2 + y^2 = 1$. Ellos son para cada x, $\sqrt{1-x^2}$ y $-\sqrt{1-x^2}$. Esto nos lleva al concepto de **gráfico de una ecuación**. Este es el subconjunto de $\mathbf{R}^2$ formado por todos los pares (x,y) que satisfacen dicha ecuación.

Veamos un ejemplo de esta situación.

Ejemplo. Dibujar el gráfico de la ecuación $y + |y| = x + |x|$

o lo que es equivalente, describir el conjunto

$$\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : y + |y| = x + |x|\} .$$

Una manera de hacer esto es trabajar separadamente con el gráfico de cada cuadrante.

Si $x \geq 0$, $y \geq 0$ entonces tenemos $|x| = x$, $|y| = y$, y en este caso la ecuación se transforma en $2y = 2x$, o sea, $x = y$. Es inmediato ver que ésta es la línea bisectriz del primer cuadrante.

En el segundo cuadrante, si $x < 0$, $y > 0$, tenemos en cambio $|y| = y$ pero $|x| = -x$. En estas condiciones la ecuación se transforma en $2y = 0$. Como $y > 0$, éste no puede satisfacer tal ecuación, lo que nos dice que en este cuadrante no hay ninguna solución.

Similarmente vemos que en el cuarto cuadrante, si $x > 0$, $y < 0$, tampoco hay ninguna solución ya que sólo estamos intercambiando los roles de x e y respecto al caso del segundo cuadrante.

Veamos qué ocurre en el tercer cuadrante $(x \leq 0, y \leq 0)$. Claramente tenemos $|y| = -y$, $|x| = -x$, y la ecuación se transforma en $y - y = x - x$.

Es obvio que todo par (x, y) con $x \leq 0, y \leq 0$ satisface esta ecuación, de modo que su gráfico es

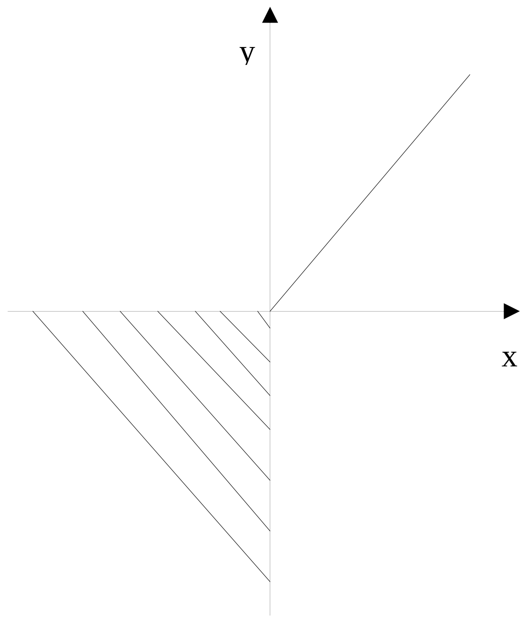

Figura 9

Funciones Pares e Impares

Algunos gráficos de ecuaciones o funciones representan ciertas simetrías que es importante destacar aunque sea brevemente. Por ejemplo el gráfico de la parábola $f(x) = x^2$ es simétrico con respecto al eje y pero no con respecto al eje x. Esto refleja el hecho de que f cumple con la condición

$$f(x) = f(-x)$$

para todo x, es decir, f es lo que se llama una **función par.** Una función f se dice **impar** si $f(x) = -f(-x)$ para todo x. Un ejemplo es la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$, cuyo gráfico, la hipérbola equilátera, presenta otra clase de simetría. De hecho este es el gráfico de la ecuación $x.y = 1$, un caso particular de la ecuación $x.y = c$ ($c > 0$, fijo en **R)**, que tiene un gráfico que no cambia si permutamos los roles de x e y, es decir es simétrico respecto a la recta que es bisectriz de los cuadrantes primero y tercero. Esto refleja el hecho de que en la ecuación $x.y = c$ podemos despejar y como función de x o viceversa siendo la función que obtenemos en cada caso exactamente la misma. Otro ejemplo de esta situación es el gráfico de la ecuación $y + |y| = x + |x|$, que ya vimos.

Claramente la ecuación de la circunferencia presenta estas mismas simetrías y otras nuevas. Por ejemplo es simétrico respecto del centro, lo cual claramente significa que si un punto (x, y) satisface la ecuación de la circunferencia, entonces del mismo modo lo hace el punto $(-x, -y)$.

