

Práctica 1

(Nociones básicas de Sistemas de Ecuaciones Lineales)

Ejercicio 1 Encontrar el conjunto solución a cada una de las siguientes ecuaciones lineales.

a) $7x - 5y = 3$

b) $3v - 8w + 2x - y + 4z = 0$

Ejercicio 2 Hallar la matriz aumentada de cada uno de los siguientes sistemas:

$$\text{a) } \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = -1 \\ 4x_1 + 5x_2 = 3 \\ 7x_1 + 3x_2 = 2 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_4 + x_5 = 1 \\ \quad 3x_2 + x_3 - x_5 = 2 \\ \quad \quad x_3 + 7x_4 = 1 \end{cases}$$

Ejercicio 3 Determinar un sistema de ecuaciones lineales correspondiente a la matriz aumentada.

a) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 7 & 2 & 1 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

Ejercicio 4

a) Encontrar una ecuación lineal en las variables x e y que tenga la siguiente solución general: $x = 5 + 2t$, $y = t$.

b) Demostrar que $x = t$, $y = \frac{1}{2}t - \frac{5}{2}$ también es la solución general de la ecuación del inciso a)

Ejercicio 5 Considerar el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + y + 2z = a \\ x + z = b \\ 2x + y + 3z = c \end{cases}$$

Demostrar que para que este sistema sea consistente, a , b y c deben satisfacer $c = a + b$.

Ejercicio 6 Indicar cuáles de las siguientes matrices están en forma escalonada reducida.

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

f) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Ejercicio 7 Indicar cuáles de las siguientes matrices están en forma escalonada.

$$\text{a) } \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{b) } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 8 En cada inciso, determinar si la matriz está en forma escalonada, en forma escalonada reducida, en ambas formas o ninguna.

$$\text{a) } \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{b) } \begin{bmatrix} 1 & -7 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{c) } \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{d) } \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 9 Resolver cada uno de los siguientes sistemas, aplicando eliminación de Gauss - Jordan.

$$\text{a) } \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 3x_1 - 7x_2 + 4x_3 = 10 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ -2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 1 \\ 8x_1 + x_2 + 4x_3 = -1 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x - y + 2z - w = -1 \\ 2x + y - 2z - 2w = -2 \\ -x + 2y - 4z + w = 1 \\ 3x - 3w = -3 \end{cases} \quad \text{d) } \begin{cases} -2b + 3c = 1 \\ 3a + 6b - 3c = -2 \\ 6a + 6b + 3c = 5 \end{cases}$$

Ejercicio 10 Resolver cada uno de los sistemas del ejercicio anterior aplicando eliminación gaussiana.

Ejercicio 11 Resolver cada uno de los siguientes sistemas, aplicando eliminación de Gauss - Jordan.

$$\text{a) } \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = -2 \\ 2x_1 + x_2 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 4x_1 - 8x_2 = 12 \\ 3x_1 - 6x_2 = 9 \\ -2x_1 + 4x_2 = -6 \end{cases}$$

Ejercicio 12 Resolver cada uno de los sistemas del ejercicio anterior aplicando eliminación gaussiana.

Ejercicio 13 Resolver cada uno de los siguientes sistemas, aplicando eliminación de Gauss - Jordan.

$$\text{a) } \begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + 6x_3 = 0 \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 2 \\ x_1 - 12x_2 - 11x_3 - 16x_4 = 5 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} w + 2x - y = 4 \\ x - y = 3 \\ w + 3x - 2y = 1 \\ 2u + 4v + w + 7x = 7 \end{cases}$$

Ejercicio 14 Resolver cada uno de los sistemas del ejercicio anterior aplicando eliminación gaussiana.

Ejercicio 15 Sin usar lápiz ni papel, determinar cuáles de los siguientes sistemas homogéneos tienen soluciones no triviales.

$$\text{a) } \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 0 \\ 7x_1 + x_2 - 8x_3 + 9x_4 = 0 \\ 2x_1 + 8x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 - 8x_3 = 0 \\ 4x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{d) } \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 0 \\ 6x_1 - 4x_2 = 0 \end{cases}$$

Ejercicio 16 Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones homogéneas aplicando cualquier método.

$$\text{a) } \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 5x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} 2x + 2y + 4z = 0 \\ w - y - 3z = 0 \\ 2w + 3x + y + z = 0 \\ -2w + x + 3y - 2z = 0 \end{cases}$$

Ejercicio 17 Resolver los siguientes sistemas, donde a , b y c son constantes.

$$\text{a) } \begin{cases} 2x + y = a \\ 3x + 6y = b \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = a \\ 2x_1 + 2x_3 = b \\ 3x_2 + 3x_3 = c \end{cases}$$

Ejercicio 18 ¿Para qué valores de a el siguiente sistema no tiene solución? ¿Para qué valores tiene exactamente una solución? ¿Para qué valores tiene infinitas soluciones?

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ 3x - y + 5z = 2 \\ 4x + y + (a^2 - 14)z = a + 2 \end{cases}$$

Ejercicio 19 Expresar la siguiente matriz de forma escalonada reducida *sin introducir ninguna fracción*.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 7 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 20 Encontrar dos formas escalonadas diferentes de la matriz $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$.

Ejercicio 21 Demostrar que, si $ad - bc \neq 0$, entonces la forma escalonada reducida de la matriz

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ es la matriz } \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 22 Usar el ejercicio anterior para demostrar que, si $ad - bc \neq 0$, entonces el siguiente sistema tiene exactamente una solución:

$$\begin{cases} ax + by = k \\ cx + dy = l \end{cases}$$

Ejercicio 23 Encontrar un sistema lineal inconsistente que tenga más incógnitas que ecuaciones.