M102 Cálculo II

Andrés E. Aceña.
V. Yanina González

Año 2015

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo realizaremos una revisión de algunos conceptos básicos. No los desarrollaremos de una manera sistemática ni en profundidad pues suponemos que el lector está familiarizado con estos tópicos. Sólo realizaremos una pequeña descripción de los conceptos y resultados que utilizaremos en el resto del libro. Supondremos que el alumno tiene conocimiento de la teorá de conjunto. Por lo cual no lo desarrollaremos aquí.

Definición 1. *Dados dos conjuntos A y B, el **producto cartesiano** de los mismos, denotado por $A \times B$ es el conjunto de pares ordenados donde el primer elemento pertenece a A y el segundo elemento pertence a B. Esto es*

$$A \times B := \{ (a, b) \mid a \in A \text{ y } b \in B \}. \tag{1.1}$$

Definición 2. *Dado dos conjunto A y B. Una **relación binaria** R de un conjunto A a uno B es un subconjunto del producto cartesiano $A \times B$. Decimos que a está relacionado con b por la relación R, si $(a, b) \in R$, lo escribimos aRb. Y para indicar que a y b no están relacionados bajo la relación R, $a \not Rb$. Si $B = A$, decimos que R es una relación en A.*

A continuación enunciaremos algunas propiedades adicionales que pueden cumplir las relaciones binarias.

Definición 3. *Una relación binaria R de un conjunto A se dice*

- *Reflexiva: si $\forall a \in A$, aRa.*
- *Antireflexiva: si $\forall a \in A$, $a \not Ra$.*
- *Simétrica: si aRb entonces bRa.*
- *Antisimétrica: si aRb y bRa entonces $a = b$.*
- *Asimétrica: si aRb entonces $a \not Rb$.*
- *Transitiva: si aRb y bRc entonces aRc.*

Estas propiedades son importantes de analizar pues dependiendo de cual de ellas se verifican, podemos realizar o una partición del conjunto definido bajo la relación binaria (relación de equvalencia) o un ordenamiento de los elementos que componen el conjunto (relación de orden).

Definición 4. *Una relación binaria R de un conjunto A es:*

- ***de equivalencia** si es reflexiva, simétrica y transitiva.*
- ***un orden parcial** si es reflexiva, antisimétrica y transitiva.*

- ***un orden total*** *si es una relación de orden parcial y* $\forall a, b \in A$ *se cumple que* aRb *o* bRa.

Recordemos el concepto de función.

Definición 5. *Una relación binaria* $f : A \to B$ *es una* ***función*** *si cumple que*

- $\forall\, a \in A\, \exists\, (a, b) \in f$,
- *si* $(a, b) \in f$ *y* $(a, c) \in f \Rightarrow b = c$.

La primera de estas condiciones suele llamarse "existencia" y la segunda "unicidad". Una distinción importante de tipos de funciones se da en la siguiente definición.

Definición 6. *Una función* $f : A \to B$ *se dice*

- ***inyectiva***, *si* $(a, c) \in f$ *y* $(b, c) \in f \Rightarrow a = b$,
- ***suryectiva***, *si* $\forall\, b \in B\, \exists\, (a, b) \in f$,
- ***biyectiva***, *si es inyectiva y suryectiva.*

Si tenemos una relación, se define la relación inversa de la siguiente manera.

Definición 7. *Sea* $R : A \to B$ *una relación binaria. La* ***relación inversa*** *de* R*, denotada* R^{-1}*, es la relación binaria* $R^{-1} : B \to A$ *definida por*

$$R^{-1} = \{(b, a) \in B \times A | (a, b) \in R\}. \tag{1.2}$$

En general, si tenemos una función, la relación inversa no va a ser una función, el siguiente teorema caracteriza completamente las funciones con inversa.

Teorema 1. *Sea* $f : A \to B$ *una función, entonces* f *tiene inversa (esto es, la relación inversa es una función) si y sólo si* f *es biyectiva.*

Ejercicio 1. Demostrar el teorema anterior.

En este punto no tenemos ninguna información sobre qué son los elementos de A y B (y en realidad es esta generalidad lo que le da tanta fuerza al concepto de función), sin embargo ya podemos definir algunas operaciones sobre funciones. La primera de ellas se puede ver simplemente como "recortar" el conjunto A.

Definición 8. *Sea* $f : A \to B$ *y sea* $\tilde{A} \subset A$*. Se define la* ***restricción*** *de* f *a* $\tilde{A}$ *como*

$$f|_{\tilde{A}} : \tilde{A} \to B, \qquad f|_{\tilde{A}} = \{(a, b) \in f | a \in \tilde{A}\}. \tag{1.3}$$

Otra operación central es la composición de funciones.

Definición 9. *Sea* $f : A \to B$ *y* $g : C \to D$*, tal que* $D \subset A$*. Se define la* ***composición*** *de* f *y* g*, denotada por* $f \circ g$*, como la función*

$$f \circ g : C \to B, \qquad f \circ g = \{(c, b) \in C \times B | \text{ para algún } d \in D, (c, d) \in g \text{ y } (d, b) \in f\}. \tag{1.4}$$

Dado un conjunto, resulta útil definir la siguiente función.

Definición 10. *Sea* A *un conjunto, la función identidad es la función*

$$id_A : A \to A, \qquad id_A = \{(a, a) \in A \times A\}. \tag{1.5}$$

Ejercicio 2. Probar que dada $f : A \to B$, entonces

$$f \circ \mathrm{id}_A = f, \qquad \mathrm{id}_B \circ f = f. \tag{1.6}$$

Ejercicio 3. Mostrar que las definiciones 8, 9 y 10 efectivamente definen funciones (esto es, mostrar que el objeto definido cumple con las condiciones de la definición 5).

Es conveniente introducir un poco de nomenclatura y notación. Si f es una función de A en B, al conjunto A se le denomina **dominio** de la función, lo notamos $Dom\, f = A$ y al conjunto B **codominio** de la función. A un elemento particular $a \in A$ al que se aplica la función f se le denomina **argumento** de la función, y al elemento correspondiente de $b \in B$ se le denomina **imagen** del elemento a, lo que se denota por $b = f(a)$. Con esta notación $(f \circ g)(a) = f(g(a))$. Si consideramos un subconjunto $\tilde{A} \subset A$, se le llama imagen del conjunto $\tilde{A}$ al conjunto

$$f[\tilde{A}] = \{b \in B | (a, b) \in f \text{ y } a \in \tilde{A}\}. \tag{1.7}$$

Directamente de la definición tenemos que $f[\tilde{A}] \subset B$. Se le llama imagen de la función al conjunto $f[A]$. La **preimagen o imagen inversa** de un subconjunto $\tilde{B} \subset B$ es el conjunto

$$f^{-1}[\tilde{B}] = \{a \in A | (a, b) \in f \text{ y } b \in \tilde{B}\}. \tag{1.8}$$

Ejercicio 4. Sea $f : A \to B$, y sean A_1 y A_2 subconjuntos de A, y B_1 y B_2 subconjuntos de B. Mostrar que si $A_1 \subset A_2$ entonces $f[A_1] \subset f[A_2]$ y que si $B_1 \subset B_2$ entonces $f^{-1}[B_1] \subset f^{-1}[B_2]$.

Muchas veces, una función se expresa a través de una ecuación, en este caso se le llama **variable** a los elementos de A, y se los suele denotar con una letra genérica, por ejemplo x. En este caso, el elemento correspondiente de B se denota por $f(x)$, que se lee f de x. Asimismo, es común no especificar los conjuntos A y B, y simplemente expresar $f(x)$ a través de una fórmula. En este caso se toma A y B como los conjuntos para los cuales la relación está definida. Sin embargo, es importante tener en cuenta que la definición de función incluye los conjuntos A y B, esto es, si no tenemos dados el dominio y el codominio entonces no tenemos definida una función. Si no se dan estos conjuntos explícitamente igual se deben asumir implícitamente. En particular, si dos funciones están definidas por la misma ecuación pero el dominio o el codominio difieren, entonces las funciones son distintas.

Recordemos algunos conceptos de álgebra lineal.

Definición 11. $(V, K, +, \cdot)$, *donde* V *es un conjunto,* K *es un cuerpo, y*

$$+ : V \times V \to V, \qquad \cdot : K \times V \to V, \tag{1.9}$$

es un ***espacio vectorial*** *si*

1. $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}, \qquad \forall\, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V.$
2. $\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c}, \qquad \forall\, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in V.$
3. $\exists\, \boldsymbol{0} \in V \,|\, \boldsymbol{a} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{a}, \qquad \forall\, \boldsymbol{a} \in V.$
4. $\forall\, \boldsymbol{a} \in V, \exists\, \boldsymbol{b} \in V \,|\, \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}.$
5. $a \cdot (b \cdot \boldsymbol{a}) = (a \cdot b) \cdot \boldsymbol{a}, \qquad \forall a, b \in K, \forall \boldsymbol{a} \in V.$
6. $\exists 1 \in K \,|\, 1 \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}, \qquad \forall \boldsymbol{a} \in V.$

7. $\alpha \cdot (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \alpha \cdot \boldsymbol{a} + \alpha \cdot \boldsymbol{b}, \qquad \forall \alpha \in K, \forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V.$

8. $(\alpha + \beta) \cdot \boldsymbol{a} = \alpha \cdot \boldsymbol{a} + \beta \cdot \boldsymbol{a}, \qquad \forall \alpha, \beta \in K, \forall \boldsymbol{a} \in V.$

Definición 12. *Sea $(V, K, +, \cdot)$ un espacio vectorial.Un subconjunto W de V se dice que es un **subespacio** de V si $(W, K, +, \cdot)$ es un espacio vectorial con las operaciones de suma y producto por un escalar de V. Es decir, es un subconjunto de V que "hereda" las operaciones de V y es un espacio vectorial en sí mismo.*

Definición 13. *Sea $(V, K, +, \cdot)$ un espacio vectorial. y S un subconjunto de V. El **subespacio generado** por S está definido como la intersección de todos los subespacios de V que contienen a S. Lo notaremos $\overline{S}$.*

Definición 14. *Sea $(V, K, +, \cdot)$ un espacio vectorial. $\boldsymbol{b} \in V$ es **combinación lineal** de $\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2}, ..., \boldsymbol{b_n}$ si existen $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in K$ tal que*

$$\boldsymbol{b} = \alpha_1 \boldsymbol{b_1} + \alpha_2 \boldsymbol{b_2} + ... + \alpha_n \boldsymbol{b_n}.$$

Ejercicio 5. Demuestre que el subespacio generado por el conjunto no vacio $S = \{\boldsymbol{s_1}, \boldsymbol{s_2}, ..., \boldsymbol{s_n}\}$ es el conjunto de todas las combinaciones lineales de elementos de S, es decir,

$$\overline{S} = \{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \boldsymbol{s_i} | \, \alpha_i \in K, \, \boldsymbol{s_i} \in S \, \forall i \in \{1, 2, ..., n\}\}$$

.

Definición 15. *Sea $(V, K, +, \cdot)$ un espacio vectorial. Un subconjunto S de V es **linealmente independiente** si la única manera de escribir al elemento nulo como combinación lineal de elementos de S es con cada escalar igual a cero, es decir, si $\boldsymbol{s_1}, \boldsymbol{s_2}, ..., \boldsymbol{s_n} \in S$, $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in K$ y $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \boldsymbol{s_i} = \boldsymbol{0}$ implica que $\alpha_i = 0 \quad \forall i \in \{1, 2, ..., n\}$. En caso contrario, S es un conjunto **linealmente dependiente**.*

Definición 16. *Sea $(V, K, +, \cdot)$ un espacio vectorial. Un subconjunto B de V es una **base** si es un conjunto linealmente independiente, cuyo subespacio generado es V. Si la base B es finita se dice que V es un espacio de dimensión finita y la dimensión de V es la cantidad de elementos que tiene dicha base.*

Capítulo 2

Espacio euclídeo

El ”espacio euclídeo” es el escenario donde transcurre el análisis multivariable y, en gran medida, donde vivimos. El lector sin duda ha dedicado, probablemente sin saberlo, gran parte de su educación elemental en matemática al estudio del espacio euclídeo. Así, el “teorema de Pitágoras”, el “teorema del coseno”, la trigonometría en general, vistas como se ven en las escuelas medias, forman parte de la geometría en el espacio euclídeo. También el hecho un poco más avanzado de que consideremos la integral como “el área bajo la curva”. Usualmente estos hechos se toman como relativamente naturales, un poco por lo que se ha aprendido antes, un poco porque la naturaleza parece comportarse en gran medida de acuerdo a estos principios, y si uno construye una cantidad grande de triángulos rectángulos con regla y compás, verá que satisfacen el teorema de Pitágoras dentro de los errores de medición.

Vamos a dedicar este segundo capítulo a la construcción, a partir de axiomas y definiciones, del espacio euclídeo. Si bien podría parecer que es una pérdida de tiempo dedicarnos a formalizar conceptos que en principio son sabidos hay dos puntos importantes por lo que esto es conveniente. El primero es que no siempre está claro por qué algunas propiedades se cumplen, o qué es un axioma y qué una consecuencia de los supuestos. Para evitar esto es que recurrimos a las definiciones. El segundo es que al estar claro de dónde surgen las consecuencias de la teoría es fácil realizar generalizaciones, o saber qué propiedad depende de qué definición, y por lo tanto si en otra circunstancia que no sea la especificada en el libro la consecuencia sigue siendo válida. Resumiendo, basándonos en axiomas y definiciones nos ayuda a ver el panorama completo, de dónde vienen las conclusiones que obtenemos y cuál es su rango de validez. Manos a la obra.

2.1. Los números reales

El espacio euclídeo se construye a partir de los números reales. Hay varias formas de obtener los números reales, tanto constructivos como axiomaticos. Si bien los métodos constructivos suelen ser más claros intuitivamente, la claridad con la cual se prueban propiedades partiendo de los axiomas es un aliciente fuerte para utilizar ese método. Por otro lado, se supone al lector familiarizado con el manejo de los números reales, con lo cual una definición axiomática de los mismos permite una profundidad teórica adicional.

2.1.1. Axiomas de los números reales

Los números reales se pueden definir axiomáticamente de la siguiente manera:

Definición 17. $(K, +, \cdot, \leq)$ *es el* ***conjunto de los números reales*** *si satisface las siguientes tres condiciones:*

1. *$(K, +, \cdot)$ es un cuerpo.*

2. *$(K, \leq)$ es un conjunto totalmente ordenado y el orden es compatible con las operaciones del cuerpo:*

   - *Si $a \leq b$ entonces $a + c \leq b + c$;*
   - *Si $a \leq b$ y $c \geq 0$ entonces $a \cdot c \leq b \cdot c$.*

3. *El conjunto K es Dedekind-completo: Todo subconjunto no vacío y acotado superiormente tiene un supremo.*

Es necesario explayarnos respecto a qué nos dicen los axiomas, empecemos recordando la definición de cuerpo.

Definición 18. *$(K, +, \cdot)$ es un* ***cuerpo*** *si K es un conjunto no vacio con dos operaciones binarias llamadas suma, $+$, y producto, $\cdot$,*

$$+ : K \times K \to K, \qquad \cdot : K \times K \to K \tag{2.1}$$

tales que para todo $a, b, c \in K$ se cumple

1. *Asociativa de la suma: $\forall\, a, b, c \in K \quad a + (b + c) = (a + b) + c$,*

2. *Existencia del neutro de la suma:$\forall\, a \in K\ \exists\, 0 \in K \mid a + 0 = a$,*

3. *Existencia del inverso aditivo u opuesto: $\forall\, a \in K\ \exists\, b \in K \mid a + b = 0$. Al elemento b lo notaremos $-a$.*

4. *Conmutatividad de la suma:$\forall\, a, b \in K \quad a + b = b + a$,*

5. *Asociativa del producto: $\forall\, a, b, c \in K \quad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$,*

6. *Existencia del neutro del producto:$\forall\, a \in K\ \exists\, 1 \in K \mid a \cdot 1 = a$,*

7. *Existencia del inverso: $\forall\, a \neq 0 \in K\, \exists\, b \in K \mid a \cdot b = 1$. Al elemento b lo notaremos a^{-1},*

8. *Conmutatividad del producto:$\forall\, a, b \in K \quad a \cdot b = b \cdot a$,*

9. *Distributiva del producto respecto a la suma: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, \qquad \forall\, a, b, c \in K$.*

Esta definición, puesta como axioma de los reales, nos da las propiedades algebraicas que debe cumplir dicho conjunto. Algunas de ellas serán enunciadas a continuación.

Proposición 1. *El $(K, +, \cdot)$ cuerpo de los números reales cumple las siguientes propiedades: Sean $a, b, c \in K$.*

1. *Si $a + b = a + c$ entonces $b = c$.*

2. *Si $a \neq 0$ y $a.c = a.b$ entonces $c = b$.*

3. *El elemento 0 es único.*

4. *El elemento 1 es único.*

5. *El elemento opuesto es único. En particular, $-(-a) = a$.*

6. *Si $a \neq 0$ y $a.c = 1$ entonces $c = a^{-1}$.*

7. *El elemento inverso es único. En particular, si* $a \neq 0$ *entonces* $(a^{-1})^{-1}$.

8. $0.a = 0$

9. $(-a).b = -(a.b) = a.(-b)$

10. $(-a).(-b) = a.b$

Las demostraciónes de estas afirmaciones pueden verse en [4] y [6].

Veamos el segundo axioma.

Definición 19. *Un orden total en un conjunto* K *es una relación binaria* $\leq$ *sobre* K *que cumple las siguientes propiedades:*

1. *Reflexiva:* $\forall\, a \in K \quad a \leq a$.

2. *Antisimétrica:* $\forall\, a, b \in K$. *Si* $a \leq b$ *y* $b \leq a$ *entonces* $a = b$.

3. *Transitiva:* $\forall\, a, b, c \in K$. *Si* $a \leq b$ *y* $b \leq c$ *entonces* $a \leq c$.

4. *Total:* $\forall\, a, b \in K \;\; a \leq b$ *ó* $b \leq a$.

La relación de orden estricta $<$, se define como $x < y$ si $x \leq y$ pero $x \neq y$. En este caso, el único axioma que se cumple es la propiedad transitiva.

Observemos que en el segundo axioma no sólo se pide que los números reales estén ordenados totalmente, sino también, que dicha relación de orden respete las operaciones de suma y producto del cuerpo.

Proposición 2. *El* $(K, +, \cdot)$ *cuerpo de los números reales cumple las siguientes propiedades: Sean* $a, b, c \in K$.

1. *Si* $a > 0$ *entonces* $-a < 0$ *y viceversa.*

2. *Si* $a \neq 0$ *entonces* $a^2 > 0$. *En particular,* $1 > 0$.