Funciones lineales

Una función de la forma $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = ax + b$, con a y b números reales fijos, es llamada una **función lineal**. El nombre se debe a que el gráfico de estas funciones es una recta en $\mathbf{R}^2$**.**

Una demostración de este hecho puede darse usando la desigualdad triangular (4) ya que como allí indicamos, se cumple la igualdad sólo en el caso en que el punto (a_2, b_2) esté en el segmento que une (a_1, b_1) con (a_3, b_3).

(8) **Teorema.** El gráfico de la función $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = ax + b$, es una recta que no es paralela al eje y.

Demostración. Debemos mostrar que cualquier terna de puntos del gráfico de f yace en una misma recta. En ese caso todos los puntos del gráfico estarán en una misma recta.

Tomemos x_1, x_2, x_3, en **R** tales que $x_1 < x_2 < x_3$ y consideremos los correspondientes tres puntos del gráfico de nuestra función.

$$P_1 = (x_1, ax_1 + b) \qquad P_2 = (x_2, ax_2 + b) \qquad P_3 = (x_3, ax_3 + b)$$

Ellos estarán en una recta si la distancia $d(P_1, P_3)$ es la suma de $d(P_1, P_2)$ con $d(P_2, P_3)$.

Calculemos estas distancias.

$$d(P_1, P_3) = \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + [(ax_3 + b) - (ax_1 + b)]^2} =$$

$$= \sqrt{(x_3 - x_1) + [a(x_3 - x_1)]^2} =$$

$$= \sqrt{(x_3 - x_1)^2 (1 + a^2)} =$$

$$= \sqrt{(x_3 - x_1)^2} \sqrt{(1 + a^2)} =$$

Como $x_3 > x_1$ tenemos $\sqrt{(x_3 - x_1)^2} = x_3 - x_1$, de modo que

$$d(P_1, P_3) = (x_3 - x_1)\sqrt{(1 + a^2)}$$

De la misma manera se obtiene

$$d(P_1, P_2) = (x_2 - x_1)\sqrt{(1 + a^2)}$$

$$d(P_2, P_3) = (x_3 - x_2)\sqrt{(1 + a^2)}$$

y ahora hacemos la suma

$$d(P_1, P_2) + d(P_2, P_3) = (x_2 - x_1)\sqrt{(1 + a^2)} + (x_3 - x_2)\sqrt{(1 + a^2)} =$$

$$= [(x_2 - x_1) + (x_3 - x_2)]\sqrt{(1 + a^2)} =$$

$$= (x_3 - x_1)\sqrt{(1 + a^2)} = d(P_1, P_3).$$

Por lo tanto nuestros tres puntos están alineados.

Claramente, esta recta no puede ser vertical pues el gráfico de una función no puede contener dos puntos con la misma coordenada *x*. Esto completa la demostración.

Ejemplo. Hacer el gráfico de $f(x) = 3x - 2$.
Como el gráfico es una recta basta encontrar dos puntos en él para dibujarlo. Tomemos por ejemplo $x = 0$, $x = 1$. Entonces, evaluando la función de esos valores de *x*, obtenemos los puntos (0,-2), (1,1) y así el gráfico se puede ver en la Figura 10.

Observemos que, en una función lineal $f(x) = ax + b$, al hacer $x = 0$ se obtiene $f(0) = b$. Este número, que es una parte importante de la función *f*, se llama **ordenada al origen** y tiene un significado geométrico muy claro. Las funciones lineales con $b = 0$ son las de la forma $f(x) = a.x$ y sus gráficos las rectas que pasan por el origen (0,0) de $\mathbf{R}^2$, excepto el eje *y*.

Para interpretar geométricamente el significado del número *a*, tomemos dos puntos distintos cualesquiera $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ en el gráfico de *f*. Por estar en el gráfico, estos puntos satisfacen

