$$\begin{aligned}(B^TA^T)_{ij} &= b'_{i1}a'_{1j} + b'_{i2}a'_{2j} + \cdots + b'_{ir}a'_{rj}\\ &= b_{1i}a_{j1} + b_{2i}a_{j2} + \cdots + b_{ri}a_{jr}\\ &= a_{j1}b_{1i} + a_{j2}b_{2i} + \cdots + a_{jr}b_{ri}\end{aligned}$$

Lo anterior, junto con (3), demuestra (2). □

Aunque no se demostrará este hecho, el inciso *d*) del teorema se puede extender para incluir tres o más factores; es decir,

La transpuesta de un producto de cualquier número de matrices es igual al producto de sus transpuestas en orden invertido.

OBSERVACIÓN. Nótese la semejanza entre este resultado y el resultado, que está a continuación del teorema 1.4.6, respecto a la inversa de un producto de matrices.

INVERTIBILIDAD DE UNA TRANSPUESTA

El siguiente teorema establece una relación entre la inversa de una matriz invertible y la inversa de su transpuesta.

Teorema 1.4.10. *Si A es una matriz invertible, entonces A^T también es invertible y*

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T \tag{4}$$

Demostración. Se puede probar la invertibilidad de A^T y obtener (4) al demostrar que

$$A^T(A^{-1})^T = (A^{-1})^TA^T = I$$

Pero por el inciso *d*) del teorema 1.4.9 y el hecho de que $I^T = I$, se tiene

$$\begin{aligned}A^T(A^{-1})^T &= (A^{-1}A)^T = I^T = I\\ (A^{-1})^TA^T &= (AA^{-1})^T = I^T = I\end{aligned}$$

con lo que se completa la demostración. □

Ejemplo 10 Considerar las matrices

$$A = \begin{bmatrix} -5 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Al aplicar el teorema 1.4.5 se obtiene

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -5 \end{bmatrix} \qquad (A^T)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$$

Como garantiza el teorema 1.4.10, estas matrices satisfacen la fórmula (4). Δ

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 1.4

1. Sean

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 8 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & -7 & 6 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 1 & 7 & 4 \\ 3 & 5 & 9 \end{bmatrix}, \quad a = 4, \quad b = -7$$

Demostrar que

a) $A + (B + C) = (A + B) + C$ b) $(AB)C = A(BC)$ c) $(a + b)C = aC + bC$
d) $a(B - C) = aB - aC$

2. Usando las matrices y los escalares del ejercicio 1, demostrar que

a) $a(BC) = (aB)C = B(aC)$ b) $A(B - C) = AB - AC$ c) $(B + C)A = BA + CA$
d) $a(bC) = (ab)C$

3. Usando las matrices y los escalares del ejercicio 1, demostrar que

a) $(A^T)^T = A$ b) $(A + B)^T = A^T + B^T$ c) $(aC)^T = aC^T$ d) $(AB)^T = B^TA^T$

4. Usar el teorema 1.4.5 para calcular las inversas de las siguientes matrices

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

5. Comprobar que las tres matrices A, B y C del ejercicio 4 satisfacen las relaciones $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ y $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$

6. Sean A y B matrices cuadradas del mismo tamaño. ¿$(AB)^2 = A^2B^2$ es una igualdad matricial válida? Justificar la respuesta.

7. En cada inciso, usar la información dada para encontrar A.

a) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ b) $(7A)^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 7 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

c) $(5A^T)^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ d) $(I + 2A)^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

8. Sea A la matriz

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Calcular A^3, A^{-3} y $A^2 - 2A + I$.

9. Sea A la matriz

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

En cada inciso, determinar $p(A)$.

a) $p(x) = x - 2$ b) $p(x) = 2x^2 - x + 1$ c) $p(x) = x3 - 2x + 4$

10. Sean $p_1(x) = x^2 - 9$, $p_2(x) = x + 3$ y $p_3(x) = x - 3$.
a) Demostrar que $p_1(A) = p_2(A)p_3(A)$ para la matriz A del ejercicio 9.
b) Demostrar que $p_1(A) = p_2(A)p_3(A)$ para cualquier matriz cuadrada A.

11. Encontrar la inversa de

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

12. a) Encontrar matrices A y B 2×2 tales que $(A + B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$.
b) Demostrar que si A y B son matrices cuadradas tales que $AB = BA$, entonces

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

c) Encontrar un desarrollo de $(A + B)^2$ que sea válido para todas las matrices cuadradas A y B del mismo tamaño.