3. *Si* $0 < a < b$ *entonces* $a^{-1} > b^{-1} > 0$.

Las demostraciónes de estas afirmaciones pueden verse en [6]. De la propiedad 1 se define para cada $a \in K$ el **valor absoluto o módulo** $|a|$ como

$$|a| = \{ \begin{array}{ll} a & \text{si}\, 0 \leq a \\ -a & \text{si}\, a < 0 \end{array} \tag{2.2}$$

El tercer axioma es el que distingue los números reales de otros conjuntos de números, por ejemplo de los números racionales. Este axioma nos dice que cualquier sucesión de Cauchy dentro de los reales (si se introduce la noción usual de distancia) converge a un número real. Así se puede ver el conjunto de los reales como el conjunto que se obtiene a partir de los racionales “completándolo”. En forma coloquial, este axioma dice que no hay ”agujeros” en el orden de los reales.

Hay más de una forma de definir axiomáticamente los números reales, por ejemplo la axiomatización de Tarski. Además, hay otras formas de obtener el conjunto de los reales que son constructivas en lugar de axiomáticas, como por ejemplo:

- Cortadura de Dedecking.

- Sucesiones de Cauchy de números racionales.

En estos casos se definen los números reales a partir de otro conjunto de números, los racionales, y luego se demuestra que cumplen las propiedades que aquí se ponen como axiomas. La pregunta ahora es si todos estos conjuntos, los obtenidos de una u otra forma, son el mismo conjunto. La respuesta es sí, cualquier otro conjunto que cumpla con los axiomas de los reales es isomorfo a los reales, y por lo tanto equivalente como estructura matemática. Explícitamente tenemos que

Teorema 2. *Sean* $(K_1, +_1, \cdot_1, \leq_1)$ *y* $(K_2, +_2, \cdot_2, \leq_2)$ *dos estructuras que cumplen con los axiomas de la definición 17. Entonces las dos estructuras son isomórfas, es decir, existe una función* $\phi : K_1 \to K_2$ *tal que*

1. ϕ *es biyectiva.*
2. $\phi(x +_1 y) = \phi(x) +_2 \phi(y), \qquad \phi(x \cdot_1 y) = \phi(x) \cdot_2 \phi(y), \qquad \forall\, x, y \in K_1.$
3. $x \leq_1 y \iff \phi(x) \leq_2 \phi(y), \qquad \forall\, x, y \in K_1.$

Observación: Es fácil demostrar que $\phi(0_1) = 0_2$ y $\phi(1_1) = 1_2$.
Al conjunto de los números reales lo denotaremos en forma usual por $\mathbb{R}$.

2.1.2. La recta real

Una asociación de gran utilidad conceptual es la que se puede hacer entre los números reales y el concepto de recta. Debido a que los reales son un conjunto totalmente ordenado se puede pensar en poner uno al lado de otro, en el orden dado por la relación "$\leq$". En particular, al ser el orden antisimétrico, sabemos que no hay dos números distintos que vayan a ocupar el mismo lugar. Como además es un conjunto completo, no hay espacio sin números reales entre dos números reales cualesquiera. Así, se asocia cada "punto"de la recta con un número real. La representación gráfica usual de esta asociación se muestra en la figura 2.1.

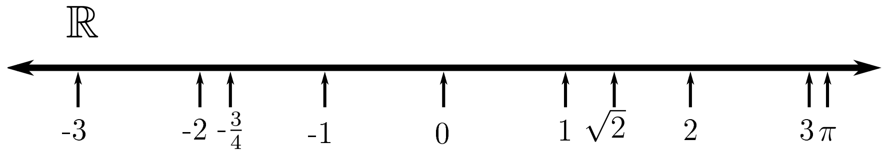


Figura 2.1: La recta real

Aunque usualmente se presente la figura 2.1 como representación de $\mathbb{R}$ es importante notar que la figura 2.2 es una representación igualmente válida, la cual podríamos llamar la "curva" real. No hay nada en los números reales que nos diga que la representación gráfica tiene que ser ”rígida” o ”recta”, o qué tan distanciados tienen que estar los puntos. Lo único importante para la misma son el orden y el hecho de que entre dos puntos cualesquiera tiene que haber infinitos puntos, sin dejar ningún "hueco".

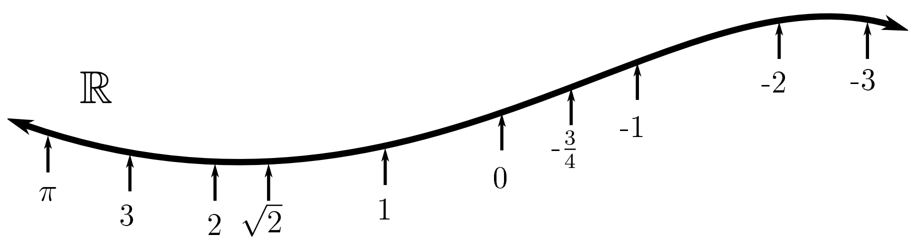


Figura 2.2: La "curva" real

2.2. Los conjuntos $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{E}^2$

Una vez que se tienen los números reales se pueden construir, a partir de ellos, nuevos conjuntos. En esta sección, utilizando una de las operaciones básicas de la teoría de conjuntos, el producto cartesiano, construimos lo que llamamos $\mathbb{R}^2$. Luego, agregándole una "estructura" a este conjunto, llegamos al espacio euclídeo 2-dimensional, $\mathbb{E}^2$.

2.2.1. Definición de $\mathbb{R}^2$

Dado el conjunto de los números reales, podemos tomar el producto cartesiano de $\mathbb{R}$ consigo mismo. Al conjunto así formado se le denomina $\mathbb{R}^2$. Explícitamente

Definición 20. $$\mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{\, (a, b) \mid a \in \mathbb{R} \ y \ b \in \mathbb{R} \,\}.$$

2.2.2. El plano real

Comenzando con el conjunto de números reales hemos construido un nuevo conjunto. Así como se identificó $\mathbb{R}$ con la recta, es posible identificar $\mathbb{R}^2$ con el plano. Para esto se usa un sistema de ejes cartesianos en el plano, y al punto $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ se le asigna el punto que tiene coordenada a en uno de los ejes y coordenada b en el otro. La imagen usual que uno tiene de esta identificación está dada por la figura 2.3

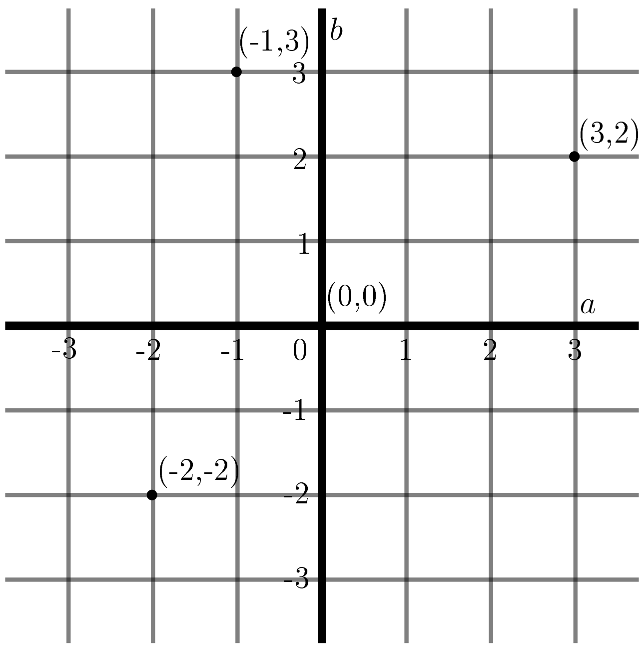


Figura 2.3: El plano cartesiano

El hecho de representar $\mathbb{R}^2$ de esta forma no incluye ninguna afirmación respecto a la "rigidez" de $\mathbb{R}^2$. En particular, no tenemos asociado a elementos de $\mathbb{R}^2$ ninguna noción de longitud o distancia, o alguna noción de ángulo entre elementos de $\mathbb{R}^2$. Así, la representación de $\mathbb{R}^2$ presentada en la figura 2.4 es tan buena como la de la figura 2.3.

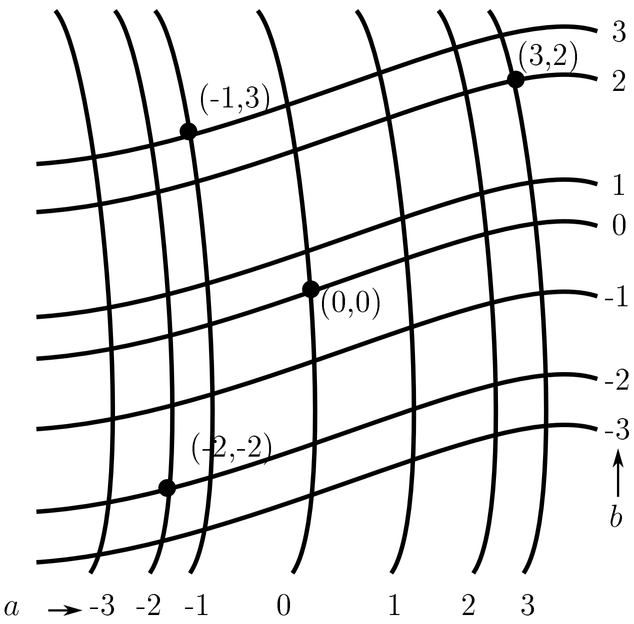


Figura 2.4: Otra representación de $\mathbb{R}^2$

Es importante recalcar que hasta ahora, y a pesar de lo que la representación gráfica de la figura 2.3 sugiere, no tenemos definidas operaciones en $\mathbb{R}^2$, como la suma y el producto. Tampoco tenemos definida una distancia entre puntos. Estas operaciones se deben definir y no vienen dadas a priori por la estructura de $\mathbb{R}^2$. En la sección que sigue definiremos las operaciones algebraicas en $\mathbb{R}^2$.

2.2.3. Definición de operaciones en $\mathbb{R}^2$

El hecho de que cada uno de los elementos de $\mathbb{R}^2$ sea un par ordenado formado por elementos de $\mathbb{R}$ nos permite usar las operaciones de suma y multiplicación en $\mathbb{R}$ para definir operaciones de suma y producto en $\mathbb{R}^2$.

Definición 21. *Definimos en $\mathbb{R}^2$ la operación binaria interna:* ***suma**,+,*

$$+ : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \tag{2.3}$$

como

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d), \qquad \forall (a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2, \tag{2.4}$$

y la operación binaria externa: ***producto por un escalar**,·,*

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \tag{2.5}$$

como

$$\alpha \cdot (a, b) = (\alpha \cdot a, \alpha \cdot b), \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R} \text{ y } (a, b) \in \mathbb{R}^2. \tag{2.6}$$

Es importante notar que la operación de suma en $\mathbb{R}^2$ es distinta de la operación de suma en $\mathbb{R}$, estando la primera definida en término de la segunda. Así, el signo ”más” en el lado izquierdo es distinto del signo ”más” en el lado derecho de (2.4), y la operación que ya sabemos realizar, antes de esta definición, es la que aparece en el lado derecho. Lo mismo para la operación producto por un escalar.

Con la definición 21, $\mathbb{R}^2$ adquiere una estructura particular, la de un espacio vectorial. Si $K = \mathbb{R}$ se suele decir que el espacio vectorial es *real*, lo notaremos $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

Teorema 3. $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}, +, \cdot)$ *es un espacio vectorial.*

Demostración. Todas las propiedades de espacio vectorial se deducen de las propiedades de las operaciones suma y producto en $\mathbb{R}$. A continuación se prueba la primera propiedad, el resto se deja como ejercicio.

$$\bar{\boldsymbol{a}}+\bar{\boldsymbol{b}} = (a_1, a_2)+(b_1, b_2) = (a_1+b_1, a_2+b_2) = (b_1+a_1, b_2+a_2) = (b_1, b_2)+(a_1, a_2) = \bar{\boldsymbol{b}}+\bar{\boldsymbol{a}}. \quad (2.7)$$

□

Ejercicio 6. Determinar la dimensión de $\mathbb{R}^2$, encontrar una base del mismo y expresar un vector cualquiera $\bar{\boldsymbol{u}} = (s, t)$ como combinación lineal de la base.

2.2.4. Representación de vectores

Cuando se definen las operaciones suma y producto por un escalar se le otorga a $\mathbb{R}^2$ la estructura de un espacio vectorial, el cual es de dimensión 2. Al igual que se representaban los puntos de $\mathbb{R}^2$ en el plano cartesiano, esos mismos puntos pasan a representar los vectores de $\mathbb{R}^2$ en la estructura vectorial. En este caso se suelen pensar los vectores no ya como puntos aislados, sino como una flecha que va desde el origen de coordenadas hasta el punto correspondiente (ver figura 2.5). Hay que tener cuidado, porque aunque parezca que estas "flechas" tienen magnitud y sentido, todavía no hemos definido una norma en el espacio vectorial, y por lo tanto no podemos hablar de magnitud o de dirección del vector.

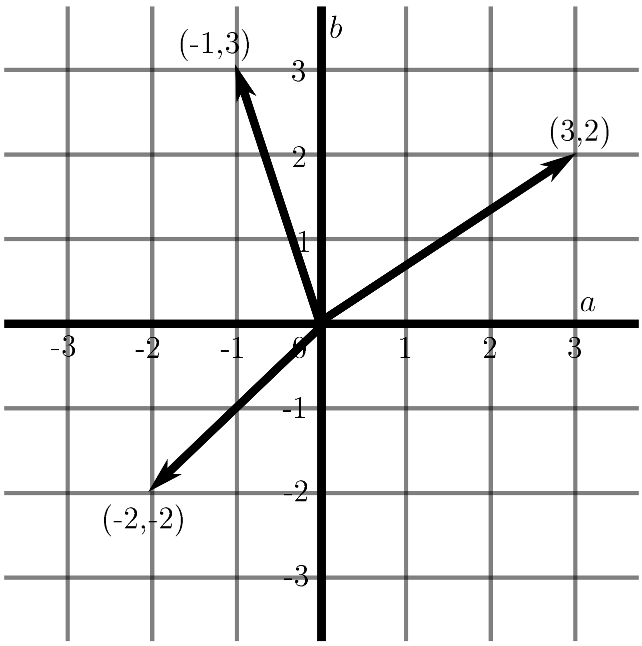


Figura 2.5: Representación de $\mathbb{R}^2$ como espacio vectorial.

También hay que tener cuidado con pensar en realizar las operaciones de suma y producto por un escalar a través de métodos geométricos. En la figura 2.6 se ve la suma de dos vectores, la cual se realiza sumando las componentes como se da en la definición de la operación (2.4). En la figura 2.7a y 2.7b se ven las dos interpretaciones geométricas usuales de la suma de vectores. En 2.7a se usa la regla del paralelogramo, esto es, se trazan rectas que pasan por los extremos de los vectores, y el punto de intersección de estas dos rectas es el vector suma. Para poder hacer esto necesitaríamos saber qué es una recta. La forma usual de definir una recta es como la curva de menor longitud entre dos puntos, o una curva cuyo vector tangente es constante.

En cualquiera de estos casos necesitaríamos saber qué es distancia, noción que no tenemos en este momento, y que no viene dada *a priori* por la estructura de espacio vectorial. La segunda forma usual de pensar la suma de vectores es la mostrada en 2.7b, donde se traslada uno de los vectores hasta el extremo del otro, y donde llega este vector trasladado, es el vector suma. Aquí nuevamente nos encontramos con problemas, en particular, no sabemos qué significa trasladar un vector. Lo mismo ocurre con el producto de un vector por un real. Se piensa en general que se "elonga" el vector manteniendo su dirección fija. Sin embargo no tenemos una noción todavía ni de magnitud o longitud de un vector ni de ángulo, por lo tanto no podemos hablar de modificar su longitud manteniendo la dirección. Por todo esto, en este punto, donde sólo se tiene la estructura de espacio vectorial en $\mathbb{R}^2$, las operaciones están definidas en término de los componentes, sin poder darle más interpretación gráfica que la presentada por la figura 2.6.

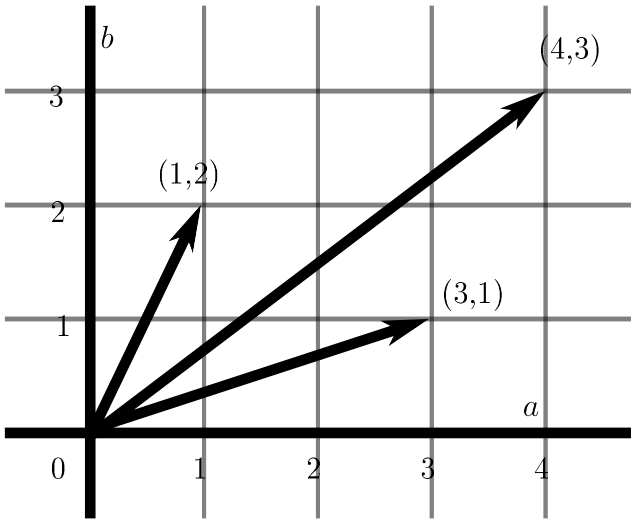
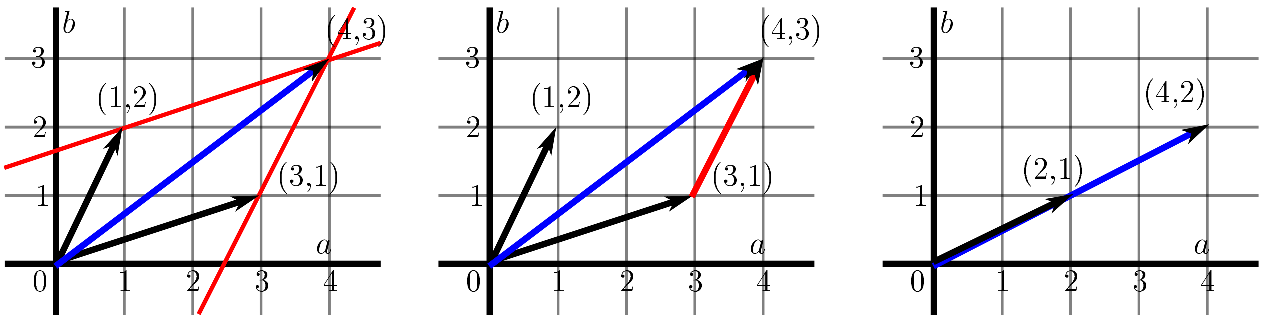


Figura 2.6: Representación de la suma de dos vectores.



(a) Representación de la suma de dos vectores.