$$y_1 = ax_1 + b \qquad y_2 = ax_2 + b$$

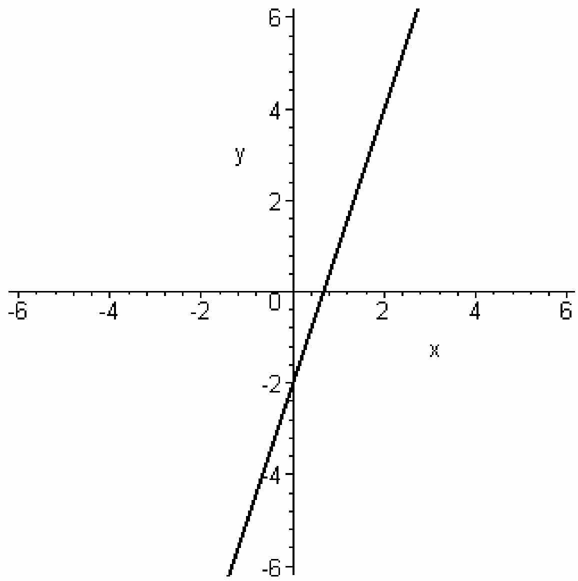

Figura 10

Restando ahora miembro a miembro estas dos igualdades tenemos

$$y_2 - y_1 = a(x_2 - x_1).$$

Y como $(x_2 - x_1) \neq 0$ podemos escribir

(9) $$a = \frac{y_2 - y_1}{(x_2 - x_1)}.$$

Obsérvese que los puntos son arbitrarios de modo que este hecho debe ocurrir para cualquier par de puntos distintos del gráfico de *f*. El número *a* es llamado la **pendiente** de la recta. Las rectas paralelas al eje *y*, **no tienen pendiente.** ¿Cuáles son las rectas de pendiente 0?

Una pregunta que surge naturalmente es si **toda** recta en $\mathbf{R}^2$ es el gráfico de una función lineal.

Teorema. Toda recta no paralela al eje *y*, es el gráfico de una función lineal $f(x) = ax + b$. Una recta paralela al eje *y* es el gráfico de una ecuación $x = a$.

Demostración. Consideramos primero el caso de una recta paralela al eje *y*. Esta recta debe intersecar al eje *x* en algún punto $(a, 0)$. Entonces la coordenada *x* de todo punto de esa recta debe ser $x = a$, lo que nos da la ecuación de dicha recta.

Si la recta no es paralela al eje *y*, debe intersecarlo y también debe cortar a toda recta paralela al eje *y*. Digamos que nuestra recta corta al eje *y* en el punto $(0, b)$ y a la recta $x = 1$ en $(1, c)$. Ahora definimos $a = c - b$ y queremos ver que nuestra recta es el gráfico de $f(x) = ax + b$. Para esto basta notar que la recta definida por $f(x) = ax + b$ tiene dos puntos en común con nuestra recta original y esto es obvio pues ambas contienen a $(0, b)$ y $(1, c)$.

Corolario. Si *A*, *B* y *C* son números reales tales que *A* y *B* no son ambos nulos, entonces el gráfico de la ecuación $Ax + By + C = 0$ es una recta y, recíprocamente, toda recta tiene una ecuación de este tipo.

Demostración. Tenemos dos alternativas (1) $B \neq 0$ y (2) $B = 0$.

(1) Si $B \neq 0$, el punto (x, y) satisface $Ax + By + C = 0$ si y sólo si

$$y = ax + b \quad \text{con} \quad a = \left(-\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}\right)x \quad \text{y} \quad b = -\frac{C}{B}.$$

Vemos así que todo punto en $\mathbf{R}^2$ que satisface $Ax + By + C = 0$ está en la recta $y = ax + b$ y viceversa.

(2) Si $B = 0$, entonces $A \neq 0$ pues hemos supuesto que *A* y *B* no son ambos nulos. La ecuación $Ax + By + C = 0$ se reduce a $Ax + C = 0$, lo que es equivalente $ax = -C / A$, que, como sabemos, es la ecuación de una recta paralela al eje *y*.

La recíproca se deduce claramente del teorema anterior.

Observación. En la recta $Ax + By + C = 0$, si $B \neq 0$, la pendiente es $\left(-\frac{A}{B}\right)$ y la ordenada al origen es $\left(-\frac{C}{B}\right)$. Si $B = 0$ no hay pendiente ni ordenada al origen.

Nos planteamos ahora el problema siguiente. Como sabemos de la geometría elemental, dos puntos distintos en el plano determinan una única recta. ¿Cómo podemos determinar la ecuación de la recta que pasa por dos puntos dados?

Sean $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ los dos puntos en $\mathbf{R}^2$. Si $x_1 = x_2$, la recta paralela al eje *y* de ecuación $x = x_1$ pasa por (x_1, y_1) y (x_2, y_2), luego esa es la ecuación que buscábamos.

Si $x_1 \neq x_2$, la recta no es paralela al eje *y*, por lo tanto es el gráfico de una función lineal $f(x) = ax + b$. Los números *a* y *b* son aún desconocidos y debemos determinarlos. Para eso usamos nuestra hipótesis de que los dos puntos dados están en el gráfico de *f*, es decir

(10)
$$y_1 = ax_1 + b \qquad y_2 = ax_2 + b$$

Tenemos aquí un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, que probablemente hemos aprendido a resolver en la escuela. De todos modos el problema es muy sencillo y podemos proceder del modo siguiente. Restando miembro a miembro ambas igualdades tenemos

$$y_1 - y_2 = a(x_1 - x_2)$$

y ahora como $x_1 \neq x_2$, podemos escribir

$$a = \frac{y_1 - y_2}{(x_1 - x_2)}$$

Esto no constituye ninguna novedad pues esta expresión es exactamente (9), ya sabíamos que un par de puntos sobre la recta nos permiten calcular su pendiente. El problema es ahora calcular *b*. Para esto podemos reemplazar *a* en cualquiera de las ecuaciones (10) y despejar *b*.