13. Considerar la matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

donde $a_{11}a_{22} \cdots a_{nn} \neq 0$. Demostrar que A es invertible y encontrar su inversa.

14. Demostrar que si una matriz cuadrada A satisface $A^2 - 3A + I = 0$, entonces $A^{-1} = 3I - A$.

15. a) Demostrar que una matriz con un renglón de ceros no puede tener inversa.
b) Demostrar que una matriz con una columna de ceros no puede tener inversa.

16. La suma de dos matrices invertibles, ¿necesariamente es invertible?

17. Sean A y B matrices cuadradas tales que $AB = 0$. Demostrar que si A es invertible, entonces $B = 0$.

18. En el teorema 1.4.2, ¿por qué el inciso *d*) no se escribió como $A0 = 0 = 0A$?

19. La ecuación real $a^2 = 1$ tiene exactamente dos soluciones. Encontrar por lo menos ocho matrices diferentes 3×3 que cumplan la ecuación matricial $A^2 = I_3$. [***Sugerencia.*** Buscar soluciones en las que todos los elementos fuera de la diagonal principal sean iguales a cero.]

20. a) Encontrar una matriz A 3×3 diferente de cero tal que $A^T = A$.
b) Encontrar una matriz A 3×3 diferente de cero tal que $A^T = -A$.

21. Una matriz cuadrada A se denomina ***simétrica*** si $A^T = A$ y ***antisimétrica*** si $A^T = -A$. Demostrar que si B es una matriz cuadrada, entonces
a) BB^T y $B + B^T$ son simétricas b) $B - B^T$ es antisimétrica

22. Si A es una matriz cuadrada y n es un entero positivo, ¿es cierto que $(A^n)^T = (A^T)^n$? Justificar la respuesta.

23. Sea A la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Determinar si A es invertible y, en caso afirmativo, encontrar su inversa. [***Sugerencia.*** Resolver $AX = I$ igualando los elementos correspondientes de ambos miembros.]

24. Demostrar lo siguiente:
a) Inciso *b*) del teorema 1.4.1. b) Inciso *i*) del teorema 1.4.1. c) Inciso *m*) del teorema 1.4.1.

25. Aplicar los incisos *d*) y *m*) del teorema 1.4.1 a las matrices A, B y $(-1)C$ para obtener el resultado del inciso *f*).

26. Demostrar el teorema 1.4.2.

27. Considerar las leyes de los exponentes $A^rA^s = A^{r+s}$ y $(A^r)^s = A^{rs}$.
a) Demostrar que si A es cualquier matriz cuadrada, entonces estas leyes son válidas para todos los valores enteros no negativos de r y s.
b) Demostrar que si A es invertible, entonces estas leyes son válidas para todos los valores enteros negativos de r y s.

28. Demostrar que si A es invertible y k es cualquier escalar diferente de cero, entonces $(kA)^n = k^nA^n$ para todos los valores enteros de n.

29. a) Demostrar que si A es invertible y $AB = AC$, entonces $B = C$.
b) Explicar por qué el inciso a) y el ejemplo 3 no se contradicen entre sí.

30. Demostrar el inciso *c*) del teorema 1.4.1. [***Sugerencia.*** Suponer que A es $m \times n$, que B es $n \times p$ y que C es $p \times q$. El ***ij*-ésimo elemento en** el miembro izquierdo es $l_{ij} = a_{i1}[BC]_{1j} + a_{i2}[BC]_{2j} + \cdots + a_{in}[BC]_{nj}$, y el ij-ésimo elemento en el miembro derecho es $r_{ij} = [AB]_{i1}c_{1j} + [AB]_{i2}c_{2j} + \cdots + [AB]_{ip}c_{pj}$. Comprobar que $l_{ij} = r_{ij}$.]

1.5 MATRICES ELEMENTALES Y UN MÉTODO PARA DETERMINAR A^{-1}

En esta sección se obtendrá un algoritmo para determinar la inversa de una matriz invertible y se analizarán algunas propiedades básicas de las matrices invertibles.

Así,

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}-40 & 16 & 9\\ 13 & -5 & -3\\ 5 & -2 & -1\end{bmatrix} \quad \Delta$$

A menudo no es posible saber de antemano si una matriz dada es invertible. Si una matriz A $n \times n$ no es invertible, entonces no se puede reducir a I_n por medio de operaciones elementales en los renglones [inciso (*c*) del teorema 1.5.3.] Planteado de otra forma, la forma escalonada reducida de A contiene por lo menos un renglón de ceros. Así, si el procedimiento del último ejemplo se intenta con una matriz que no es invertible, entonces en algún momento de los cálculos aparecerá un renglón de ceros en el *lado izquierdo*. Entonces es posible concluir que la matriz dada no es invertible, de modo que ya no se realizan más cálculos.

