TRAZA DE UNA MATRIZ CUADRADA

> **Definición.** Si A es una matriz cuadrada, entonces la ***traza de A***, denotada por $\operatorname{tr}(A)$, se define como la suma de los elementos de la diagonal principal de A. La traza de A no está definida si A no es una matriz cuadrada.

Ejemplo 11 A continuación se presentan algunos ejemplos de matrices y sus trazas.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} -1 & 2 & 7 & 0\\ 3 & 5 & -8 & 4\\ 1 & 2 & 7 & -3\\ 4 & -2 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

$$\boxed{\operatorname{tr}(A)=a_{11}+a_{22}+a_{33}} \qquad \boxed{\operatorname{tr}(B)=-1+5+7+0=11} \quad \triangle$$

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 1.3

1. Suponer que A, B, C, D y F son matrices de los tamaños siguientes:

A	B	C	D	E
(4×5)	(4×5)	(5×2)	(4×2)	(5×4)

Determinar cuáles de las siguientes expresiones de matrices están definidas. Para las que estén definidas, proporcionar el tamaño de la matriz resultante.

a) BA b) $AC+D$ c) $AE+B$ d) $AB+B$
e) $E(A+B)$ f) $E(AC)$ g) E^TA h) $(A^T+E)D$

2. Resolver la siguiente ecuación matricial para a, b, c y d.

$$\begin{bmatrix} a-b & b+c\\ 3d+c & 2a-4d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 8 & 1\\ 7 & 6\end{bmatrix}$$

3. Considerar las matrices.

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 0\\ -1 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} 4 & -1\\ 0 & 2\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2\\ 3 & 1 & 5\end{bmatrix},\quad D=\begin{bmatrix} 1 & 5 & 2\\ -1 & 0 & 1\\ 3 & 2 & 4\end{bmatrix},\quad E=\begin{bmatrix} 6 & 1 & 3\\ -1 & 1 & 2\\ 4 & 1 & 3\end{bmatrix}$$

Calcular lo siguiente (en caso de ser posible).

a) $D+E$ b) $D-E$ c) $5A$ d) $-7C$
e) $2B-C$ f) $4E-2D$ g) $-3(D+2E)$ h) $A-A$
i) $\operatorname{tr}(D)$ j) $\operatorname{tr}(D-3E)$ k) $4\operatorname{tr}(7B)$ l) $\operatorname{tr}(A)$

4. Con las matrices del ejercicio 3, calcular lo siguiente (en caso de ser posible).

a) $2A^T+C$ b) D^T-E^T c) $(D-E)^T$ d) B^T+5C^T
e) $\frac{1}{2}C^T-\frac{1}{4}A$ f) $B-B^T$ g) $2E^T-3D^T$ h) $(2E^T-3D^T)^T$

5. Usar las matrices del ejercicio 3 para calcular lo siguiente (en caso de ser posible).

a) AB b) BA c) $(3E)D$ d) $(AB)C$
e) $A(BC)$ f) CC^T g) $(DA)^T$ h) $(C^TB)A^T$
i) $\operatorname{tr}(DD^T)$ j) $\operatorname{tr}(4E^T-D)$ k) $\operatorname{tr}(C^TA^T+2E^T)$

6. Mediante las matrices del ejercicio 3, calcular lo siguiente (en caso de ser posible).

a) $(2D^T - E)A$ b) $(4B)C + 2B$ c) $(-AC)^T + 5D^T$
d) $(BA^T - 2C)^T$ e) $B^T(CC^T - A^TA)$ f) $D^TE^T - (ED)^T$

7. Sean

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 7 & 7 & 5 \end{bmatrix}$$

Con el método del ejemplo 7, encontrar

a) el primer renglón de AB, c) la segunda columna de AB, e) el tercer renglón de AA, y
b) el tercer renglón de AB, d) la primera columna de BA, f) la tercera columna de AA.

8. Sean A y B las matrices del ejercicio 7.

a) Expresar cada matriz columna de AB como una combinación lineal de las matrices columna de A.
b) Expresar cada matriz columna de BA como una combinación lineal de las matrices columna de B.

9. Sean

$$\mathbf{y} = [y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_m] \quad \text{y} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Demostrar que el producto $\mathbf{y}A$ se puede expresar como una combinación lineal de las matrices renglón de A con los coeficientes escalares de $\mathbf{y}$.

10. Sean A y B las matrices del ejercicio 7.

a) Usar el resultado del ejercicio 9 para expresar cada matriz renglón de AB como una combinación lineal de las matrices renglón de B.
b) Con el resultado del ejercicio 9 expresar cada matriz renglón de BA como una combinación lineal de las matrices renglón de A.

11. Sean C, D y E las matrices del ejercicio 3. Efectuando el menor número de cálculos posible, determinar el elemento en el renglón 2 y en la columna 3 de $C(DE)$.

12. a) Demostrar que si AB y BA están definidos, entonces AB y BA son matrices cuadradas.
b) Demostrar que si A es una matriz $m \times n$ y $A(BA)$ está definido, entonces B es una matriz $n \times m$.