Nos preguntamos ahora qué debe ocurrir para que dos rectas sean paralelas.

(11) **Teorema.** Dos rectas con ecuaciones $y = a_1 x + b_1$, $y = a_2 x + b_2$, son paralelas si y sólo si $a_1 = a_{2.}$

Demostración. De la geometría elemental sabemos que dos líneas rectas no paralelas se intersecan en un único punto. Es decir hay un solo par (x_0, y_0) que satisface ambas ecuaciones.

$$y_0 = a_1 x_0 + b_1 \qquad\qquad y_0 = a_2 x_0 + b_2$$

Podemos ahora igualar estas dos expresiones

$$a_1 x_0 + b_1 = a_2 x_0 + b_2$$

Lo cual puede describirse como

(12) $$(a_1 - a_2)\ x_0 = b_2 - b_{1.}$$

Entonces vemos que nuestras rectas no son paralelas si la ecuación (12) tiene una sola solución. Las rectas serán paralelas y distintas si (12) no tiene ninguna solución (esto equivale a decir que no hay ningún punto de corte) mientras que serán coincidentes si (12) tiene más de una solución.

Ahora bien, si $a_1 \neq a_2$, la ecuación (12) tiene una única solución

$$x_0 = \frac{b_2 - b_1}{a_1 - a_2}$$

(recordar que los coeficientes a_1, a_2, b_1, b_2, están fijos).

Entonces, si $a_1 \neq a_2$, las rectas se cortan en un único punto. Esto muestra que si las rectas son paralelas necesariamente debe ocurrir $a_1 = a_2$.

Recíprocamente; si $a_1 = a_2$, tenemos dos situaciones posibles
(1) $b_1 \neq b_2$,

(2) $b_1 = b_2$.

En el caso (1) la ecuación (12) es de la forma

$$0x_0 = (b_2 - b_1)$$

la cual claramente no tiene ninguna solución. En el caso (1) las rectas son paralelas y distintas.

En la situación (2), por el contrario, (12) tiene infinitas soluciones. De hecho, como $a_1 = a_2$ y $b_1 = b_2$, las rectas son evidentemente iguales.

Hemos probado así que si $a_1 = a_2$, entonces las rectas son paralelas, pudiendo ser coincidentes. Esto completa la demostración.

Otro problema importante es el de describir en términos de las pendientes, cuándo dos rectas dadas son perpendiculares.

(13) **Teorema.** Dos rectas, con ecuaciones $y = a_1x+b_1 \quad y = a_2x + b_2$, son perpendiculares si y sólo si $a_2 = -1/a_1$ (Notar que esto requiere obviamente que tanto a_1 como a_2 sean no nulos).

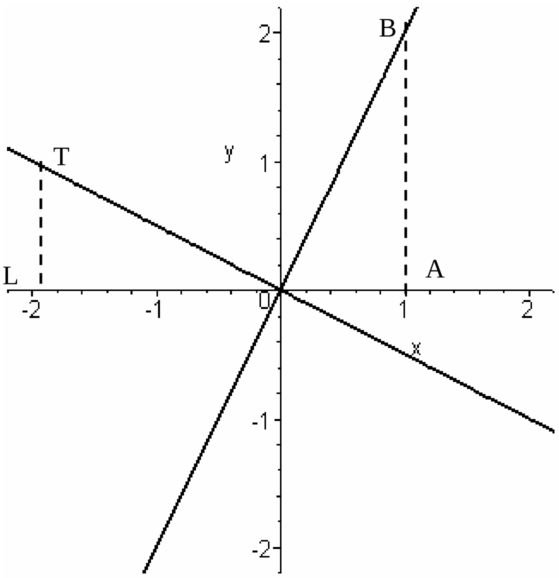

Figura 11

Demostración. Hacemos la demostración primeramente para el caso más sencillo pero más ilustrativo en que b_1 y b_2 son nulos. Así ambas rectas pasan por el origen, que, como vimos en la demostración anterior, es su único punto de corte. La situación es entonces la indicada en la Figura 11.
Como vimos en (9), para calcular la pendiente de una recta basta tomar dos puntos $(x_1, y_1),(x_2, y_2)$ en ella y hacer el cociente

$$\frac{y_2 - y_1}{(x_2 - x_1)}$$

En nuestro caso tomamos, para calcular la pendiente de la recta $y = a_1x$ (con $a_1 > 0$), los puntos (0, 0) y $(1, a_1)$.