(b) Otra representación de la suma de dos vectores.

(c) Producto de un escalar y un vector.

Figura 2.7: Operaciones vectoriales

2.2.5. Producto escalar

Tal como se dijo en la sección anterior, no podemos decir todavía cual es la longitud de un vector, o qué ángulo forma con otro vector. Estos conceptos vienen dados, en un espacio vectorial, a través de la definición de un producto interno y una norma, cuyas definiciones recordamos antes de introducir el producto escalar y la norma asociada en $\mathbb{R}^2$.

Definición 22. $(V, \mathbb{R}, +, \cdot, \langle , \rangle)$ *es un* ***espacio vectorial*** *real* ***con producto interno*** *si*

$(V, \mathbb{R}, +, \cdot)$ es un espacio vectorial real y $\langle , \rangle$ es una función

$$\langle , \rangle : V \times V \to \mathbb{R} \tag{2.8}$$

que satisface

1. *Simetría: $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} \rangle \forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V$.*
2. *Linealidad en el primer argumento: $\langle \alpha \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \rangle = \alpha \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c} \rangle + \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \rangle \, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in V$.*
3. *Definida positiva: $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle \geq 0 \, \forall \boldsymbol{a} \in V$ y $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle = 0$ si y sólo si $\boldsymbol{a} = 0$.*

$\langle , \rangle$ lo llamaremos producto interno.

La existencia de un producto interno en el espacio vectorial nos permite definir ortogonalidad de vectores. Esto es, dos vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ se dicen **ortogonales** si $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = 0$.

Por otro lado, un espacio vectorial real normado está dado por

Definición 23. *$(V, \mathbb{R}, +, \cdot, |.|)$ es un **espacio vectorial** real **normado** si $(V, \mathbb{R}, +, \cdot)$ es un espacio vectorial real y $||.||$ es una función*

$$||.|| : V \to \mathbb{R} \tag{2.9}$$

que satisface

1. *Separa puntos: $||\boldsymbol{a}|| = 0$ si y sólo si $\boldsymbol{a} = 0$.*
2. *Homogeneidad positiva: $||\boldsymbol{a}|| \geq 0 \, \forall \boldsymbol{a} \in V$.*
3. *Desigualdad triangular: $||\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}|| \leq ||\boldsymbol{a}|| + ||\boldsymbol{b}|| \forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V$.*
4. *$||\alpha \cdot \boldsymbol{a}|| = |\alpha| \cdot ||\boldsymbol{a}|| \forall \alpha \in \mathbb{R}, \boldsymbol{a} \in V$ (donde $|\alpha|$ es el valor absoluto del α).*

*Una función $||.||$ que cumple 1,2 y 3 se llama **norma**.*

Ejercicio 7. Mostrar de los axiomas anteriores que $||\mathbf{0}|| = 0$ y que $||\boldsymbol{a}|| \geq 0 \, \forall \, \boldsymbol{a} \in V$.

Ejercicio 8. Mostrar que el conjunto de números reales $(\mathbb{R}, \mathbb{R}, +, \cdot, |.|)$ es un espacio vectorial real normado, donde $|.|$ es el valor absoluto.

Ejercicio 9. Verificar que el conjunto de números reales $(\mathbb{R}, \mathbb{R}, +, \cdot, |.|)$ es un espacio vectorial real normado con cada una de las siguientes normas.

1. $||\bar{\boldsymbol{x}}||_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|$
2. $||\bar{\boldsymbol{x}}||_\infty = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i|$

Dado un espacio vectorial real con producto interno existe una norma asociada, definida por

$$||\boldsymbol{a}|| := \sqrt{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle}. \tag{2.10}$$

La norma de un vector se suele interpretar como la longitud de dicho vector.

Ejercicio 10. Probar que la ecuación anterior efectivamente define una norma en V.

Para un espacio vectorial con producto interno y norma dada por la norma asociada al producto escalar, se tiene la importante desigualdad enunciada a continuación.

Teorema 4 (Desigualdad de Cauchy-Bunyakowski-Schwarz)**.** *Sea un espacio vectorial con producto interno $(V, K, +, \cdot, \langle,\rangle)$ con norma dada por la norma asociada al producto escalar. Para $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V$ se cumple*

$$|\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle| \leq ||\boldsymbol{a}|| \cdot ||\boldsymbol{b}||. \tag{2.11}$$

Ejercicio 11. Probar, de los axiomas, la desigualdad anterior.

La desigualdad de Cauchy-Bunyakowski-Schwarz permite asociar el producto interno con el concepto de ángulo entre dos vectores como lo indica el siguiente corolario.

Corolario 1. *Sea un espacio vectorial con producto interno $(V, K, +, \cdot, \langle,\rangle)$ con norma dada por la norma asociada al producto escalar. Se define el ángulo entre $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ como*

$$\textit{ángulo}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \arccos \frac{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle}{||\boldsymbol{a}|| \cdot ||\boldsymbol{b}||}. \tag{2.12}$$

Demostración 1. De la desigualdad de Cauchy-Bunyakowski-Schwarz se deduce que

$$\frac{|\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle|}{||\boldsymbol{a}|| \cdot ||\boldsymbol{b}||} \leq 1$$

para todo $\boldsymbol{a} \neq 0$ y $\boldsymbol{b} \neq 0$. Como la función coseno, $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$, es biyectiva, es natural considerar la relación

$$\cos \text{ángulo}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \frac{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle}{||\boldsymbol{a}|| \cdot ||\boldsymbol{b}||}. \tag{2.13}$$

Luego, el ángulo entre $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ está bien definido, es decir, no existe una ambigüedad en el valor numérico del ángulo que se obtiene como resultado, si

$$\text{ángulo}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \arccos \frac{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle}{||\boldsymbol{a}|| \cdot ||\boldsymbol{b}||}. \tag{2.14}$$

Puede surgir la pregunta de si no sería posible considerar el seno en lugar del coseno, como posible función que relaciona un número entre -1 y 1 con un ángulo. Respuesta: no, pues si consideramos $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$, el cociente entre el producto escalar y sus normas es 1. Y el ángulo entre un vector y sí mismo es 0. De esta definición de norma y ángulo tenemos que

$$||\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}||^2 = ||\boldsymbol{b}||^2 + ||\boldsymbol{a}||^2 - 2||\boldsymbol{b}||||\boldsymbol{a}|| \cos\theta, \text{con } \theta = \text{ángulo}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \tag{2.15}$$

que no es otra cosa que el "teorema del coseno", válido para todo espacio vectorial con producto interno una vez que se han definido la norma y el ángulo asociados al producto interno.

Hay que aclarar que si bien siempre es posible obtener un espacio vectorial normado de un espacio vectorial con producto interno en general la operación inversa no es posible, esto es, en general no es posible obtener un espacio vectorial con producto interno de un espacio vectorial normado.

Teorema 5. *Si $(V, K, +, \cdot, \langle,\rangle)$ es un espacio vectorial con producto interno con norma dada por la norma asociada al producto escalar, para $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V$ se cumple la Ley del Paralelogramo, esto es,*

$$||\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}||^2 + ||\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}||^2 = 2(||\boldsymbol{a}||^2 + ||\boldsymbol{b}||^2). \tag{2.16}$$

Ejercicio 12. Probar, utilizando los axiomas, la Ley del Paralelogramo.

Observemos que el teorema es una condición necesaria pero no suficiente para que de una norma en V se defina un producto escalar. Por ejemplo, consideramos el espacio vectorial $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}, +, \cdot, |.|)$ con la norma dada por

$$||(a,b)|| := max\{|a|, |b|\}.$$

Veamos que esta norma no define un producto interno, probando que no cumple la Ley del Paralelogramo. Tomamos $\bar{\boldsymbol{u}} = (1,0)$ y $\bar{\boldsymbol{v}} = (0,1)$, entonces

$$||\bar{\boldsymbol{u}} + \bar{\boldsymbol{v}}||^2 + ||\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}||^2 = 1 + 1 = 2$$

y

$$2\dot{(}||\boldsymbol{u}||^2 + ||\boldsymbol{v}||^2) = 2\dot{(}1+1) = 4$$

. Esto muestra que en un espacio vectorial se pueden definir distintas normas, algunas de las cuales no están asociadas a ningún producto escalar.

También se suele interpretar el producto interno como una proyección de un vector en la dirección de otro. Para esto necesitamos un vector unitario $\boldsymbol{n}$, $||\boldsymbol{n}|| = 1$ (si tengo un vector cualquiera $\boldsymbol{b}$, entonces $(1/||\boldsymbol{b}||) \cdot \boldsymbol{b}$ es un vector unitario, y con respecto a este vector es que proyectamos). Dado un vector cualquiera $\boldsymbol{a}$, podemos definir la parte paralela a $\boldsymbol{n}$ como $\boldsymbol{a}^{\parallel} = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{n} \rangle \cdot \boldsymbol{n}$, y la parte perpendicular como $\boldsymbol{a}^{\perp} = \boldsymbol{a} - \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{n} \rangle \cdot \boldsymbol{n}$. Entonces $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}^{\parallel} + \boldsymbol{a}^{\perp}$, ángulo$(\boldsymbol{a}^{\parallel}, \boldsymbol{n}) = 0$, ángulo$(\boldsymbol{a}^{\perp}, \boldsymbol{n}) = \pi/2$ y la norma de $\boldsymbol{a}^{\parallel}$ es justamente $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{n} \rangle$. La figura 2.8 es la representación gráfica usual de esto.

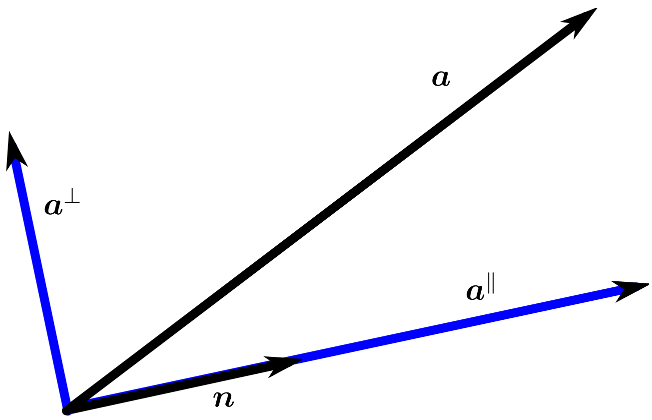


Figura 2.8: Proyección a través del producto interno.

Para cerrar estas consideraciones de caracter general, indicaremos que se puede definir una distancia en un espacio normado, a través de

$$d(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = ||\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}||. \tag{2.17}$$

Volviendo al caso de $\mathbb{R}^2$, definimos un producto interno, llamado producto escalar, a través de:

Definición 24. *Se define el* ***producto escalar***

$$\bullet : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \tag{2.18}$$

como

$$(a,b) \bullet (c,d) = a \cdot c + b \cdot d \qquad \forall (a,b), (c,d) \in \mathbb{R}^2. \tag{2.19}$$

Ejercicio 13. Probar que la definición anterior efectivamente define un producto interno en $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}, +, \cdot)$.

Dado este producto interno, la norma asociada está dada por

$$||(a,b)|| = \sqrt{a^2 + b^2}, \tag{2.20}$$

y la distancia entre dos puntos está dada por

$$d((a,b),(c,d)) = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}. \tag{2.21}$$

Vemos que estas dos últimas expresiones se corresponden con el teorema de Pitágoras, que si lo consideramos junto con el "teorema del coseno", muestran que con la definición de producto interno dado por el producto escalar hemos recuperado las propiedades que usualmente se le asignan al plano. Así, al espacio vectorial con producto interno obtenido se lo denomina espacio euclídeo de dimensión 2 y se lo denota por $\mathbb{E}^2$.

Definición 25. *Se define el* ***espacio euclídeo de dimensión* 2** *como*

$$\mathbb{E}^2 := (\mathbb{R}^2, \mathbb{R}, +, \cdot, \bullet). \tag{2.22}$$

Aunque no es obvio a primera vista, el tener una noción de distancia y de ángulo nos permite transportar vectores en el espacio. ¿Cómo? Manteniendo la magnitud y el ángulo con respecto a una recta (definida por otro vector) constantes. Aunque no estamos en condiciones, ni lo haremos en este libro, de atacar el problema de trasladar vectores, intuitivamente resulta que ahora sí tiene sentido hablar de mantener la "longitud" y el "ángulo" de un vector, o de la curva de menor longitud, y que por lo tanto (aunque no sepamos cómo hacerlo en términos de llevar a cabo los cálculos), los procedimientos de la figura 2.7 tendrían que dar el mismo resultado que lo que se obtiene de la definición 21.

2.2.6. Área en $\mathbb{R}^2$

En general, cuando decimos área,la primera idea que se nos viene a la mente es eláreа de figuras planas como la del

1. rectángulo: $A = base$ x $altura$
2. circunferencia: $A = \pi$ x $radio^2$

En esta sección introduciremos un concepto más general de área, la idea de área en un espacio vectorial, o más generalmente, de volumen, en principio es independiente del producto interno. En particular, necesitaremos saber a qué nos referimos como volumen cuando querramos calcular integrales.

Definición 26. *Si* $(W, \mathbb{R}, +, \cdot)$ *es un espacio vectorial y* $\{\boldsymbol{e_1}, ..., \boldsymbol{e_n}\}$, $\{\boldsymbol{f_1}, ..., \boldsymbol{f_n}\}$ *son bases de* V. *Las bases tienen la misma orientación si el determinante de la matriz de coeficientes al expresar una base en términos de la otra es positiva. Es decir, si* $det(\alpha_{i,j}) > 0$, *donde* $\boldsymbol{f_i} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j} \boldsymbol{e_j}$ *para* $i \in \{1, 2, ..., n\}$.

Ejercicio 14. Probar que "tener la misma orientación" es una relación de equivalencia en el conjunto de todas las bases de V y que existen exactamnete dos clases de equivalencia.

Se define una función volumen de la siguiente manera:

Definición 27. *Dado un espacio vectorial $(W, \mathbb{R}, +, \cdot)$ de dimensión n, una función*

$$\mathcal{V} : \underbrace{W \times W \times \ldots \times W}_{n \text{ veces}} \to \mathbb{R} \tag{2.23}$$

*se llama **volumen de** W si satisface*

1. *Antisimetría:*

$$\mathcal{V}(\boldsymbol{a_1}, \ldots, \boldsymbol{a_{i-1}}, \boldsymbol{a_i}, \boldsymbol{a_{i+1}}, \ldots, \boldsymbol{a_{j-1}}, \boldsymbol{a_j}, \boldsymbol{a_{j+1}}, \ldots, \boldsymbol{a_n}) \tag{2.24}$$
$$= -\mathcal{V}(\boldsymbol{a_1}, \ldots, \boldsymbol{a_{i-1}}, \boldsymbol{a_j}, \boldsymbol{a_{i+1}}, \ldots, \boldsymbol{a_{j-1}}, \boldsymbol{a_i}, \boldsymbol{a_{j+1}}, \ldots, \boldsymbol{a_n}) \tag{2.25}$$

$\forall \boldsymbol{a_1}, \ldots \boldsymbol{a_n} \in W, i, j \in \{1, \ldots, n\}$.

2. *Linealidad:*

$$\mathcal{V}(\alpha \cdot \boldsymbol{a_1} + \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a_2}, \ldots, \boldsymbol{a_n}) = \alpha \mathcal{V}(\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \ldots, \boldsymbol{a_n}) + \mathcal{V}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a_2}, \ldots, \boldsymbol{a_n}) \tag{2.26}$$

$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a_1}, \ldots \boldsymbol{a_n} \in W$.

Lema 1. *Si $T \not= 0$ es una función lineal y antisimétrica sobre un espacio vectorial $(W, \mathbb{R}, +, \cdot)$ de dimensión n, $\{\boldsymbol{e_1}, ..., \boldsymbol{e_n}\}$ una base de W. Entonces, cualquier conjunto de vectores $\{\boldsymbol{v_1}, ..., \boldsymbol{v_n}\}$ con $\boldsymbol{v_i} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j} \boldsymbol{e_j}$ para $i \in \{1, 2, ..., n\}$, se tiene que*

$$T(\boldsymbol{v_1}, ..., \boldsymbol{v_n}) = det(\alpha_{i,j})\, T(\boldsymbol{e_1}, ..., \boldsymbol{e_n}) \tag{2.27}$$

De este lema se deduce que la única libertad que queda para definir la función $\mathcal{V}$ es el valor de la función en un conjunto de vectores linealmente independiente. Para el caso de $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}, +, \cdot)$ elegiremos a la base canónica, la cuál determina la orientación positiva, para representarlo.

$$\mathcal{V}((1, 0), (0, 1)) = 1. \tag{2.28}$$

Ejercicio 15. Sean $\bar{\boldsymbol{u}} = (a, b)$ y $\bar{\boldsymbol{v}} = (c, d)$, demostrar que

$$\mathcal{V}(\bar{\boldsymbol{u}}, \bar{\boldsymbol{v}}) = det[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]\mathcal{V}((1, 0), (0, 1)) = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} \tag{2.29}$$

y mostrar que este es el área asociada usualmente a un paralelogramo de lados $\bar{\boldsymbol{u}}$ y $\bar{\boldsymbol{v}}$.

2.2.7. Cambio de coordenadas

The thing we call a rose would smell just as sweet if we called it by any other name.[1]
William Shakespeare

Si Shakespeare pensaba que una rosa seguiría siendo una rosa aunque le cambiáramos el nombre, ¿qué habría pensado de los puntos de $\mathbb{R}^2$, seguirían siendo los mismos puntos aunque los nombráramos de otra manera? Dado un subconjunto A de $\mathbb{R}^2$, un cambio de coordenadas es, en principio, renombrar sus puntos. Intuitivamente entonces lo que queremos es una función que asigne a cada punto un nuevo nombre, y como los puntos los estamos nombrando con pares de números queremos nuevos pares de números que designen a los pares anteriores. Más específicamente, lo que se busca es un mapa, ϕ, de $A \subset \mathbb{R}^2$ en $B \subset \mathbb{R}^2$ que sea biyectivo y que preserve la idea de continuidad en $\mathbb{R}^2$. Esto último se expresa en forma intuitiva con la idea de que si en A se unen dos puntos a través de una curva continua, los puntos correspondientes

[1] La cosa que llamamos rosa tendría el mismísimo grato aroma si la llamáramos de cualquier otra forma.

en B tienen que estar unidos por la correspondiente curva en B, siendo la curva en B también continua. Hasta que no hayamos visto funciones de varias variables, límite, continuidad y diferenciación no vamos a estar en condiciones de dar una definición completa de qué entendemos por un cambio de coordenadas aceptable. Mientras tanto nos quedamos con la idea intuitiva de que dado $A \subset \mathbb{R}^2$, cuyos puntos denotamos genéricamente por (a, b), y $B \subset \mathbb{R}^2$, con puntos que denotamos por (c, d), vamos a querer funciones $f_1(a, b)$ y $f_2(a, b)$, y consideramos $c = f_1(a, b)$, $d = f_2(a, b)$. Así, el "nuevo nombre" del par (a, b) es $(c, d) = (f_1(a, b), f_2(a, b))$. Probablemente la forma más sencilla de salir de este embrollo de intuiciones es con dos ejemplos, el primero sin duda ya conocido.