Ejemplo 5 Considerar la matriz

$$A=\begin{bmatrix}1 & 6 & 4\\ 2 & 4 & -1\\ -1 & 2 & 5\end{bmatrix}$$

Al aplicar el procedimiento del ejemplo 4 se obtiene

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr}1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr}1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -8 & -9 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 8 & 9 & 1 & 0 & 1\end{array}\right]$$

Se sumó -2 veces el primer renglón al segundo y se sumó el primer renglón al tercero.

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr}1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -8 & -9 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1\end{array}\right]$$

Se sumó el segundo renglón al tercero.

Dado que en el lado izquierdo se ha obtenido un renglón de ceros, se concluye que A no es invertible. Δ

Ejemplo 6 En el ejemplo 4 se demostró que

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 5 & 3\\ 1 & 0 & 8\end{bmatrix}$$

es una matriz invertible. Por el teorema 1.5.3 se concluye que el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 0\\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 0\\ x_1 \qquad\quad + 8x_3 &= 0\end{aligned}$$

sólo tiene la solución trivial. Δ

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 1.5

1. De las siguientes matrices, ¿cuáles son elementales?

a) $\begin{bmatrix}1 & 0\\ -5 & 1\end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix}-5 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \sqrt{3}\end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 9\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ g) $\begin{bmatrix}2 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

2. Encontrar una operación en los renglones que convierta la matriz elemental dada en una matriz identidad.

a) $\begin{bmatrix}1 & 0\\ -3 & 1\end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix}1 & 0 & -\frac{1}{7} & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

3. Considerar las matrices

$$A=\begin{bmatrix}3 & 4 & 1\\ 2 & -7 & -1\\ 8 & 1 & 5\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}8 & 1 & 5\\ 2 & -7 & -1\\ 3 & 4 & 1\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}3 & 4 & 1\\ 2 & -7 & -1\\ 2 & -7 & 3\end{bmatrix}$$

Encontrar matrices elementales E_1, E_2, E_3 y E_4 tales que
a) $E_1A=B$ b) $E_2B=A$ c) $E_3A=C$ d) $E_4C=A$

4. En el ejercicio 3, ¿es posible encontrar una matriz elemental E tal que $EB = C$? Justificar la respuesta.

En los ejercicios 5, 6 y 7, aplicar el método mostrado en los ejemplos 4 y 5 para encontrar la inversa de la matriz dada si la matriz es invertible, y comprobar la respuesta por multiplicación.

5. a) $\begin{bmatrix}1 & 4\\ 2 & 7\end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix}-3 & 6\\ 4 & 5\end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix}6 & -4\\ -3 & 2\end{bmatrix}$

6. a) $\begin{bmatrix}3 & 4 & -1\\ 1 & 0 & 3\\ 2 & 5 & -4\end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix}-1 & 3 & -4\\ 2 & 4 & 1\\ -4 & 2 & -9\end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix}2 & 6 & 6\\ 2 & 7 & 6\\ 2 & 7 & 7\end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$

7. a) $\begin{bmatrix}\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5}\\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{10}\\ \frac{1}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{1}{10}\end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix}\sqrt{2} & 3\sqrt{2} & 0\\ -4\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 3 & 0 & 0\\ 1 & 3 & 5 & 0\\ 1 & 3 & 5 & 7\end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} -8 & 17 & 2 & \frac{1}{3} \\ 4 & 0 & \frac{2}{5} & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 13 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & -3 \end{bmatrix}$

8. Encontrar la inversa de cada una de las siguientes matrices 4×4, donde k_1, k_2, k_3, k_4 y k son, todos, diferentes de cero.

a) $\begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_4 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & k_1 \\ 0 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & k_3 & 0 & 0 \\ k_4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ 1 & k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k \end{bmatrix}$

9. Considerar la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$$

a) Encontrar matrices elementales E_1 y E_2 tales que $E_2E_1A = I$.
b) Escribir A^{-1} como un producto de dos matrices elementales.
c) Escribir A como un producto de dos matrices elementales.