Tenemos en el triángulo *ABO* que la base tiene longitud 1 y la altura exactamente a_1. Miremos ahora en la figura el triángulo *TLO*. Este es construido tomando el punto $(-a_1,0)$ (*L* en la figura) y la perpendicular al eje *x* por *L* hasta cortar a la recta de ecuación $y = a_2x$. Es claro por la manera de construir los triángulos y la **perpendicularidad que las rectas tienen por hipótesis**, que los triángulos *ABO* y *TLO* son congruentes. Como consecuencia la altura del *TLO* es exactamente igual a 1.

Ahora tomando los puntos $(-a_1,1)$ y (0, 0), como $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ para calcular la pendiente de la otra recta, tenemos, aplicando la fórmula (9)

$$a_2 = \frac{y_2 - y_1}{(x_2 - x_1)} = \frac{0-1}{(0-(-a_1))} = -\frac{1}{a_1}$$

Recíprocamente, si $a_2 = -1/a_1$, los triángulos *ABO* y *TLO* son semejantes y por lo tanto el ángulo *BOT* es recto, es decir, las rectas son perpendiculares.

El caso en que las rectas no pasan por el origen se obtiene fácilmente de éste trazando, por el punto de corte de las rectas, una paralela al eje *x* y observando que entonces la situación se reduce al caso anterior. Esto completa la demostración.

Gráficos de funciones cuadráticas

Miremos ahora unos gráficos de funciones $y = P(x)$, donde $P(x)$ es un polinomio de grado 2. Estas son las llamadas funciones cuadráticas. En el caso que el discriminante de $P(x)$ fuera mayor o igual que cero tendremos las raíces r_1 y r_2. Estas raíces nos dan valores de *x* para que *y* sea 0, o sea que los puntos $(r_1, 0)$ y $(r_2, 0)$ son los puntos donde se cortan el gráfico de *f* y el eje coordenado *x*. Si $P(0) = s$, entonces (0, s) es el punto de corte entre el gráfico y el eje coordenado *y*. Los gráficos de estas funciones son parábolas que tienen sus ramas hacia arriba o hacia abajo, según que el coeficiente de x^2 sea positivo o negativo, respectivamente.

Ejemplo. $y = -x^2 - 2x + 1$

$$r_1 = -1 + \sqrt{2} \qquad r_2 = -1 - \sqrt{2}$$

x	-3	-2	-1	0	1
y	-2	1	2	1	-2

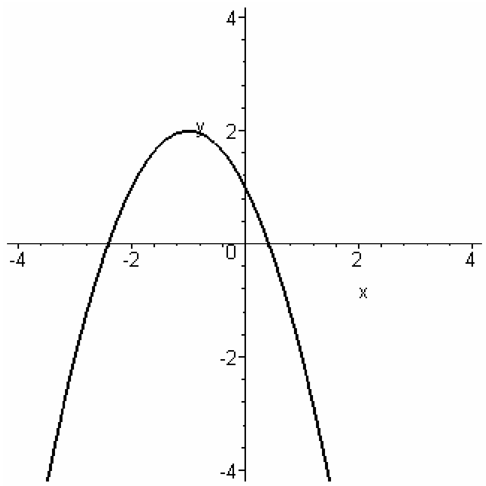

Figura 12

Ejemplo. $y = x^2 - 4x + 5$

En este ejemplo, como el discriminante es 16 - 20 = -4, no tenemos raíces reales y por este motivo el gráfico no corta al eje de las *x*.

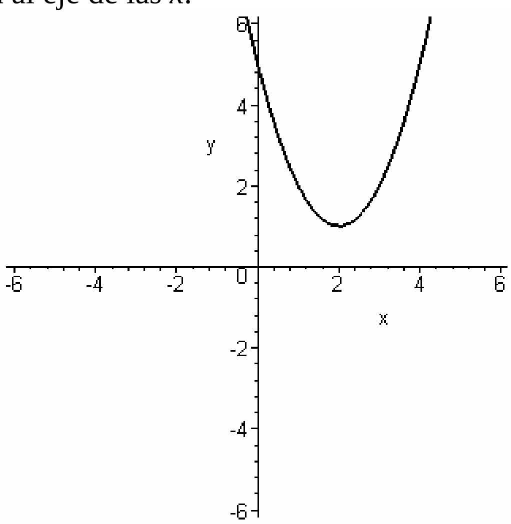

Figura 13