Dado que uno puede realizar cambios de coordenadas que darán otro nombre a los pares ordenados, las coordenadas que han sido utilizadas hasta aquí se las distingue, y se las llama **coordenadas cartesianas**, que denotamos en esta sección como (x, y). Quizás el sistema de coordenadas más usado en $\mathbb{R}^2$ después de las coordenadas cartesianas son las **coordenadas polares**. Las coordenadas polares le asignan a cada punto $\bar{\boldsymbol{a}} \in \mathbb{R}^2$ el par (r, θ), donde $r \geq 0$ es la distancia del punto $\bar{\boldsymbol{a}}$ al origen $\bar{\mathbf{0}}$, y $\alpha_0 \leq \theta < \alpha_0 + 2\pi$, α_0 fijo, es el ángulo entre el eje horizontal y la recta que une el origen $\bar{\mathbf{0}}$ y el punto $\bar{\boldsymbol{a}}$, medido en radianes. De esta manera, cada punto de $\mathbb{R}^2$ tiene una única forma de representarse en coordenadas cartesianas y en coordenadas polares. Por esto, es natural definir una función biyectiva que conecte cada punto descripto en coordenadas cartesianas con su correspondiente representación en coordenadas polares y viceversa. Sin pérdida de generalidad, supondremos $\alpha_0 = 0$. Sea $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | (x, y) \neq (0, 0)\}$ y $B = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 | r > 0, 0 \leq \theta < 2\pi\}$, definimos la función de cambio de coordenadas cartesianas a polares $T : A \to B$ dado por

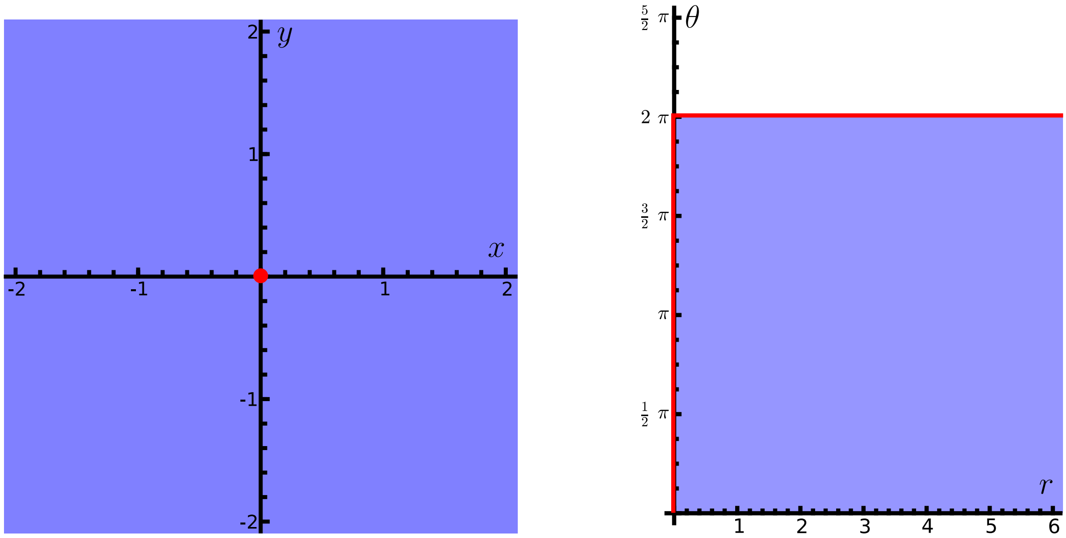
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \tag{2.30}$$

$$\theta = \begin{cases} \arctan(\frac{y}{x}), & \text{si } x > 0,\ y \geq 0, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{si } x = 0,\ y > 0, \\ \pi - \arctan(|\frac{y}{x}|), & \text{si } x < 0,\ y \geq 0, \\ \pi + \arctan(|\frac{y}{x}|), & \text{si } x < 0,\ y \leq 0, \\ \frac{3}{2}\pi, & \text{si } x = 0,\ y < 0, \\ 2\pi - \arctan(|\frac{y}{x}|), & \text{si } x < 0,\ y < 0 \end{cases}. \tag{2.31}$$

Nota: la forma de definir el ángulo θ varía de acuerdo al intervalo de definición $\alpha_0 \leq \theta < \alpha_0 + 2\pi$.

Ejercicio 16. Determinar la expresión para θ si $-\pi \leq \theta < \pi$

En la figura 2.9 se presentan los conjuntos A y B de este cambio de coordenadas, donde con rojo se han indicado los puntos que no están incluídos en el cambio de coordenadas. Notemos que al punto $(0, 0)$ no es posible representarlo en términos del par (r, θ) pues si bien es sencillo determinar que su distancia al origen de coordenadas es cero, $r = 0$, no es posible hallar el ángulo entre el eje horizontal y la recta que une el punto con el origen, al no existir esta última. Por esto es que se toma como convención, que $r = 0$ sea la expresión en coordenadas polares del origen de coordenadas.



(a) Conjunto A.

(b) Conjunto B.

Figura 2.9: Regiones A y B en el cambio de coordenadas cartesianas a polares.

La forma más directa de ver que la relación es biyectiva es obteniendo la relación inversa. En este caso el mapa que da las coordenadas cartesianas en función de las coordenadas polares es

$$x = r\cos(\theta), \tag{2.32}$$
$$y = r\,\mathrm{sen}(\theta). \tag{2.33}$$

Una forma de visualizar qué hace este cambio de coordenadas es graficar los conjuntos de puntos que se obtienen al dejar constante una de las coordenadas.

Ejemplo 1.

- *Sea la curva $x = \frac{1}{2}$. En coordenadas polares obtenemos la expresión*

  $$r\,cos\theta = \frac{1}{2}$$

  o equivalentemente

  $$r = \frac{1}{2cos\theta}$$

  . La última expresión da una dependencia de r en términos de θ y permite deducir facilmente para que valores de θ tiene sentido la igualdad. Esto es, $r > 0$ para $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}) \bigcup [\pi, \frac{3}{2}\pi)$.

- *Sea la curva $y = \frac{3}{2}$. Su correspondiente expresión polar es*

  $$r\,sen\theta = \frac{3}{2}$$

  . Con un razonamiento similar al inciso anterior se deduce que $r > 0$ para $\theta \in (0, \pi)$.

- *Sea la curva $r = 1$. Su correspondiente ecuación cartesiana es:*

  $$x = 1\cos(\theta), \tag{2.34}$$
  $$y = 1\,\mathrm{sen}(\theta), \tag{2.35}$$

  utilizando 2.32, la cual es la representación paramétrica de la circunferencia

  $$x^2 + y^2 = 1,$$

  .

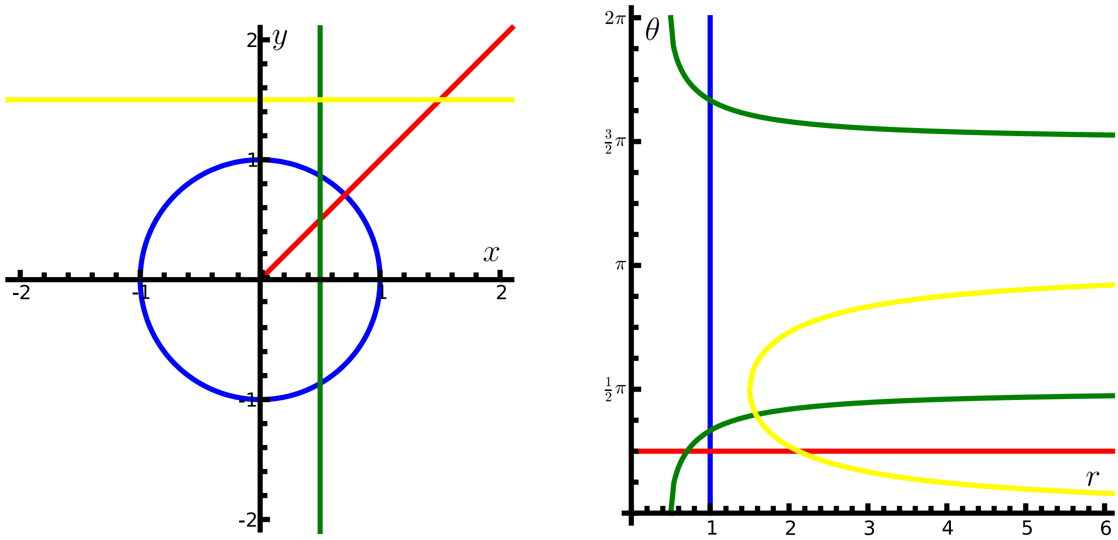
- *Sea la curva* $\theta = \frac{\pi}{4}$. *Su correspondiente ecuación cartesiana es*

$$x = r\cos(\frac{\pi}{4}), \tag{2.36}$$

$$y = r\,\mathrm{sen}(\frac{\pi}{4}), \tag{2.37}$$

o equivalentemente, $\{(x,y)|\, x = y \wedge x > 0 \wedge y > 0\}$.

En la figura 2.10a hemos graficado en verde la curva $x = \frac{1}{2}$, en amarillo la curva $y = \frac{3}{2}$, en azul la curva $r = 1$, y en rojo la curva $\theta = \frac{\pi}{4}$, todas en términos de sus coordenadas x y y. En la figura 2.10b hemos graficado los mismos conjuntos de puntos, pero en términos de sus coordenadas r y θ. Así, la curva de un color en la figura de la izquierda representa el mismo conjunto de puntos que la curva del mismo color en la figura de la derecha. Una cosa a notar es que la curva verde es discontinua en coordenadas polares. Sin embargo, la curva está formada por dos tramos continuos, y la discontinuidad se produce porque en coordenadas cartesianas pasamos por $y = 0$, $x > 0$. Al pasar por allí la coordenada θ pega un salto, pasando de 0 a 2π. Esto no invalida el sistema de coordenadas, sólo nos dice que no podemos utilizarlo para analizar continuidad en $y = 0$, $x > 0$.



(a) Curvas en coordenadas cartesianas. (b) Curvas en coordenadas polares.

Figura 2.10: Mismos conjuntos de puntos en los dos sistemas de coordenadas.

Es importante notar que este cambio de coordenadas está definido en término de funciones trigonométricas, las cuales a su vez se pueden definir en términos de funciones elementales e integrales, sin hacer mención alguna a la estructura del espacio euclídeo, en particular sin ninguna necesidad de haber definido una norma en $\mathbb{R}^2$ o de definir las funciones trigonométricas en función de triángulos rectángulos. Sin embargo, cuando uno toma el caso de $\mathbb{E}^2$, el cambio de coordenadas toma su interpretación usual, siendo r la longitud del vector posición y θ el ángulo de dicho vector con respecto al eje x, lo que está representado en la figura 2.11.

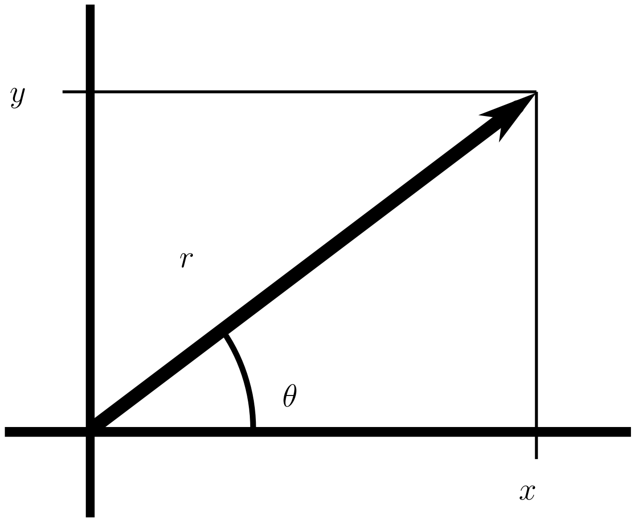
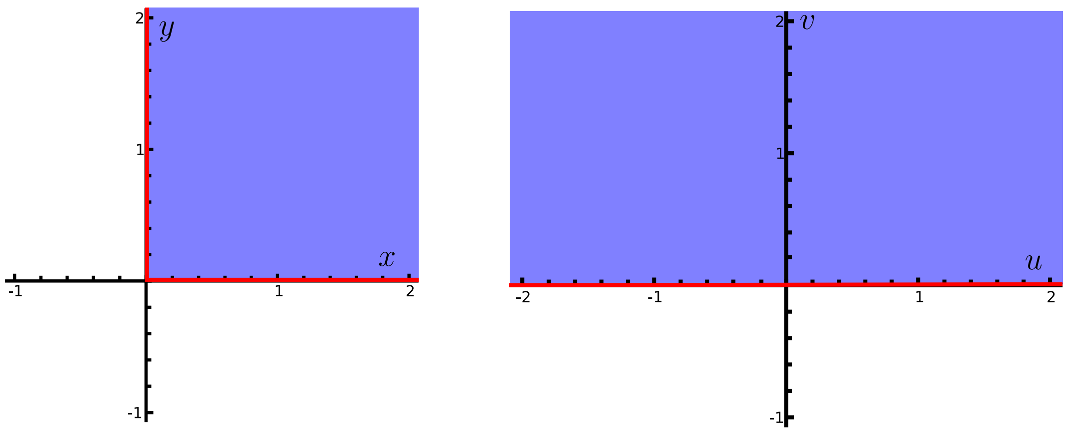


Figura 2.11: Coordenadas polares en $\mathbb{E}^2$.

El segundo ejemplo de cambio de coordenadas que presentaremos es el de las llamadas coordenadas hiperbólicas. En este caso el conjunto A está dado por $A = \{(x, y)|x > 0,\ y > 0\ \} \subset \mathbb{R}^2$, y las coordenadas hiperbólicas las denotamos por (u, v), y el conjunto B está dado por $B = \{(u, v)|v > 0\} \subset \mathbb{R}^2$. Las regiones A y B aparecen en la figura 2.12.



(a) Conjunto A.

(b) Conjunto B.

Figura 2.12: Regiones A y B en el cambio de coordenadas cartesianas a polares.

El par (u, v) se define en términos de (x, y) como

$$u = -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{y}{x}\right), \tag{2.38}$$

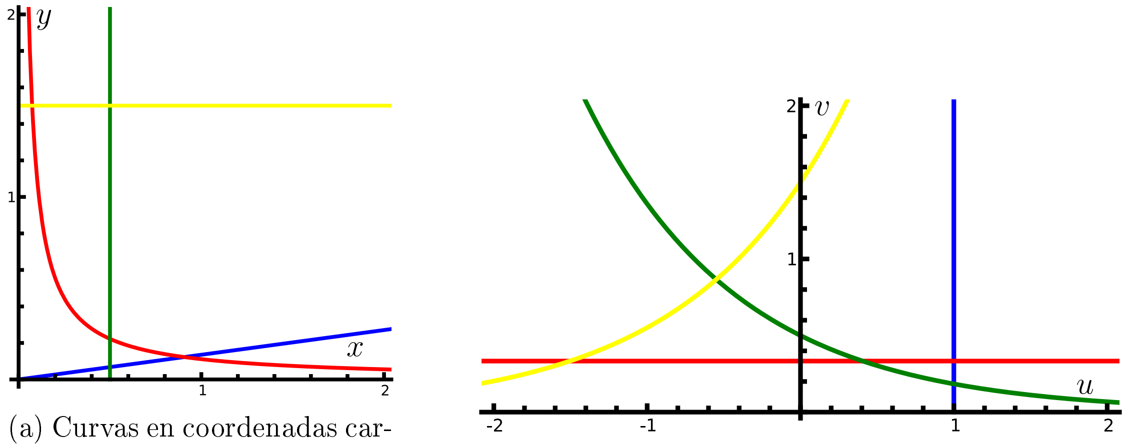
$$v = \sqrt{xy}. \tag{2.39}$$

La transfomación inversa está dada por

$$x = ve^{u}, \tag{2.40}$$

$$y = ve^{-u}. \tag{2.41}$$

Así como en el caso de coordenadas polares, en la figura 2.13 hemos graficado en verde la curva $x = \frac{1}{2}$, en amarillo la curva $y = \frac{3}{2}$, en azul la curva $u = 1$, y en rojo la curva $v = \frac{1}{3}$, en 2.13a en términos de sus coordenadas x y y y en 2.13b en términos de sus coordenadas u y v.



(a) Curvas en coordenadas cartesianas.

(b) Curvas en coordenadas hiperbólicas.

Figura 2.13: Mismos conjuntos de puntos en los dos sistemas de coordenadas.

Otra forma interesante de ver qué significa el cambio de coordenadas se presenta en la figura 2.14. Allí se han graficado en azul curvas de u constante y en rojo curvas de v constante. Las curvas de u contante tiene valores de u de 2, 1, 1/2, 0, $-1/2$, -1 y -2, empezando de la de menor pendiente a la de mayor pendiente. Las curvas de v constante tienen valores de v de 1/4, 1/2, 3/4, 1, 5/4, 3/2 y 7/4, empezando de la más cercana al origen. Esto permite visualizar cómo cambian las coordenadas (u, v) a medida que nos movemos en el plano (x, y).

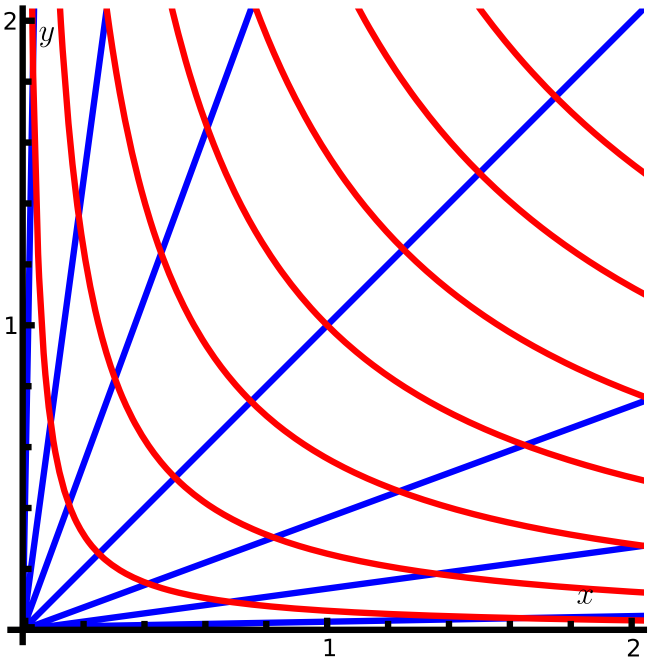


Figura 2.14: Grilla hiperbólica.