10. En cada inciso, efectuar en

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & -3 \\ 1 & -4 & 7 \end{bmatrix}$$

la operación en los renglones que se indica, multiplicando A por la izquierda por una matriz elemental. En cada caso, comprobar la respuesta efectuando la operación en los renglones directamente en A.
a) Intercambiar los renglones primero y tercero.
b) Multiplicar por $\frac{1}{3}$ el segundo renglón.
c) Sumar dos veces el segundo renglón al primer renglón.

11. Expresar la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 3 & 8 \\ -2 & -5 & 1 & -8 \end{bmatrix}$$

en la forma $A = EFGR$, donde E, F y G son matrices elementales y R está en forma escalonada.

12. Demostrar que si

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & b & c \end{bmatrix}$$

es una matriz elemental, entonces por lo menos un elemento en el tercer renglón debe ser igual a cero.

13. Demostrar que

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & f & 0 & g \\ 0 & 0 & 0 & h & 0 \end{bmatrix}$$

no es invertible para cualesquiera valores de los elementos.

14. Demostrar que si A es una matriz $m \times n$, entonces existe una matriz invertible C tal que CA está en forma escalonada reducida.

15. Demostrar que si A es una matriz invertible y B es equivalente por renglones a A, entonces B también es invertible.

16. a) Demostrar: Si A y B son matrices $m \times n$, entonces A y B son equivalentes por renglones si y sólo si A y B tienen la misma forma escalonada reducida.
b) Demostrar que A y B son equivalente por renglones, y encontrar una sucesión de operaciones elementales en los renglones que produzca B a partir de A.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 9 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

17. Demostrar el teorema 1.5.1.

1.6 OTROS RESULTADOS SOBRE SISTEMAS DE ECUACIONES E INVERTIBILIDAD

En esta sección se establecerán más resultados sobre sistemas de ecuaciones lineales e invertibilidad de matrices. El trabajo dará por resultado un método totalmente nuevo para resolver sistemas de n ecuaciones con n incógnitas.

UN TEOREMA FUNDAMENTAL

Se empezará por demostrar un resultado fundamental sobre sistemas lineales, que ya fue anticipado en la primera sección de este libro.

Teorema 1.6.1. *Todo sistema de ecuaciones lineales no tiene solución, tiene exactamente una solución o tiene infinidad de soluciones.*

Demostración. Si $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es un sistema de ecuaciones lineales, entonces exactamente una de las siguientes afirmaciones es verdadera: a) el sistema no tiene solución, b) el sistema tiene exactamente una solución, o bien, c) el sistema tiene más de una solución. La demostración estará completa si se puede demostrar que el sistema tiene infinidad de soluciones en el caso c).

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 1.6

En los ejercicios del 1 al 8, resolver el sistema invirtiendo la matriz de coeficientes y aplicando el teorema 1.6.2.

1. $\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2 \\ 5x_1 + 6x_2 &= 9 \end{aligned}$

2. $\begin{aligned} 4x_1 - 3x_2 &= -3 \\ 2x_1 - 5x_2 &= 9 \end{aligned}$

3. $\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 &= 4 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 &= -1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 3 \end{aligned}$

4. $\begin{aligned} 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 4 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 2 \\ x_2 + x_3 &= 5 \end{aligned}$

5. $\begin{aligned} x + y + z &= 5 \\ x + y - 4z &= 10 \\ -4x + y + z &= 0 \end{aligned}$

6. $\begin{aligned} -x - 2y - 3z &= 0 \\ w + x + 4y + 4z &= 7 \\ w + 3x + 7y + 9z &= 4 \\ -w - 2x - 4y - 6z &= 6 \end{aligned}$

7. $\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 &= b_1 \\ x_1 + 2x_2 &= b_2 \end{aligned}$

8. $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= b_1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 5x_3 &= b_2 \\ 3x_1 + 5x_2 + 8x_3 &= b_3 \end{aligned}$

9. Resolver el siguiente sistema general invirtiendo la matriz de coeficientes y aplicando el teorema 1.6.2.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= b_1 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= b_2 \\ x_1 + x_2 &= b_3 \end{aligned}$$

Usando las fórmulas resultantes, encontrar la solución si

a) $b_1 = -1,\ b_2 = 3,\ b_3 = 4$ b) $b_1 = 5,\ b_2 = 0,\ b_3 = 0$ c) $b_1 = -1,\ b_2 = -1,\ b_3 = 3$

10. Resolver los tres sistemas del ejercicio 9 aplicando el método del ejemplo 2.

En los ejercicios del 11 al 14, usar el método del ejemplo 2 para resolver simultáneamente los sistemas en todos los incisos.