13. En cada inciso determinar las matrices A, $\mathbf{x}$ y $\mathbf{b}$ que expresen el sistema de ecuaciones lineales dado como una simple ecuación matricial $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

a)
$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 &= 7 \\ 9x_1 - x_2 + x_3 &= -1 \\ x_1 + 5x_2 + 4x_3 &= 0 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 4x_1 \qquad - 3x_3 + x_4 &= 1 \\ 5x_1 + x_2 \qquad - 8x_4 &= 3 \\ 2x_1 - 5x_2 + 9x_3 - x_4 &= 0 \\ 3x_2 - x_3 + 7x_4 &= 2 \end{aligned}$$

14. En cada inciso expresar la ecuación matricial como un sistema de ecuaciones lineales.

a) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 7 \\ -2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 4 & 7 \\ -2 & 5 & 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

15. Si A y B se dividen en submatrices, por ejemplo

$$A = \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right] \quad \text{y} \quad B = \left[\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array}\right]$$

entonces AB se puede expresar como

$$AB = \left[\begin{array}{c|c} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ \hline A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{array}\right]$$

en el supuesto de que los tamaños de las submatrices A y B sean tales que las operaciones indicadas se puedan efectuar. Este método para multiplicar matrices divididas se denomina ***multiplicación en bloque***. En cada inciso, calcular el producto por medio de multiplicación en bloque. Comprobar los resultados multiplicando directamente.

a) $A = \left[\begin{array}{cc|cc} -1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & 4 & 2 \\ \hline 1 & 5 & 6 & 1 \end{array}\right]$, $\quad B = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 4 \\ -3 & 5 & 2 \\ \hline 7 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & -3 \end{array}\right]$

b) $A = \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 5 \\ \hline 0 & -3 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 6 & 1 \end{array}\right]$, $\quad B = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 4 \\ -3 & 5 & 2 \\ 7 & -1 & 5 \\ \hline 0 & 3 & -3 \end{array}\right]$

16. Adaptar el método del ejercicio 15 para calcular los siguientes productos mediante multiplicación en bloque.

a) $\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 4 & 5 \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc} 2 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 5 \\ \hline 2 & 1 & 4 \end{array}\right]$ b) $\left[\begin{array}{cc} 2 & -5 \\ 1 & 3 \\ 0 & 5 \\ \hline 1 & 4 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cccc} 2 & -1 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 5 & 7 \end{array}\right]$

c) $\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} 3 & 3 \\ -1 & 4 \\ 1 & 5 \\ \hline 2 & -2 \\ 1 & 6 \end{array}\right]$

17. En cada inciso, determinar si la multiplicación en bloque se puede usar para calcular AB a partir de las particiones dadas. En caso afirmativo, calcular el producto mediante multiplicación en bloque.

a) $A = \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & 4 & 2 \\ \hline 1 & 5 & 6 & 1 \end{array}\right]$, $\quad B = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 4 \\ -3 & 5 & 2 \\ \hline 7 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & -3 \end{array}\right]$

b) $A = \left[\begin{array}{rrrr} -1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & 4 & 2 \\ \hdashline 1 & 5 & 6 & 1 \end{array}\right]$, $\quad B = \left[\begin{array}{r:r:r} 2 & 1 & 4 \\ -3 & 5 & 2 \\ 7 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & -3 \end{array}\right]$

18. a) Demostrar que si A contiene un renglón de ceros y B es cualquier matriz para la que AB está definido, entonces AB también contiene un renglón de ceros.
b) Encontrar un resultado semejante, pero respecto a una columna de ceros.

19. Sea A cualquier matriz $m \times n$ y sea O la matriz $m \times n$, cada uno de cuyos elemento es cero. Demostrar que si $kA = 0$, entonces $k = 0$ o $A = 0$.

20. Sea I la matriz $n \times n$ cuyo elemento en el renglón i y en la columna j es

$$\begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = j \\ 0 & \text{si} \quad i \neq j \end{cases}$$

Demostrar que $AI = IA = A$ para toda matriz A $n \times n$.

21. En cada inciso, encontrar una matriz $[a_{ij}]$ 6×6 que cumpla la condición que se establece. Hacer que las respuestas sean lo más generales posible usando letras en vez de números específicos para denotar los elementos diferentes de cero.

a) $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$ (b) $a_{ij} = 0$ si $i > j$ (c) $a_{ij} = 0$ si $i < j$ (d) $a_{ij} = 0$ si $|i - j| > 1$

22. Encontrar una matriz $A = [a_{ij}]$ de 4×4 cuyos elementos cumplan la condición que se establece.

a) $a_{ij} = i + j$ b) $a_{ij} = i^{j-1}$ c) $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad |i - j| > 1 \\ -1 & \text{si} \quad |i - j| \leq 1 \end{cases}$

23. Demostrar lo siguiente: Si A es una matriz $m \times n$, entonces

$$\operatorname{tr}(AA^T) = \operatorname{tr}(A^TA) = s$$

donde s es la suma de los cuadrados de los elementos de A.

24. Usando el resultado del ejercicio 23, demostrar lo siguiente.
a) Si A es una matriz $m \times n$ tal que $AA^T = 0$ o $A^TA = 0$, entonces $A = 0$.
b) Si A es una matriz $n \times n$ tal que $A = A^T$ y $A^2 = 0$, entonces $A = 0$.

1.4 INVERSAS; REGLAS DE LA ARITMÉTICA DE MATRICES

En esta sección se analizarán algunas propiedades de las operaciones aritméticas sobre matrices. Se verá que muchas de las reglas básicas de la aritmética de los números reales también se cumplen para matrices, aunque unas cuantas no.