Finalmente, es importante notar que aunque el cambio de coordenadas se define en $\mathbb{R}^2$, sin necesidad de tener estructura de espacio vectorial o producto interno, también se puede definir el mismo cambio de coordenadas en $\mathbb{E}^2$, dado que como conjuntos de puntos son equivalentes. En este caso hay que tener cuidado en que operaciones vectoriales que han sido definidas en $\mathbb{E}^2$ en términos de coordenadas cartesianas en general no tienen la misma expresión al pasar a otras coordenadas. Por ejemplo, si tenemos un vector $\bar{\boldsymbol{a}}$ de coordenadas cartesianas (x, y), y con coordenadas polares (r, θ), entonces su módulo se definió como $\sqrt{x^2 + y^2}$, que en general será distinto de $\sqrt{r^2 + \theta^2}$. En estos casos se considera que la expresión que conserva su validez es aquella en el sistema de coordenadas en que fue definido, que en general son coordenadas cartesianas, y que para encontrar la expresión correspondiente hay que usar el cambio de coordenadas.

Ejercicio 17. Sean dos vectores $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{E}^2$, encontrar la expresión en coordenadas polares de $\boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{b}$ y de $V(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$.

Ejercicio 18. Sean dos puntos $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{E}^2$, encontrar la expresión en coordenadas polares de la distancia entre ellos.

2.3. Los conjuntos $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{E}^3$

La construcción de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{E}^2$ que realizamos en la sección anterior se generaliza a tres dimensiones en forma casi directa. En esta sección se presenta la construcción de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{E}^3$, en forma análoga a la anterior, junto con algunas particularidades específicas de tres dimensiones.

2.3.1. Definición de $\mathbb{R}^3$ y el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$

Partiendo del conjunto de números reales, $\mathbb{R}$, definimos $\mathbb{R}^3$ a través de

Definición 28. $$\mathbb{R}^3 := \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{\, (a, b, c) \mid a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}\}.$$

Si queremos representar gráficamente los elementos de $\mathbb{R}^3$, como hicimos con $\mathbb{R}^2$ y el plano cartesiano, necesitamos un objeto con una dimensión más, un sistema cartesiano de tres ejes. En la figura 2.15 se muestra la representación usual. Es importante recalcar que a pesar de lo que la representación sugiere, hasta ahora nada nos dice que $\mathbb{R}^3$ es "rígido", no tenemos una operación de suma o de producto y tampoco sabemos cuál es la longitud de un punto o el ángulo que forman dos elementos. Así, en este punto, no podemos hablar de poner tres ejes formando un ángulo recto (nuevamente, a pesar de lo que la representación sugiere). El siguiente paso es definir las operaciones suma y producto por un escalar.

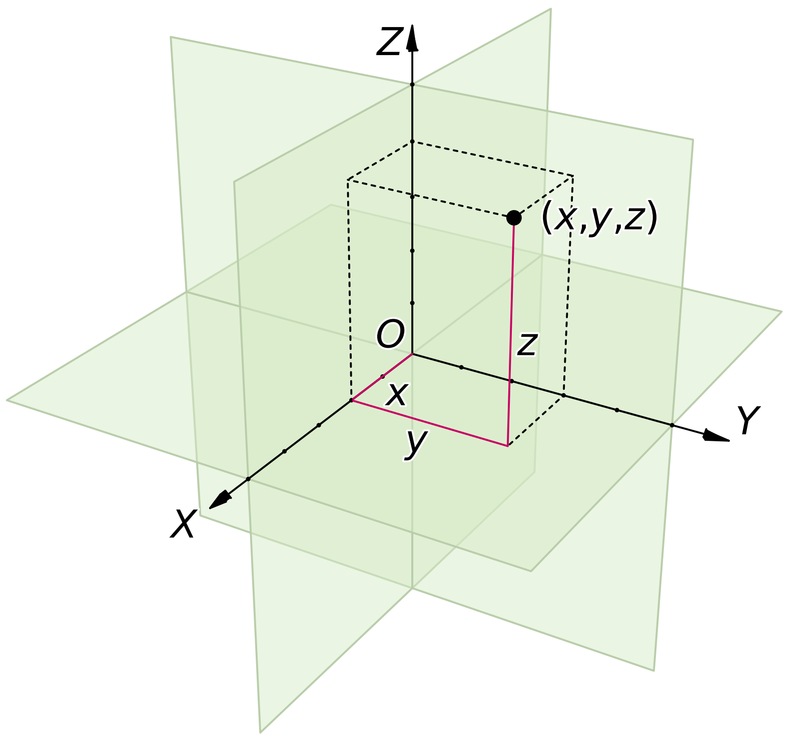


Figura 2.15: El espacio cartesiano.

Utilizando las operaciones de suma y producto en $\mathbb{R}$, definimos las dos operaciones correspondientes en $\mathbb{R}^3$.

Definición 29. *Definimos en $\mathbb{R}^3$ la operación binaria interna suma, $+$,*

$$+ : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \tag{2.42}$$

como

$$(a, b, c) + (d, e, f) = (a + d, b + e, c + f), \qquad \forall (a, b, c), (d, e, f) \in \mathbb{R}^3, \tag{2.43}$$

y la operación binaria externa producto por un escalar,$\boldsymbol{\cdot}$,

$$\boldsymbol{\cdot} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \tag{2.44}$$

como

$$\alpha \boldsymbol{\cdot} (a, b, c) = (\alpha \cdot a, \alpha \cdot b, \alpha \cdot c), \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R} \ y \ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3. \tag{2.45}$$

Con esta definición tenemos el siguiente teorema.

Teorema 6. $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, \boldsymbol{\cdot})$ *es un espacio vectorial.*

Ejercicio 19. Probar el teorema anterior.

Ejercicio 20. Determinar la dimensión de $\mathbb{R}^3$, encontrar una base del mismo y expresar un vector cualquiera $\bar{\boldsymbol{u}} = (a, b, c)$ como combinación lineal de la base.

Al igual que se hizo con $\mathbb{R}^2$, al otorgarle a $\mathbb{R}^3$ la estructura de espacio vectorial, se piensa la representación de vectores no ya como puntos aislados sino como una flecha que va desde el origen de coordenadas hasta el punto correspondiente (ver figura 2.16). Nuevamente hay que tener cuidado de no asignarle a estos vectores magnitud y sentido, ya que todavía no hemos definido una norma en el espacio vectorial. La misma discusión respecto a realizar las operaciones de suma y producto por un escalar en forma gráfica que se hizo para $\mathbb{R}^2$ se aplica en este caso.

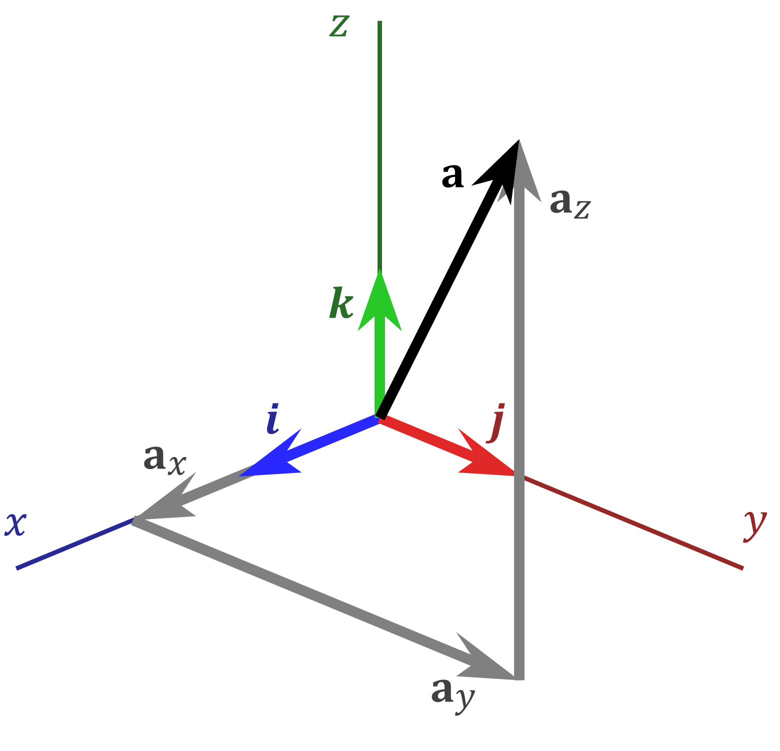


Figura 2.16: Representación de $\mathbb{R}^3$ como espacio vectorial.

2.3.2. Cambio de coordenadas

En la sección sobre $\mathbb{R}^2$ se presentó, por razones de continuidad, primero el producto escalar en $\mathbb{R}^2$ antes que los cambios de coordenadas en el mismo. Sin embargo, el realizar un cambio de coordenadas es independiente de la existencia de un producto interno. Por eso, para recalcar dicha independencia, presentamos ahora primero el tema de cambio de coordenadas, y en la siguiente sección desarrollaremos el producto interno.

Nuevamente, un cambio de coordenadas es una función de $A \subset \mathbb{R}^3$ en $B \subset \mathbb{R}^3$, ϕ, que sea biyectiva y que mantenga la idea de continuidad. Esto es $\phi : (x, y, z) \to (a, b, c)$, $a = a(x, y, z), b = b(x, y, z), c = c(x, y, z)$, donde ϕ es biyectiva y conserva la idea de continuidad. Distinguimos las coordenadas que venimos utilizando llamándolas coordenadas cartesianas y las denotamos por (x, y, z).

Dos sistemas de coordenadas en $\mathbb{R}^3$ ampliamente utilizados son las coordenadas cilíndricas y las coordenadas esféricas, que presentamos a continuación.

Coordenadas cilíndricas.

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | (x, y, z) \neq (0, 0, 0)\}, \qquad B = \{(\rho, \phi, \tilde{z}) \in \mathbb{R}^3 | \rho > 0, 0 \leq \phi < 2\pi\}, \tag{2.46}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \tag{2.47}$$

$$\phi = \begin{cases} \arctan(\frac{y}{x}), & \text{si } x > 0,\ y \geq 0, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{si } x = 0,\ y > 0, \\ \pi - \arctan(|\frac{y}{x}|), & \text{si } x < 0,\ y \geq 0, \\ \pi + \arctan(|\frac{y}{x}|), & \text{si } x < 0,\ y \leq 0, \\ \frac{3}{2}\pi, & \text{si } x = 0,\ y < 0, \\ 2\pi - \arctan(|\frac{y}{x}|), & \text{si } x < 0,\ y < 0 \end{cases} \tag{2.48}$$

$$\tilde{z} = z. \tag{2.49}$$

La inversa está dada por

$$x = r\cos(\phi), \tag{2.50}$$

$$y = r\,\mathrm{sen}(\phi), \tag{2.51}$$

$$z = \tilde{z}. \tag{2.52}$$

Nuevamente es conveniente visualizar los conjuntos de puntos que obtenemos si mantenemos una de las coordenadas constantes. En la figura () se presentan las superficies $\rho =$, $\phi =$ y $\tilde{z} =$, en términos de sus coordenadas cartesianas expandir y poner la figura.

También, aunque todavía no tengamos una definición de ángulo y longitud, se pueden interpretar el cambio de coordenadas en la forma usual, que se presenta en la figura 2.17.

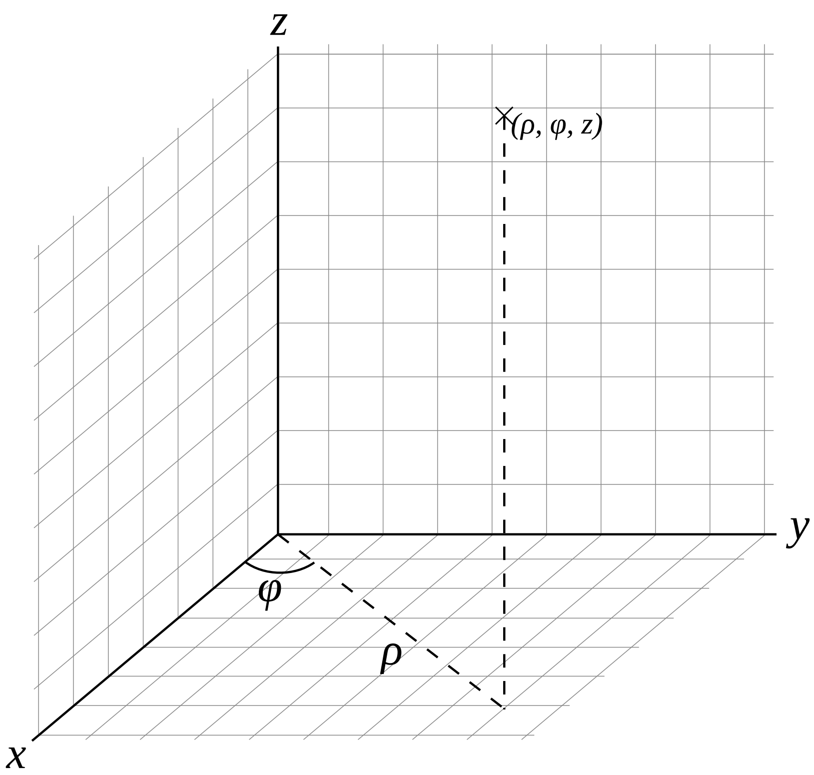


Figura 2.17: Coordenadas Cilíndricas.

Coordenadas esféricas.

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | (x, y) \neq (0, 0)\}, \qquad B = \{(r, \theta, \phi) \in \mathbb{R}^3 | r > 0, 0 < \theta < \pi, 0 \leq \phi < 2\pi\}, \tag{2.53}$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \tag{2.54}$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right), \tag{2.55}$$

$$\phi = \begin{cases} \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), & \text{si } y \geq 0, \\ 2\pi - \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), & \text{si } y < 0. \end{cases} \tag{2.56}$$

La inversa está dada por

$$x = \rho \operatorname{sen}\theta \cos\phi, \tag{2.57}$$

$$y = \rho \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi, \tag{2.58}$$

$$z = \rho \cos\theta. \tag{2.59}$$

En la figura () se presentan las superficies $r =$, $\theta =$ y $\phi =$ en términos de coordenadas cartesianas. En la figura 2.18 se muestra la representación usual del cambio de coordenadas.

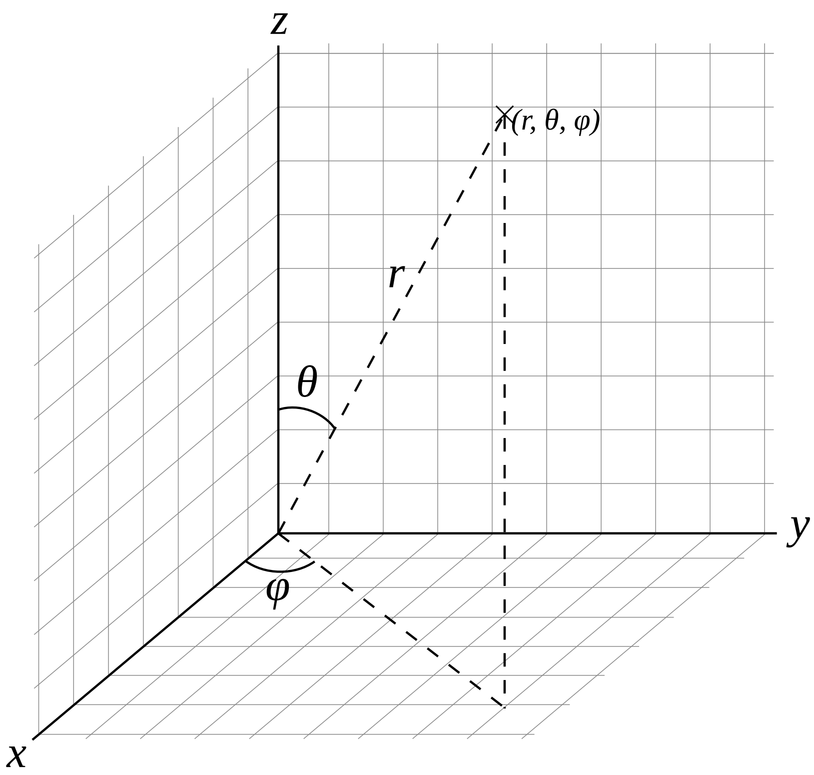


Figura 2.18: Coordenadas Esféricas.

2.3.3. Producto escalar

Definición 30. *Se define el producto escalar*

$$\bullet : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \tag{2.60}$$

como

$$(a, b, c) \bullet (d, e, f) = a \cdot d + b \cdot e + c \cdot f \qquad \forall (a, b, c), (d, e, f) \in \mathbb{R}^3. \tag{2.61}$$

Ejercicio 21. Probar que la definición anterior efectivamente define un producto interno en $\mathbb{R}^3$.

La norma asociada a este producto interno está dada por

$$||(a, b, c)|| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \tag{2.62}$$

y la distancia entre dos puntos por

$$d((a, b, c), (d, e, f)) = \sqrt{(a-d)^2 + (b-e)^2 + (c-f)^2}. \tag{2.63}$$

Nuevamente estas dos últimas expresiones se corresponden con el teorema de Pitágoras, y también de la definición de ángulo entre dos vectores de un espacio con producto interno tenemos que se safisface el teorema del coseno. Por lo tanto, con ésta definición de producto interno, hemos recuperado las propiedades que se le asignan al espacio tridimensional, al que se denomina espacio euclídeo de dimensión 3, y se denota por $\mathbb{E}^3$.

Definición 31. *Se define el espacio euclídeo de dimensión* 3 *como*

$$\mathbb{E}^3 := (\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, \cdot, \bullet). \tag{2.64}$$

Todas las propiedades de espacio vectorial con producto interno se cumplen para $\mathbb{E}^3$, en particular la interpretación del producto escalar como una proyección en la dirección de un vector y la descomposición en componentes paralela y perpendicular a dicho vector.

2.3.4. Producto cruz

Otra operación de importancia en $\mathbb{E}^3$ es el llamado "producto cruz", el cual no está definido para dimensión distinta de 3, y que definimos a continuación.