11. $\begin{aligned} x_1 - 5x_2 &= b_1 \\ 3x_1 + 2x_2 &= b_2 \end{aligned}$

a) $b_1 = 1,\ b_2 = 4$
b) $b_1 = -2,\ b_2 = 5$

12. $\begin{aligned} -x_1 + 4x_2 + x_3 &= b_1 \\ x_1 + 9x_2 - 2x_3 &= b_2 \\ 6x_1 + 4x_2 - 8x_3 &= b_3 \end{aligned}$

a) $b_1 = 0,\ b_2 = 1,\ b_3 = 0$
b) $b_1 = -3,\ b_2 = 4,\ b_3 = -5$

13. $\begin{aligned} 4x_1 - 7x_2 &= b_1 \\ x_1 + 2x_2 &= b_2 \end{aligned}$

a) $b_1 = 0,\ b_2 = 1$
b) $b_1 = -4,\ b_2 = 6$
c) $b_1 = -1,\ b_2 = 3$
d) $b_1 = -5,\ b_2 = 1$

14. $\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= b_1 \\ -x_1 - 2x_2 &= b_2 \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 &= b_3 \end{aligned}$

a) $b_1 = 1,\ b_2 = 0,\ b_3 = -1$
b) $b_1 = 0,\ b_2 = 1,\ b_3 = 1$
c) $b_1 = -1,\ b_2 = -1,\ b_3 = 0$

15. El método del ejemplo 2 se puede usar para resolver sistemas lineales que tienen infinidad de soluciones. Usando ese método, resolver al mismo tiempo los sistemas de ambos incisos.

a) $\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= -2 \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 &= 1 \\ 3x_1 - 7x_2 + 2x_3 &= -1 \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 &= -1 \\ 3x_1 - 7x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$

En los ejercicios del 16 al 19, encontrar condiciones que deben satisfacer las b para que el sistema sea consistente.

16. $\begin{aligned} 6x_1 - 4x_2 &= b_1 \\ 3x_1 - 2x_2 &= b_2 \end{aligned}$

17. $\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 5x_3 &= b_1 \\ 4x_1 - 5x_2 + 8x_3 &= b_2 \\ -3x_1 + 3x_2 - 3x_3 &= b_3 \end{aligned}$

18. $\begin{aligned} x_1 - 2x_2 - x_3 &= b_1 \\ -4x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= b_2 \\ -4x_1 + 7x_2 + 4x_3 &= b_3 \end{aligned}$

19. $\begin{aligned} x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= b_1 \\ -2x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 &= b_2 \\ -3x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 &= b_3 \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 + 3x_4 &= b_4 \end{aligned}$

20. Considerar las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

a) Demostrar que la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{x}$ se puede volver a escribir como $(A - I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ y usar este resultado para resolver $A\mathbf{x} = \mathbf{x}$ para $\mathbf{x}$.
b) Resolver $A\mathbf{x} = 4\mathbf{x}$.

21. Resolver la siguiente ecuación matricial para X.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 & 7 & 8 \\ 4 & 0 & -3 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & -7 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

22. En cada inciso, determinar si el sistema homogéneo tiene una solución no trivial (sin usar lápiz y papel); luego, establecer si la matriz dada es invertible.

a) $\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 &= 0 \\ 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 &= 0 \\ x_3 + 2x_4 &= 0 \\ 3x_4 &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

b) $\begin{aligned} 5x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 &= 0 \\ 2x_3 - x_4 &= 0 \\ x_3 + x_4 &= 0 \\ 7x_4 &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} 5 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$

23. Sea $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ un sistema homogéneo de n ecuaciones lineales en n incógnitas que sólo tiene la solución trivial. Demostrar que si k es cualquier entero positivo, entonces el sistema $A^k\mathbf{x} = \mathbf{0}$ también tiene sólo la solución trivial.

24. Sean $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ un sistema homogéneo de n ecuaciones lineales con n incógnitas y Q una matriz invertible $n \times n$. Demostrar que $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene sólo la solución trivial si y sólo si $(QA)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ sólo tiene la solución trivial.

25. Sea $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ cualquier sistema de ecuaciones lineales consistente, y sea $\mathbf{x}_1$ una solución fija. Demostrar que toda solución del sistema se puede escribir en la forma $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_0$, donde $\mathbf{x}_0$ es una solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. También demostrar que toda matriz de esta forma es una solución.

26. Usar el inciso *a*) del teorema 1.6.3 para demostrar el inciso *b*).