

## Práctica 1

(Nociones básicas de Sistemas de Ecuaciones Lineales)

**Ejercicio 1** Encontrar el conjunto solución a cada una de las siguientes ecuaciones lineales.

a)  $7x - 5y = 3$

b)  $3v - 8w + 2x - y + 4z = 0$

**Ejercicio 2** Hallar la matriz aumentada de cada uno de los siguientes sistemas:

$$\text{a) } \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = -1 \\ 4x_1 + 5x_2 = 3 \\ 7x_1 + 3x_2 = 2 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_4 + x_5 = 1 \\ 3x_2 + x_3 - x_5 = 2 \\ x_3 + 7x_4 = 1 \end{cases}$$

**Ejercicio 3** Determinar un sistema de ecuaciones lineales correspondiente a la matriz aumentada.

a)  $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

b)  $\begin{bmatrix} 7 & 2 & 1 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

c)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

**Ejercicio 4**

a) Encontrar una ecuación lineal en las variables  $x$  e  $y$  que tenga la siguiente solución general:  $x = 5 + 2t$ ,  $y = t$ .

b) Demostrar que  $x = t$ ,  $y = \frac{1}{2}t - \frac{5}{2}$  también es la solución general de la ecuación del inciso a)

**Ejercicio 5** Considerar el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + y + 2z = a \\ x + z = b \\ 2x + y + 3z = c \end{cases}$$

Demostrar que para que este sistema sea consistente,  $a$ ,  $b$  y  $c$  deben satisfacer  $c = a + b$ .

**Ejercicio 6** Indicar cuáles de las siguientes matrices están en forma escalonada reducida.

a)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

b)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

c)  $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

d)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

e)  $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

f)  $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

**Ejercicio 7** Indicar cuáles de las siguientes matrices están en forma escalonada.

$$\text{a) } \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{b) } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

**Ejercicio 8** En cada inciso, determinar si la matriz está en forma escalonada, en forma escalonada reducida, en ambas formas o ninguna.

$$\text{a) } \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{b) } \begin{bmatrix} 1 & -7 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{c) } \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{d) } \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

**Ejercicio 9** Resolver cada uno de los siguientes sistemas, aplicando eliminación de Gauss - Jordan.

$$\text{a) } \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 3x_1 - 7x_2 + 4x_3 = 10 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ -2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 1 \\ 8x_1 + x_2 + 4x_3 = -1 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x - y + 2z - w = -1 \\ 2x + y - 2z - 2w = -2 \\ -x + 2y - 4z + w = 1 \\ 3x - 3w = -3 \end{cases} \quad \text{d) } \begin{cases} -2b + 3c = 1 \\ 3a + 6b - 3c = -2 \\ 6a + 6b + 3c = 5 \end{cases}$$

**Ejercicio 10** Resolver cada uno de los sistemas del ejercicio anterior aplicando eliminación gaussiana.

**Ejercicio 11** Resolver cada uno de los siguientes sistemas, aplicando eliminación de Gauss - Jordan.

$$\text{a) } \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = -2 \\ 2x_1 + x_2 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 4x_1 - 8x_2 = 12 \\ 3x_1 - 6x_2 = 9 \\ -2x_1 + 4x_2 = -6 \end{cases}$$

**Ejercicio 12** Resolver cada uno de los sistemas del ejercicio anterior aplicando eliminación gaussiana.

**Ejercicio 13** Resolver cada uno de los siguientes sistemas, aplicando eliminación de Gauss - Jordan.

$$\text{a) } \begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + 6x_3 = 0 \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 2 \\ x_1 - 12x_2 - 11x_3 - 16x_4 = 5 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} w + 2x - y = 4 \\ x - y = 3 \\ w + 3x - 2y = 1 \\ 2u + 4v + w + 7x = 7 \end{cases}$$

**Ejercicio 14** Resolver cada uno de los sistemas del ejercicio anterior aplicando eliminación gaussiana.

**Ejercicio 15** Sin usar lápiz ni papel, determinar cuáles de los siguientes sistemas homogéneos tienen soluciones no triviales.

$$\text{a) } \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 0 \\ 7x_1 + x_2 - 8x_3 + 9x_4 = 0 \\ 2x_1 + 8x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 - 8x_3 = 0 \\ 4x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{d) } \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 0 \\ 6x_1 - 4x_2 = 0 \end{cases}$$

**Ejercicio 16** Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones homogéneas aplicando cualquier método.

$$\text{a) } \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 5x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} 2x + 2y + 4z = 0 \\ w - y - 3z = 0 \\ 2w + 3x + y + z = 0 \\ -2w + x + 3y - 2z = 0 \end{cases}$$

**Ejercicio 17** Resolver los siguientes sistemas, donde  $a$ ,  $b$  y  $c$  son constantes.

$$\text{a) } \begin{cases} 2x + y = a \\ 3x + 6y = b \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = a \\ 2x_1 + 2x_3 = b \\ 3x_2 + 3x_3 = c \end{cases}$$

**Ejercicio 18** ¿Para qué valores de  $a$  el siguiente sistema no tiene solución? ¿Para qué valores tiene exactamente una solución? ¿Para qué valores tiene infinitas soluciones?

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ 3x - y + 5z = 2 \\ 4x + y + (a^2 - 14)z = a + 2 \end{cases}$$

**Ejercicio 19** Expresar la siguiente matriz de forma escalonada reducida *sin introducir ninguna fracción*.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 7 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

**Ejercicio 20** Encontrar dos formas escalonadas diferentes de la matriz  $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$ .

**Ejercicio 21** Demostrar que, si  $ad - bc \neq 0$ , entonces la forma escalonada reducida de la matriz

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ es la matriz } \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

**Ejercicio 22** Usar el ejercicio anterior para demostrar que, si  $ad - bc \neq 0$ , entonces el siguiente sistema tiene exactamente una solución:

$$\begin{cases} ax + by = k \\ cx + dy = l \end{cases}$$

**Ejercicio 23** Encontrar un sistema lineal inconsistente que tenga más incógnitas que ecuaciones.