Definición 32. *Se define el producto cruz*

$$\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \tag{2.65}$$

como

$$(a, b, c) \times (d, e, f) = (b \cdot f - c \cdot e, c \cdot d - a \cdot f, a \cdot e - b \cdot d). \tag{2.66}$$

Esta operación toma dos vectores y devuelve un vector. De la definición se obtiene directamente que la operación es antisimétrica,

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}, \tag{2.67}$$

y lineal,

$$\boldsymbol{a} \times (\alpha \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \alpha \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}. \tag{2.68}$$

Ejercicio 22. Probar éstas propiedades.

Si definimos $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ como

$$\boldsymbol{i} = (1, 0, 0), \qquad \boldsymbol{j} = (0, 1, 0), \qquad \boldsymbol{k} = (0, 0, 1), \tag{2.69}$$

se puede escribir en forma simbólica

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (a, b, c) \times (d, e, f) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix}, \tag{2.70}$$

lo cual suele ser más fácil de recordar que la definición del producto cruz.

Si bien la definición de producto cruz es independiente de la definición de producto interno, la mayor utilidad del producto cruz se obtiene cuando se lo combina con el producto escalar. Tenemos las siguientes propiedades:

$$\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = 0, \tag{2.71}$$

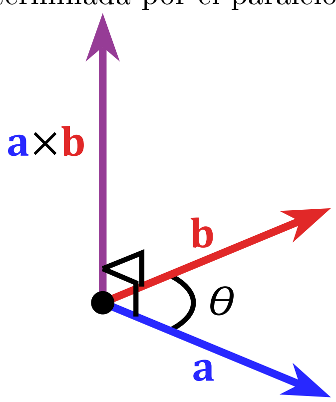
$$\boldsymbol{b} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = 0, \tag{2.72}$$

$$||\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|| = ||\boldsymbol{a}||||\boldsymbol{b}|| \operatorname{sen} \theta, \tag{2.73}$$

donde $\theta = \text{ángulo}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$.

Ejercicio 23. Probar las propiedades anteriores.

Las dos primeras propiedades nos dicen que el vector $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ es perpendicular a $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$. En $\mathbb{E}^3$, por ser un espacio vectorial con producto interno de dimensión 3, sólo existe una dirección perpendicular a dos vectores dados, por lo tanto, $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ está en esa dirección perpendicular (ver figura ()). La tercer propiedad se puede ver como que el módulo de $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ es igual al área determinada por el paralelogramo con lados $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$.



2.3.5. Rectas y planos en $\mathbb{E}^3$

Una recta en $\mathbb{E}^3$ es una curva $\boldsymbol{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{E}^3$ con la propiedad de que une dos puntos tomando el recorrido de menor distancia. Para poder hacer uso de esta definición no sólo hace falta tener una definición de distancia sino que también es necesario el uso de argumentos variacionales, para determinar cuál es efectivamente la curva de menor distancia entre dos puntos. Sin entrar en estos detalles utilizaremos argumentos semiintuitivos para escribir la ecuación de una recta utilizando vectores en $\mathbb{E}^3$.

Si tenemos un vector $\boldsymbol{a} \in \mathbb{E}^3$, podemos pensar que si vamos "elongando" el vector sin cambiar su dirección, los puntos por los que pasamos mientras realizamos este procedimiento se encuentran sobre una recta. Dichos puntos estarán dados por el conjunto $\lambda \cdot \boldsymbol{a}$, donde λ toma todos los posibles valores en $\mathbb{R}$ (ver figura ()). Como en particular se puede tomar $\lambda = 0$, ésta recta pasa por el origen. Si variamos el vector $\boldsymbol{a}$, con este procedimiento obtenemos todas las posibles rectas que pasan por el origen. Además, si al vector dado por $\lambda \cdot \boldsymbol{a}$ para un cierto λ se le suma el vector $\boldsymbol{b}$, obtenemos la recta que pasa por el punto $\boldsymbol{b}$ y que tiene dirección $\boldsymbol{a}$ (ver figura ()). La ecuación de dicha recta está dada por

$$\boldsymbol{r}(\lambda) = \lambda \cdot \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}. \tag{2.74}$$

Cuando expresamos una recta en la forma anterior decimos que la misma está en forma paramétrica, con parámetro λ. Una parametrización de una recta no es única.

Ejercicio 24. Determinar cuáles de las siguientes rectas corresponden al mismo conjunto de puntos en $\mathbb{R}^3$.

Supongamos ahora que tenemos dos vectores, $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ y queremos encontrar la ecuación de la recta que pasa por los extremos de $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$. Se sabe que dos puntos en $\mathbb{E}^3$ determinan unívocamente una recta, considerada ésta como un conjunto de puntos. Si la recta ha de pasar por $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ entonces debe pasar por $\boldsymbol{a}$ y tener la dirección de $\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$, y por lo tanto la podemos escribir como

$$\boldsymbol{r}(\lambda) = \lambda \cdot (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}) + \boldsymbol{a}. \tag{2.75}$$

Ejercicio 25. Mostrar que la recta anterior efectivamente pasa por $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$.

Pasemos ahora a considerar un plano en $\mathbb{E}^3$. Como un plano es una superficie necesitamos dos parámetros para describirlo, esto es $\boldsymbol{p} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{E}^3$. En particular, consideremos dos vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$, la superficie formada por los puntos $\lambda \cdot \boldsymbol{a} + \mu \cdot \boldsymbol{b}$, donde $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}$, forma un plano que pasa por el origen y que contiene a los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$. Si a los puntos de este plano le sumamos un vector $\boldsymbol{c}$, entonces obtenemos un plano paralelo al plano anterior que pasa por el punto $\boldsymbol{c}$, esto es

$$\boldsymbol{p}(\lambda, \mu) = \lambda \cdot \boldsymbol{a} + \mu \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}. \tag{2.76}$$

El plano así descripto se dice parametrizado por los parámetros λ y μ. Como en el caso de la recta, la parametrización no es única.

Ejercicio 26. Determinar cuáles de los siguientes planos corresponden al mismo conjunto de puntos en $\mathbb{R}^3$:

Tomamos ahora tres vectores, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$, y queremos encontrar el plano que pasa por los extremos de dichos vectores. Entonces, el plano debe contener a los vectores $\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{c} - \boldsymbol{a}$, y debe pasar por el punto $\boldsymbol{a}$, con lo que tenemos

$$\boldsymbol{p}(\lambda, \mu) = \lambda \cdot (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}) + \mu \cdot (\boldsymbol{c} - \boldsymbol{a}) + \boldsymbol{a}. \tag{2.77}$$

Ejercicio 27. Mostrar que el plano anterior efectivamente pasa por $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$.

Supongamos que tenemos dos vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ y queremos encontrar el plano perpendicular a $\boldsymbol{a}$ que pasa por $\boldsymbol{b}$. La pregunta que tendríamos que estarnos haciendo es: ¿a qué nos referimos con plano perpendicular a un vector? Más adelante vamos a ver cuándo decimos que un vector es perpendicular a una superficie, por ahora nos alcanza con pedir que todo vector determinado por dos puntos en el plano sea perpendicular a $\boldsymbol{a}$. Esto es, si $\boldsymbol{p}$ es un punto cualquiera del plano, y como $\boldsymbol{b}$ también es un punto del plano, entonces $\boldsymbol{p}-\boldsymbol{b}$ tiene que ser perpendicular a $\boldsymbol{a}$ (ver figura ()). Por esto, la ecuación de dicho plano viene dada por

$$(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{b}) \bullet \boldsymbol{a} = 0. \tag{2.78}$$

Ejercicio 28. Encontrar una forma paramétrica de la ecuación del plano anterior.

Consideremos que tenemos dado un plano y que queremos encontrar la ecuación de la recta que pasa por un punto $\boldsymbol{a}$ y que es perpendicular al plano. Si tomamos tres puntos no colineales en el plano, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ y $\boldsymbol{d}$, entonces los vectores $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{d}$ y $\boldsymbol{c}-\boldsymbol{d}$ son paralelos al plano. Así, $(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{d}) \times (\boldsymbol{c}-\boldsymbol{d})$ es un vector perpendicular al plano. Entonces la ecuación de la recta es

$$\boldsymbol{r}(\lambda) = \lambda \cdot \big((\boldsymbol{b}-\boldsymbol{x}) \times (\boldsymbol{c}-\boldsymbol{x})\big) + \boldsymbol{a}. \tag{2.79}$$

2.3.6. Volúmen en $\mathbb{R}^3$

Finalmente, queremos poder calcular volúmenes en $\mathbb{R}^3$, sin embargo, la idea general de volumen y su cálculo deben esperar hasta tener definida la integral. Sin embargo, tal como ocurre con $\mathbb{R}^2$, la idea de volumen de un paralelepípedo es anterior a la integral, definiéndose a partir de una función volumen (ver la definición 27). Así, asociado a tres vectores, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$, tenemos asociado un volumen $V(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$, cuya interpretación gráfica se muestra en la figura (). En este caso, la libertad que queda en la función volumen se fija definiendo

$$V((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)) := 1. \tag{2.80}$$

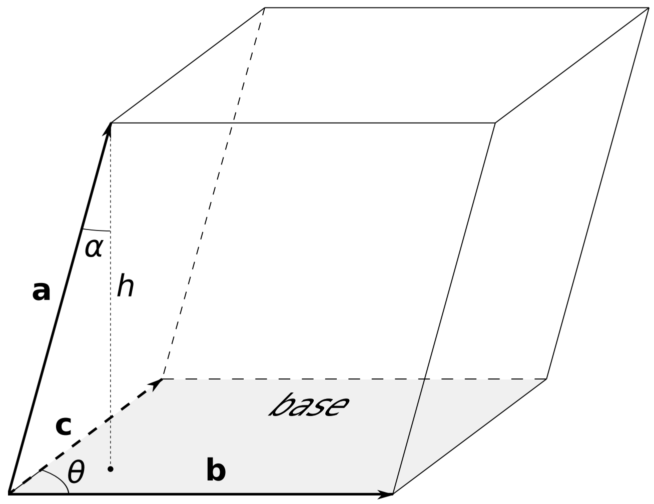
Esta definición es independiente de tener una norma o producto escalar en $\mathbb{R}^3$, sin embargo tiene una interesante relación con el producto escalar y el producto cruz. Si estamos en $\mathbb{E}^3$ se define el producto triple como

$$\boldsymbol{a} \bullet (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}). \tag{2.81}$$

Teniendo en cuenta las propiedades del producto escalar y del producto cruz, se obtiene que el producto triple da el volumen del paralelepípedo formado por $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, lo que se pide probar en el siguiente ejercicio.

Ejercicio 29. Probar que

$$V((a,b,c),(d,e,f),(g,h,i)) = (a,b,c) \bullet \big((d,e,f) \times (g,h,i)\big) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}. \tag{2.82}$$



2.4. Los conjuntos $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{E}^n$

La construcción de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{E}^n$ sigue el mismo camino que usamos para construir $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{E}^2$, y $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{E}^3$. El conjunto $\mathbb{R}^n$ se define como

Definición 33. $\mathbb{R}^n := \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n \text{ veces}} = \{ (a_1, a_2, \cdots, a_n) \mid a_1 \in \mathbb{R}, a_2 \in \mathbb{R}, \cdots, a_n \in \mathbb{R}\}.$

Usando las operaciones de suma y multiplicación en $\mathbb{R}$, definimos las dos operaciones correspondientes en $\mathbb{R}^n$.

Definición 34. *Definimos en $\mathbb{R}^n$ la suma*

$$+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \tag{2.83}$$

como

$$(a_1, a_2, \cdots, a_n)+(b_1, b_2, \cdots, b_n) = (a_1+b_1, a_2+b_2, \cdots, a_n+b_n), \qquad \forall (a_1, a_2, \cdots, a_n), (b_1, b_2, \cdots, b_n) \in \mathbb{R}^n, \tag{2.84}$$

y la multiplicación

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \tag{2.85}$$

como

$$\alpha \cdot (a_1, a_2, \cdots, a_n) = (\alpha \cdot a_1, \alpha \cdot a_2, \cdots, \alpha \cdot a_n), \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R} \text{ y } (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^3. \tag{2.86}$$

Tenemos el siguiente teorema, y los ejercicios correspondientes.

Teorema 7. $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}, +, \cdot)$ *es un espacio vectorial.*

Ejercicio 30. Probar el teorema anterior.

Ejercicio 31. Determinar la dimensión de $\mathbb{R}^n$, encontrar una base del mismo y expresar un vector cualquiera $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ como combinación lineal de la base.

Elegimos un producto interno, al cual llamamos producto escalar.

Definición 35. *Se define el producto escalar*

$$\bullet : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \tag{2.87}$$

como

$$(a_1, a_2, \cdots, a_n)\bullet(b_1, b_2, \cdots, b_n) = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \cdots + a_n \cdot b_n, \forall (a_1, a_2, \cdots, a_n), (b_1, b_2, \cdots, b_n) \in \mathbb{R}^n. \tag{2.88}$$

Ejercicio 32. Probar que la definición anterior efectivamente define un producto interno en $\mathbb{R}^n$.

La norma asociada a este producto interno está dada por

$$||(a_1, a_2, \cdots, a_n)|| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2} \tag{2.89}$$

y la distancia entre dos puntos por

$$d((a_1, a_2, \cdots, a_n), (b_1, b_2, \cdots, b_n)) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + \cdots + (a_n - b_n)^2}. \tag{2.90}$$

Nuevamente estas dos últimas expresiones se corresponden con el teorema de Pitágoras, y también de la definición de ángulo entre dos vectores de un espacio con producto interno tenemos que

$$||\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}||^2 = ||\boldsymbol{a}||^2 + ||\boldsymbol{b}||^2 - 2||\boldsymbol{a}||||\boldsymbol{b}|| \cos\theta. \tag{2.91}$$

Así hemos generalizado las ideas de la geometría plana y del espacio a n dimensiones, a la estructura obtenida le llamamos espacio euclídeo de dimensión n.

Definición 36. *Se define el espacio euclídeo de dimensión n como*

$$\mathbb{E}^n := (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}, +, \cdot, \bullet). \tag{2.92}$$

Así como en dimensión 2 y 3, para dimensiones mayores también se pueden definir cambios de coordenadas, por esto a las coordenadas en las cuales hemos definido el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ y el espacio vectorial con producto interno $\mathbb{E}^n$ las distinguimos llamándolas coordenadas cartesianas. Es también conveniente distinguir una base del espacio vectorial, la que denotamos como $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$, donde $\boldsymbol{e}_i$ es el vector formado por todas sus componentes nulas excepto en la componente i, donde tiene un uno.

Ejercicio 33. Demostrar que el conjunto anterior es una base de $\mathbb{R}^n$ y expresar un vector cualquiera como combinación lineal de la base.

Finalmente, y en particular como requisito para definir la integral en $\mathbb{E}^n$, necesitamos una función volumen. Esta se fija (ver definición 27) definiendo

$$V(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n) = 1. \tag{2.93}$$

Ejercicio 34. Probar que

$$\text{Volumen}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n) = det[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n], \tag{2.94}$$

donde $[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n]$ es la matriz formada con las componentes de los vectores $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2, \ldots,$ $\boldsymbol{a}_n$, ubicando estos vectores como columnas.

Capítulo 3

Funciones multivariable

En el capítulo anterior se definió el “escenario” donde transcurre el análisis multivariable, ahora nos toca encargarnos de las “actrices”. Estas “actrices” son las llamadas funciones multivariable. En este capítulo las definiremos propiamente y finalmente trataremos algunos casos particulares de importancia. A no desalentarse que esto recién empieza.

3.1. Funciones de varias variables

Una vez que está claro lo que es una funión (Capítulo 1), a lo que llamamos funciones de varias variables o funciones multivariable son simplementes funciones con un dominio particular, y en general también con un codominio particular. Así, se llama función de varias variables a una función

$$f : A \subset \mathbb{R}^n \to B, \qquad \text{ó} \qquad f : A \subset \mathbb{E}^n \to B. \tag{3.1}$$

En lo que sigue, tomaremos generalmente $B \subset \mathbb{R}^m$. Si $m = 1$, se llama función real o escalar y si $m > 1$, función vectorial, aunque esta terminología sólo es correcta si B es un subconjunto de un espacio vectorial, normalmente $B \subset \mathbb{E}^m$. Si no estamos particularmente interesados en a qué subconjunto de $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{E}^n$, $\mathbb{R}^m$ o $\mathbb{E}^m$ nos estamos refiriendo, o si dicho subconjunto se sobreentiende de la definición de f, escribiremos simplemente $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ o $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{E}^m$. Muchas veces también se escribe $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ para denotar $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{E}^m$, $f : \mathbb{E}^n \to \mathbb{R}^m$ o $f : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^m$, o subconjuntos de $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{E}^n$, $\mathbb{R}^m$ o $\mathbb{E}^m$. Si bien todo esto es tremendamente confuso, es también práctica común, y el contexto tendría que ser suficientemente claro como para saber en qué caso nos encontramos. Como notación, en general, para denotar variables en $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{E}^n$ utilizaremos $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n)$, y si la imagen de f está en $\mathbb{R}^m$ o en $\mathbb{E}^m$ utilizaremos $f(\boldsymbol{x}) = (f_1(\boldsymbol{x}), \cdots, f_m(\boldsymbol{x}))$, donde a $f_i(\boldsymbol{x})$ le llamamos función componente i-ésima de f.

Una vez que tenemos definidas la suma y el producto por un escalar real en $\mathbb{R}^m$ podemos usar estas operaciones para definir la suma de funciones y el producto de un escalar por una función.

Definición 37. *Sean $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, se define la **suma de funciones***

$$f + g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \tag{3.2}$$

como

$$(f + g)(\boldsymbol{x}) := f(\boldsymbol{x}) + g(\boldsymbol{x}), \tag{3.3}$$

*y el **producto de una función por un escalar real***

$$\alpha \cdot f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \tag{3.4}$$

como

$$(\alpha \cdot f)(\boldsymbol{x}) := \alpha \cdot f(\boldsymbol{x}). \tag{3.5}$$

Notar que es necesario definir estas operaciones, ya que la operación "+" a la izquierda de la igualdad (3.3) es una operación distinta a la operación "+" a la derecha, siendo la primera una operación que toma dos funciones y devuelve otra función mientras que la de la derecha es una suma de elementos de $\mathbb{R}^n$, definida en la definición 34 en términos de la suma de números reales. Asimismo, si el conjunto de llegada es $\mathbb{E}^m$, se pueden definir operaciones entre funciones correspondientes al producto escalar o ángulo entre vectores.

Con las definiciones anteriores se le puede dar a un conjunto de funciones la estructura de espacio vectorial. Sin embargo no entraremos en detalles, y pasaremos a considerar otra importante operación con funciones, la composición. Esta operación no es nueva, es simplemente la definición 9 aplicada al caso que estamos tratando, pero dada su importancia la ponemos en esta sección como una definición aparte.

Definición 38. *Sean $f : A \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^r$ y $g : B \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Si $g[B] \subset A$, se define la* ***composición de funciones***

$$f \circ g : B \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^r \tag{3.6}$$

como

$$(f \circ g)(\boldsymbol{x}) = f\big(g(\boldsymbol{x})\big), \qquad \boldsymbol{x} \in B. \tag{3.7}$$

En las siguientes secciones del capítulo trataremos con cierto detalle algunos casos particulares de funciones de varias variables.

3.2. Funciones reales

Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se dice que f es una función de n variables con valores reales. Las funciones reales juegan un papel especial dentro de las funciones de varias variables debido a que una funcion multivariable puede "descomponerse" en funciones reales. Así, si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ está dada por $f(\boldsymbol{x}) = (f_1(\boldsymbol{x}), \cdots, f_m(\boldsymbol{x}))$, entonces cada una de las funciones componentes, $f_i(\boldsymbol{x})$ es una función real. Hay que tener cuidado de que el proceso inverso en general no es posible, esto es, si tenemos un conjunto de funciones reales, nada nos dice que éstas sean las componentes de una función vectorial.

Antes de ver de qué forma se puede intentar visualizar una función real vamos a considerar una interpretación de una tal función que luego será de ayuda especialmente en lo que se refiere a integración. Una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ toma un punto de $\mathbb{R}^n$ y le asigna un número real. Así, podemos imaginar que en cada punto del dominio hemos escrito un número, que es el valor de la función en dicho punto. Hemos aclarado anteriormente que si se enuncia una función y no se aclara el dominio, se debe suponer el mayor conjunto para el cual tiene sentido la expresión. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 2.

1. *El dominio de la función $f(x,y) = \sqrt{x - y^2}$ es $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \geq y^2\}$ y su imagen $f[A] = [0, \infty)$*

2. *El dominio de la función $f(x,y) = \frac{1}{x-y}$ es $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \neq y\}$ y su imagen $f[A] = \mathbb{R} - \{0\}$*

3. *El dominio de la función $f(x,y,z) = \frac{\sqrt{x}}{\log z+y}$ es $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x \geq 0 \wedge z + y > 0 \wedge z + y \neq 1\}$ y su imagen $f[A] = \mathbb{R}$*

Como caso particular de funciones escalares se tienen las funciones de una variable $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. En este caso la gráfica de f es el conjunto de puntos en $\mathbb{R}^2$ que consta de los puntos $(x, f(x))$. Esto se puede generalizar al caso de varias variables.

Definición 39. *Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. La **gráfica de** f es el conjunto*

$$\text{gráfica } f = \{(x_1, \cdots, x_n, f(x_1, \cdots, x_n)) \in \mathbb{R}^{n+1} | (x_1, \cdots, x_n) \in A\}. \tag{3.8}$$

Sin duda la gráfica de una función es la forma más directa de observar su comportamiento, pues si $n = 1$, la gráfica es una curva en $\mathbb{R}^2$ y si $n = 2$, es una superfcie en $\mathbb{R}^3$, como lo podemos ver en la figura (f(x)=sen(x) y g(x,y)=z). Sin embargo es imposible graficarla de la manera usual para $n > 2$. Por esto se han desarrollado otras técnicas de visualización.

Definición 40. *Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y sea $c \in \mathbb{R}$. El **conjunto de nivel** de valor c es el conjunto*

$$\text{conjunto de nivel de valor } c = \{\boldsymbol{x} \in A | f(\boldsymbol{x}) = c\}. \tag{3.9}$$

Si $n = 2$ se dice curva de nivel y si $n = 3$, superficie de nivel.

Un conjunto de nivel entonces es un subconjunto del dominio de la función, y se puede interpretar como la intersección de la gráfica de la función con el plano determinado por los puntos $(x_1, \cdots, x_n, c)$. Es decir, es el conjunto donde la función toma un cierto valor fijo. El concepto surge y toma su nombre de las curvas de nivel en cartografía, donde en un mapa se marca, mediante curvas, los puntos que están a una cierta altura, como lo muestra la figura().
insertar una carta topográfica y el paraboloide con los cortes

Ejercicio 35. Calcular las curvas de nivel de la función $f(x, y) = x^2 + y^2$

Un concepto relacionado es el de "sección".

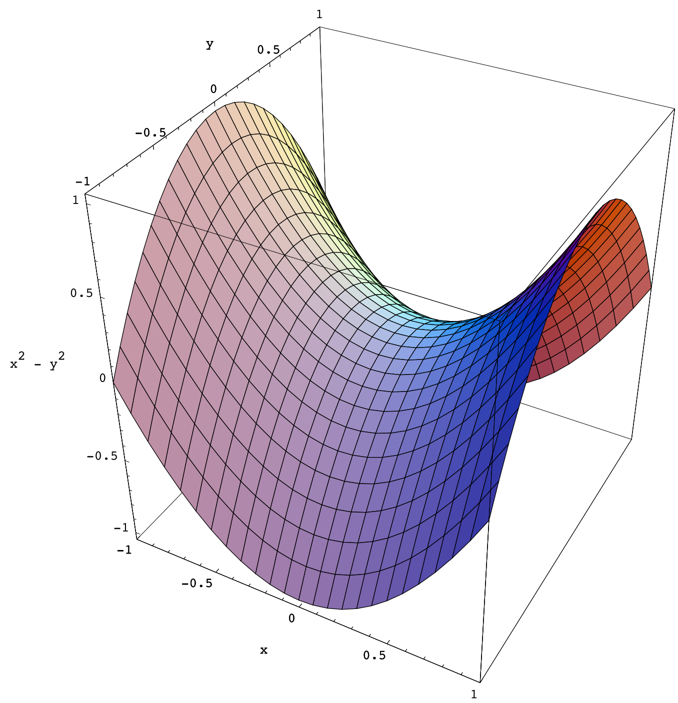
Definición 41. *Una **sección de una gráfica** con respecto al plano P es la intersección de la gráfica con un plano vertical. Esto es, sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $w = f(x_1, x_2, ..., x_n)$,$P : x_k = c$ un plano vertical en $\mathbb{R}^{n+1}$ para algún $k \in \{1, 2, ..., n\}$ y c constante, entonces*

$$\text{sección } f = P \cap \text{gráfica } f. \tag{3.10}$$

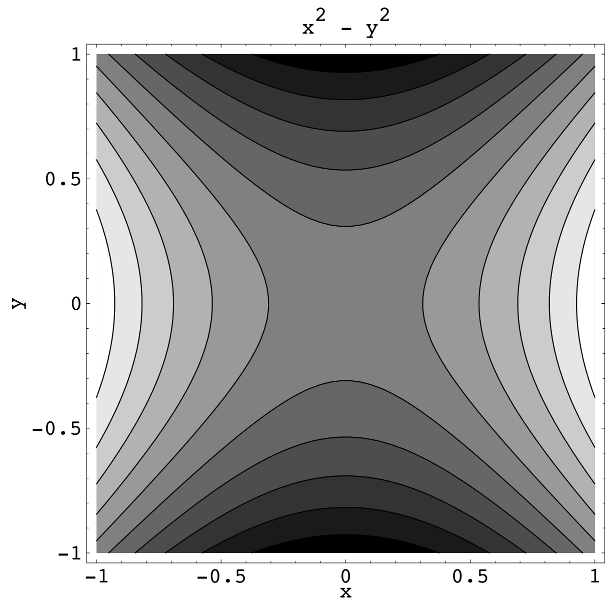
Para clarificar estos conceptos vamos a ver una aplicación simple, dada por la función

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x, y) = x^2 - y^2 \tag{3.11}$$

llamado usualmente paraboloide hiperbólico o silla de montar. La gráfica de esta función está dada por el conjunto de puntos en $\mathbb{R}^3$ de la forma $(x, y, x^2 - y^2)$. Usando un programa para graficar funciones se puede obtener directamente la gráfica, que se muestra en la siguiente figura.



Para obtener información más detallada recurrimos a las curvas de nivel, esto es, consideramos las curvas en $\mathbb{R}^2$ que satisfacen $x^2 - y^2 = c$ para $c \in \mathbb{R}$. Vemos que si $c = 0$ entonces $y = \pm x$, y las curvas son rectas que pasan por el origen, si $c > 0$ entonces $y = \pm\sqrt{x^2 - c}$, y las curvas son hipérbolas que cruzan verticalmente el eje x en $x = \pm\sqrt{c}$, y si $c < 0$ entonces $x = \pm\sqrt{y^2 + c}$, y las curvas son hipérbolas que cruzan horizontalmente el eje y en $y = \pm\sqrt{-c}$. En la figura siguiente se muestran las curvas de nivel para distintos valores de c.



Tomemos ahora una sección perpendicular al eje x, esto es, la intersección de $z = x^2 - y^2$ con $x = d$, entonces $z = d^2 - y^2$. Esto es, en el plano (y, z), la gráfica es una parábola hacia abajo con vértice en $y = 0$, $z = d^2$. Estas parábolas están graficadas en la figura (), donde se muestran los casos .... Si en cambio tomo un plano perpendicular al eje y, los puntos son de la forma (x, d, z) y tengo que $z = x^2 - d^2$, nuevamente una parábola pero hacia arriba, con vértice en $x = 0$, $z = -d^2$. Esto se muestra en la figura (), donde... Por lo tanto, la gráfica de la silla de montar puede verse como una parábola en una dirección trasladada sobre una parábola con la orientación invertida en la dirección perpendicular. Después de este análisis tendría que ser claro cómo se comporta la función cuando nos movemos de un punto a otro del dominio.

Para dar un ejemplo más complicado consideraremos la función

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \qquad f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2, \tag{3.12}$$

también conocida como silla de montar. Dado que el dominio es $\mathbb{R}^3$, la gráfica está en $\mathbb{R}^4$, lo que hace imposible graficarla. Sin embargo podemos recurrir a las superficies de nivel, que están dadas por $x^2 + y^2 - z^2 = c$. Para $c = 0$ tenemos $z = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$, que es un cono centrado en el eje z y con vértice en el origen. Para $c \neq 0$ tenemos que $z = \pm\sqrt{x^2 + y^2 - c}$, que en el caso $c < 0$ es un hiperboloide de dos hojas que cruza el eje z en $z = \pm\sqrt{-c}$, y que para $c > 0$ es un hiperboloide de revolución alrededor del eje z y que intersecta el plano (x, y) en un círculo de radio $\sqrt{c}$. En la figura () se muestran las superficies de nivel para ...Consideramos finalmente la sección $y = d$, entonces tenemos en el corte (x, d, z) la función $f(x, d, z) = x^2 - z^2 + d^2$, que es la silla de montar en 2 dimensiones, elevada en c^2. La sección $x = d$ es equivalente, y la sección $z = d$ da que en el corte (x, y, d) la función toma los valores $f(x, y, d) = x^2 + y^2 - d^2$, que es un paraboloide de revolución con valor en el vértice de $-d^2$. Los valores de la función en las secciones ... se muestran en la figura ().

3.3. Trayectorias y curvas

Usualmente se tiene una idea intuitiva de qué es una curva o trayectoria, a continuación damos una definición que fija estos conceptos.

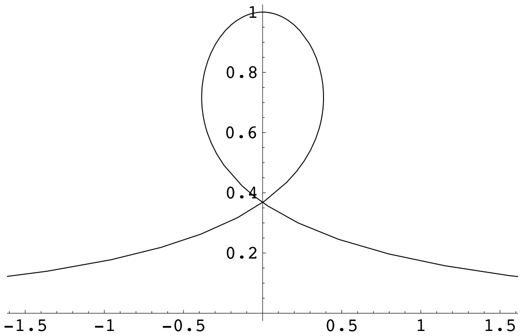
Definición 42. *Una **trayectoria** en $\mathbb{R}^n$ es una función $\sigma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$. Los puntos $\sigma(a)$ y $\sigma(b)$ son llamados **extremos** de la trayectoria. La imagen de σ es llamada **curva** de σ.*

También se le suele llamar a una trayectoria una "curva parametrizada". Hemos obviado el hecho de que la definición anterior incluye conjuntos de puntos que no consideraríamos suficientemente "regulares" o "continuos" como para llamarse curvas, por ahora nos quedamos con la definición y tendremos que esperar a haber visto continuidad y diferenciación para poder decidir sobre este tema.

Muchas veces se suele pensar una curva como el gráfico de una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. El concepto de trayectoria plasmado en la definición es más fuerte y a la vez flexible que la idea de un gráfico. En primer lugar, permite describir curvas en regiones más generales que el plano. Por otro lado, objetos que no se pueden describir como funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ si pueden ser descriptos como trayectorias, mientras que cualquier gráfico de una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ puede ser descripto como una trayectoria. A continuación se presenta un ejemplo que aclara este concepto. Sea $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$\sigma(u) = (u^3 - u, e^{-u^2}). \tag{3.13}$$

En la figura () se presenta la curva de σ. Es claro que esta curva no es la gráfica de ninguna función. Por otro lado, en la figura () se presenta el conjunto de puntos en $\mathbb{R}^3$ dados por $(u, u^3 - u, e^{-u^2})$, esto es, el equivalente a la gráfica de σ, que muestra claramente que a cada valor de u le corresponde un solo punto en $\mathbb{R}^2$.



Hay además otra razón por la que es útil considerar curvas parametrizadas, y es que aparecen de forma central en física, como forma de describir el movimiento de partículas. En el caso de mecánica newtoniana además hay un parámetro privilegiado para realizar esta descripción, el tiempo.

Ejercicio 36. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Mostrar que la gráfica de f puede ser descripta como una curva.

3.4. Hipersuperficies y superficies

Sin ser rigurosos, podemos decir que una hipersuperficie en $\mathbb{R}^n$ es un conjunto de puntos que tiene una dimensión menos. Al igual que en el caso de curvas, queremos tener un concepto flexible, que se plasma en la siguiente definición.

Definición 43. *Una **hipersuperficie** parametrizada en $\mathbb{R}^n$ es una función $f : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^n$. En particular, se le llama superficie parametrizada si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$. La imagen de f es llamada hipersuperficie o superficie.*

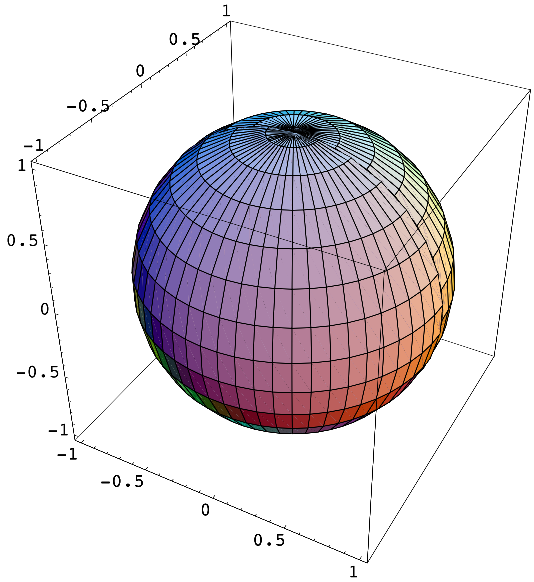
Al igual que en el caso de curvas, hemos pasado por alto que la definición incluye objetos que consideraríamos insuficientemente “regulares”, y al igual que antes, tendremos que esperar a haber adquirido los conocimientos necesarios para decidir al respecto. Aquí también, muchas veces se piensa una superficie como la gráfica de una función, sin embargo la definición incluye objetos que no pueden ser representados como gráficas. Tomemos como ejemplo una esfera, dada por $f : A \to \mathbb{R}^3$, donde

$$A = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq u \leq \pi,\ 0 \leq v < 2\pi\} \tag{3.14}$$

y

$$f(u, v) = (\cos(u)\cos(v), \operatorname{sen}(u)\cos(v), \operatorname{sen}(v)), \tag{3.15}$$

y que aparece representada en la siguiente figura.



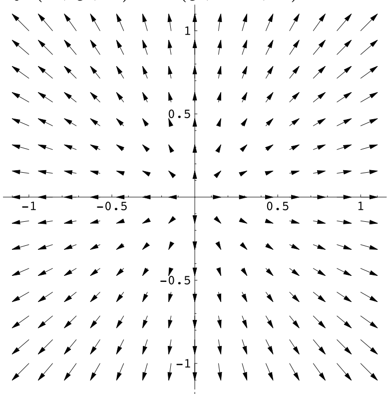
Ejercicio 37. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Mostrar que la gráfica de f puede ser descripta como una superficie.

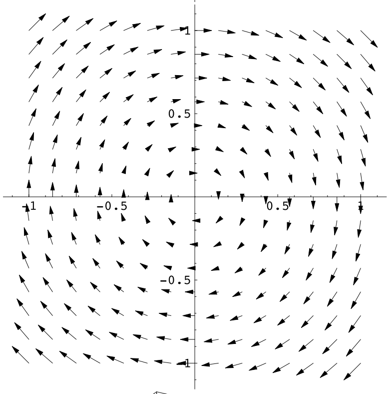
3.5. Campos vectoriales

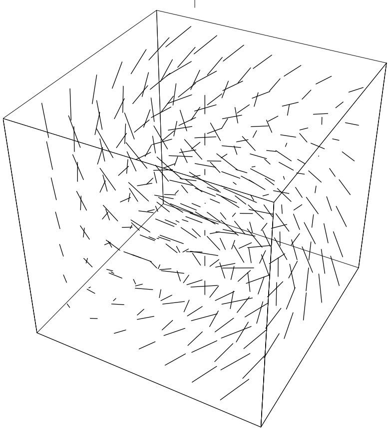
Un campo o función vectorial es cualquier función que asigna a cada punto del dominio un vector. Así, si se considera $\mathbb{R}^m$ con las operaciones de suma y multiplicación por escalares ya definidas, un campo vectorial es una función $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. En general, cuando se habla de campos vectoriales se suele tomar $f : A \subset \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^m$, y la mayoría de las veces además se considera $n = m$. Esto ocurre en especial, por ejemplo, cuando se consideran fluidos en mecánica newtoniana, donde la posición de los elementos del fluido vienen descrito por un vector en $\mathbb{E}^3$, y a la vez la velocidad de dicho elemento de fluido es también un vector en $\mathbb{E}^3$, así la función que a cada posición en el espacio le asigna su velocidad es un campo vectorial con $n = m = 3$. Damos la definición a continuación.

Definición 44. *Un* ***campo vectorial*** *es una función* $\bar{f} : A \subset \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^m$ *que asigna a cada punto* $\boldsymbol{x}$ *en su dominio* A *un vector* $\bar{f}(\boldsymbol{x})$.

En el caso de $\bar{f} : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$ hay una forma particularmente útil de representar el campo vectorial, que surge precisamente de la imagen de un fluido en movimiento. El procedimiento es tomar un subconjunto de los puntos del dominio, y dibujar el vector imagen de ese punto como una flecha que comienza en ese punto y tiene la dirección y longitud del vector imagen expandir y poner figura y pasos. Si se elige un número razonable de puntos del dominio, esta representación da una idea del comportamiento del campo vectorial. En la figura () se representa el campo vectorial $f : \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$ dado por $f(x, y) = (x, y)$, en la figura () el campo vectorial $g : \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$ dado por $g(x, y) = (y, -x)$, y en la figura () el campo vectorial $h : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$ dado por $f(x, y, z) = (y, -x, z)$.







Capítulo 4

Límite y continuidad

Ya tenemos el "escenario" y las "actrices" del análisis multivariable. Ahora entramos propiamente en la parte del "análisis", esto es, extraer información o conocer características de las funciones de varias variables. Un concepto de importancia fundamental es el de "límite". Este concepto en particular nos permite formalizar la idea de "continuidad" de una función. Desarrollar estos dos conceptos y las propiedades topológicas del espacio $\mathbb{R}^n$ es a lo que nos dedicaremos en este capítulo.

4.1. Límite

Al igual que en el caso de funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, en el caso de funciones multivariables se desea poder analizar el comportamiento de las mismas. En particular, esto incluye el hecho de ver cómo se comporta la función cuando nos encontramos cerca de un punto, si la función "es continua" o "pega saltos", o si "se va a infinito". En el caso de funciones reales de una variable esto se analiza a través del límite. Para orientarnos, recordemos la definición de límite para funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

Definición 45. *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida en un intervalo abierto que contiene a $x_0 \in \mathbb{R}$ pero puede excluirlo y sea $l \in \mathbb{R}$. Entonces se dice que*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

si

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0 | \forall x \in Dom(f) \quad si\ 0 < |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Parafraseando esta definición, podemos decir que el límite de f es l cuando x tiende a x_0 si para todo intervalo abierto alrededor de l, hay un intervalo abierto alrededor de x_0 tal que si la variable x es tomada dentro de este intervalo, entonces la función se encuentra dentro del intervalo alrededor de l. Esta forma de pensar la definición de límite permite acercarse a la generalización de la misma para funciones de varias variables. De esto surge que necesitamos una idea de "intervalo abierto" para $\mathbb{R}^n$, una vez que tengamos este concepto la idea fundamental de límite es la misma.

4.1.1. Topología de $\mathbb{R}^n$

Si bien en este punto uno está tentado de usar la distancia euclídea en $\mathbb{E}^n$ para definir un abierto, es importante aclarar que en general no es necesario tener una noción de distancia en un conjunto para definir los subconjuntos abiertos. La idea de subconjunto abierto es anterior a la noción de distancia, y un conjunto con una definición de abiertos en el mismo es llamado una

topología. Esto nos dice que podemos tener subconjuntos abiertos de un conjunto sin necesidad de una definición de distancia en el conjunto. Sin embargo, si se tiene, se puede usar la noción de distancia para definir una topología, esto es, para definir los abiertos. Es importante recalcar también que la definición de distancia no define unívocamente una topología, sino que en general a varias definiciones de distancias corresponde una misma topología, o más específicamente, corresponden topologías equivalentes. Es por ello que **consideraremos al conjunto $\mathbb{R}^n$ con una norma** $||.||$, la cual puede ser la norma euclídea u cualquier otra como vimos en el ejercicio 9.

Definición 46. *Sea el espacio normado $(\mathbb{R}^n, +, ., ||.||)$, $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ y r un número real positivo. El **disco o bola abierta** de centro en $\boldsymbol{a}$ y radio r,$B(\boldsymbol{a}, r)$, es el conjunto de todos los puntos de $\mathbb{R}^n$ cuya distancia al punto $\boldsymbol{a}$ es menor que r. En símbolos,*

$$B(\boldsymbol{a}, r) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n | \, ||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}|| < r\}$$

.

Observemos que si consideramos el espacio euclídeo $\mathbb{E}^n$ con $n = 1$, $B(\boldsymbol{a}, r)$ es el intervalo $(a-r, a+r)$; $n = 2$, $B(\boldsymbol{a}, r)$ es la circunferencia con centro en el punto $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2)$ y radio r.Y si $n = 3$, $B(\boldsymbol{a}, r)$ es la esfera con centro en el punto $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$ y radio r. figuras

Definición 47. *Sea el espacio normado $(\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}, +, ., ||.||)$, $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ y $A \subseteq \mathbb{R}^n$.*

- *Un punto $\boldsymbol{a}$ es un **punto interior** de un conjunto A si existe un $r \in \mathbb{R}^+$ tal que el disco abierto $B(\boldsymbol{a}, r) \subseteq A$. El **interior de** A, $Int(A)$, es el conjunto de todos los puntos interiores de A.*

- *Un punto $\boldsymbol{a}$ es un **punto exterior** de un conjunto A en $\mathbb{R}^n$ si existe un $r > 0$ tal que el disco abierto $B(\boldsymbol{a}, r)$ no contiene puntos de A. El **exterior de** A, $Ext(A)$, es el conjunto de todos los puntos exteriores de A.*

- *Un punto $\boldsymbol{a}$ es un **punto frontera** de un conjunto A si no es punto interior ni exterior de A. Es decir, si todo disco abierto con centro en el punto $\boldsymbol{a}$ contiene puntos de A y puntos que no pertenecen a A. La **frontera de** A, $\partial(A)$, es el conjunto de todos los puntos fronteras de A.*

- *Un punto $\boldsymbol{a}$ es un **punto de acumulación** de un conjunto A si todo disco abierto $B(\boldsymbol{a}, r)$ verifica que*

$$(B(\boldsymbol{a}, r) - \{\boldsymbol{a}\}) \cap A \neq \emptyset$$

  *. La **clausura de** A, $\bar{A}$, es el conjunto de los puntos de A y de los puntos de acumulación de A. Es decir, $\bar{A} = A \cup$, donde es el conjunto de los puntos de acumulación de A.*

Ejercicio 38. 1. Determinar los puntos interiores, exteriores, frontera y de acumulación de $(-5, 4) \cup [7, 9) \cup \{10\} \cup (15, 16]$

2. Determinar los puntos interiores, exteriores, frontera y de acumulación de $\{(x, y) \in \mathbb{E}^2 | x > 0, y \geq 0\}$.

Definición 48. *Un conjunto A es **abierto** si todos sus puntos son interiores.*

Esto es, un conjunto abierto es un conjunto donde cada uno de sus puntos puede ser "rodeado" por una bola abierta totalmente contenida en el conjunto. En la figura lim3 se grafica la idea detrás de la definición. Es importante notar que el radio de la bola, r, en general será distinto para los distintos puntos del conjunto, y que para demostrar que un conjunto es abierto lo que hay que hacer es tomar un punto cualquiera, arbitrario, del conjunto, y dar un número r, con el cual se cumpla la definición.

Teorema 8. *Un subconjunto A de* $(\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}, +, ., ||.||)$ *es abierto si y solo si* $A = Int(A)$

Probamos a continuación algo que parecería trivial del uso de lenguaje que hemos hecho.

Teorema 9. *Para todo* $\boldsymbol{a} \in \mathbb{E}^n$ *y* $r \in \mathbb{R}^+$, $B(\boldsymbol{a}, r)$ *es un conjunto abierto.*

Demostración. Sea $\boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{a}, r)$ y tomemos $s = r - |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}|$. Sea ahora $\boldsymbol{y} \in B_s(\boldsymbol{x})$, tenemos que

$$||\boldsymbol{y} - \boldsymbol{a}|| = ||(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}) + (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})|| \leq ||\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}|| + ||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}|| < s + ||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}|| = r,$$

por lo tanto $\boldsymbol{y} \in B(\boldsymbol{a}, r)$ y $B(\boldsymbol{x}, s) \subset B(\boldsymbol{a}, r)$. □

Hay que notar que debido a una sutileza de la lógica el conjunto vacío, $\emptyset$, es un conjunto abierto, ya que no tiene elementos, la definición se cumple trivialmente para todos sus elementos. O lo que es lo mismo, no hay ningún $\boldsymbol{x} \in \emptyset$ tal que no se cumpla la defininción de conjunto abierto.

Ejercicio 39.

1. El conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{E}^2 | x > 0 \text{ y } y > 0\}$ es un conjunto abierto.
2. El conjunto $[1, 2] \in \mathbb{R}$ no es un conjunto abierto.
3. $\mathbb{E}^n$ es un conjunto abierto.
4. Sea $A \subset \mathbb{E}^n$ un abierto, mostrar que $A \cap \partial A = \emptyset$.
5. Demostrar el teorema 8

Definición 49. *Un conjunto A es* ***cerrado*** *si todo punto de acumulación es un punto del conjunto.*

El siguiente teorema nos permite tener una idea de este concepto.

Teorema 10. *Un subconjunto A de* $(\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}, +, ., ||.||)$ *es cerrado si y solo si* $A = Int(A) \bigcup \partial A$

Ejercicio 40. Explicar con sus palabras que significa el teorema y demostrarlo.

Continuamos con más conceptos topol"ogicos.

Definición 50.

- *Un conjunto A es* ***acotado*** *si existe un* $r \in \mathbb{R}^+$ *tal que* $A \subseteq B(\boldsymbol{bar0}, r)$.
- *Un conjunto A es* ***compacto*** *si es cerrado y acotado.*
- *Un conjunto A es* ***arco conexo*** *si dados dos puntos cualesquiera de A existe una poligonal (línea quebrada de un número finito de lados)que los une y que está completamente contenida en el conjunto A.*
- *Un conjunto A es* ***simplemente conexo*** *si es arco conexo y cualquier curva cerrada contenida en A se puede reducir a un punto, por deformaciones sucesivas de la curva sin cortar a la frontera del conjunto. Un* ***entorno de un punto*** $\boldsymbol{a}$ *es un conjunto abierto que contiene a* $\boldsymbol{a}$.

Como ejemplos rápidos, podemos nombrar: $B(\boldsymbol{a}, r)$ es un entorno de $\boldsymbol{a}$; $(0, 1]$ no es un entorno de 1, ni de $\frac{1}{2}$. En particular también, un conjunto abierto es un entorno de todos sus puntos.

Ahora estamos en condiciones de dar la definición de límite.

Definición 51. *(Punto de vista topológico) Sea $f : A \subset \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^m$, donde A es un conjunto abierto. Sea $\boldsymbol{x_0} \in \bar{A}$ y sea $\boldsymbol{b} \in \mathbb{E}^m$. Decimos que f tiende a $\boldsymbol{b}$ cuando $\boldsymbol{x}$ tiende a $\boldsymbol{x_0}$ y lo denotamos por*

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x_0}} f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}, \qquad o \qquad f(\boldsymbol{x}) \to \boldsymbol{b} \text{ cuando } \boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x_0},$$

si para todo entorno $B \subset \mathbb{E}^m$ de $\boldsymbol{b}$ existe un entorno C de $\boldsymbol{x_0}$ tal que si $\boldsymbol{x} \in ((C \cap A)\backslash\{\boldsymbol{x_0}\})$ entonces $f(\boldsymbol{x}) \in B$. En el caso de que no haya ningún $\boldsymbol{b}$ que cumpla con las propiedades anteriores, decimos que $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x_0}} f(\boldsymbol{x})$ no existe.

En la figura lim4 se representan los conjuntos A, B y C, los puntos $\boldsymbol{x_0}$ y $\boldsymbol{b}$, y la relación que tiene que haber entre B y $\mathrm{Im}((C \cap A)\backslash\{\boldsymbol{x_0}\})$. En la definición hay dos detalles para tener en cuenta. Uno es que en ningún momento se pide que $f(\boldsymbol{x_0}) = \boldsymbol{b}$, es más, no se dice nada del valor de $f(\boldsymbol{x_0})$, e incluso f podría no estar definida en $\boldsymbol{x_0}$. Por esto es que se pide que f esté definida en A, mientras que $\boldsymbol{x_0}$ está en $\bar{A}$. También es de interés que en la definición no se hace mención a la distancia en $\mathbb{E}^n$ o $\mathbb{E}^m$, o a las bolas abiertas en estos conjuntos, sino sólo a entornos abiertos, así la definición mantiene su validez para espacios topológicos aunque no tengan definida una distancia. Como primera aplicación de la definición está el resultado del siguiente ejercicio.

Ejercicio 41. Mostrar que

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x_0}} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x_0}.$$

Aunque en la definición no se habla de distancia o bolas abiertas, el hecho de tener esta estructura en el espacio euclídeo permite utilizarla para formular el concepto de límite. Así, es usual dar una definición de límite en término de bolas centradas en x_0 y b, también llamada formulación $\epsilon - \delta$ del límite. Al estar nuestra definición de entorno dada en términos de bolas abiertas, las dos formulaciones son equivalentes, que es lo que se muestra en el siguiente teorema.

Teorema 11. *Sea $f : A \subset \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^m$ y sean $\boldsymbol{x_0} \in \bar{A}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{E}^m$. Entonces $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x_0}} f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}$ si y sólo si*

$$\forall\epsilon > 0 \exists\delta > 0 | \forall \boldsymbol{x} \in A \text{ tal que } 0 < ||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0}|| < \delta \text{ se tiene que } |f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{b}| < \epsilon.$$

Demostración. ($\Rightarrow$): Sea $\epsilon > 0$ y consideremos $B(\boldsymbol{b}, \epsilon)$. Por ser $B(\boldsymbol{b}, \epsilon)$ un entorno de $\boldsymbol{b}$ y por la definición de límite, existe un entorno C de $\boldsymbol{x_0}$ tal que $f(\boldsymbol{x}) \in B(\boldsymbol{b}, \epsilon)$ si $\boldsymbol{x} \in ((C \cap A)\backslash\{\boldsymbol{x_0}\}$. Como C es un abierto, entonces existe $\delta > 0$ tal que $B(\boldsymbol{x_0}, \delta) \subset C$. Por lo tanto, si $\boldsymbol{x}$ satisface $0 < ||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0}| < \delta$ entonces $\boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{x_0}, \delta)$, y luego $\boldsymbol{x} \in C$, por lo que $f(\boldsymbol{x}) \in B(\boldsymbol{b}, \epsilon)$ y por lo tanto $|f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{b}| < \epsilon$.

($\Leftarrow$): Sea B un entorno de $\boldsymbol{b}$. Como B es abierto entonces existe $\epsilon > 0$ tal que $B(\boldsymbol{b}, \epsilon) \subset B$. Entonces existe $\delta > 0$ tal que $f(\boldsymbol{x}) \in B(\boldsymbol{b}, \epsilon)$ si $\boldsymbol{x} \in A$ y $0 < ||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0}|| < \delta$. Elegimos entonces el abierto $C = B(\boldsymbol{x_0}, \delta)$. □

En el siguiente ejercicio se pide demostrar que el caso conocido de límite de funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ es un caso particular de la definición dada.

Ejercicio 42. Mostrar que la definición anterior se reduce a la definición 45 en el caso $m = n = 1$.

Una propiedad fundamental del límite es que, si existe, es único.

Teorema 12. *Si $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x_0}} f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}_1$ y $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x_0}} f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}_2$, entonces $\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{b}_2$.*

Demostración. Conviene usar la formulación $\epsilon - \delta$. Dado $\epsilon > 0$ arbitrario tenemos que existe $\delta_1 > 0$ y $\delta_2 > 0$ tal que $|f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{b}_1| < \epsilon$ si $0 < ||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0}|| < \delta_1$ y que $|f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{b}_2| < \epsilon$ si

$0 < ||\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x_0}|| < \delta_2$. Definimos $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\}$. Por lo anterior, $|f(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{b}_1| < \epsilon$ y $|f(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{b}_2| < \epsilon$ si $0 < ||\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|| < \delta$. Ahora bien, para esos posibles $\boldsymbol{x}$ tenemos que

$$|\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_2| = |\boldsymbol{b}_1 - f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{b}_2| \leq |\boldsymbol{b}_1 - f(\boldsymbol{x})| + |f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{b}_2| < 2\epsilon.$$

Supongamos que $\boldsymbol{b}_1 \neq \boldsymbol{b}_2$. Entonces podemos tomar $\epsilon = |\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_2|/2 > 0$, y de lo anterior obtenemos que $|\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_2| < |\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_2|$, lo que es una contradicción. Por lo tanto $\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{b}_2$. □

Si consideramos ahora la posibilidad de realizar operaciones con funciones, y de querer obtener los límites de estas nuevas funciones, en general no es práctico regresar siempre a la definición de límite, sino que conviene conocer propiedades generales y aplicarlas en cada caso particular. El siguiente teorema nos dice como tratar con las operaciones más comunes.

Teorema 13. *Sean $f : A \subset \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^m$, $g : A \subset \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^m$, $\boldsymbol{x_0} \in \bar{A}$, $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2 \in \mathbb{E}^m$ y $\alpha \in \mathbb{R}$; entonces*

1. *Si $\text{lím}_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x_0}} f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}$, entonces $\text{lím}_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x_0}}(\alpha \cdot f)(\boldsymbol{x}) = \alpha \cdot \boldsymbol{b}$.*
2. *Si $\text{lím}_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x_0}} f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}_1$ y $\text{lím}_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x_0}} g(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}_2$, entonces $\text{lím}_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x_0}}(f+g)(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2$.*
3. *Si $m = 1$, $\text{lím}_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x_0}} f(\boldsymbol{x}) = b_1$ y $\text{lím}_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x_0}} g(\boldsymbol{x}) = b_2$, entonces $\text{lím}_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x_0}}(f \cdot g)(\boldsymbol{x}) = b_1 \cdot b_2$.*
4. *Si $m = 1$, $\text{lím}_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x_0}} f(\boldsymbol{x}) = b$ y $f(\boldsymbol{x}) \neq 0 \forall \boldsymbol{x} \in A$, entonces $\text{lím}_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x_0}}(1/f)(\boldsymbol{x}) = 1/b$.*
5. *Si $f(\boldsymbol{x}) = (f_1(\boldsymbol{x}), \cdots, f_m(\boldsymbol{x}))$ donde $f_i : A \to \mathbb{R}$, $i = 1, \cdots, m$, son las funciones componentes de f, entonces $\text{lím}_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x_0}} f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b} = (b_1, \cdots, b_m)$ si y sólo si $\text{lím}_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x_0}} f_i(\boldsymbol{x}) = b_i$ para cada $i = 1, \cdots, m$.*

Demostración. Se probarán sólo los puntos 2 y 5, el resto se deja como ejercicio.

2. Sea $\epsilon > 0$. Se elige δ_1 tal que si $0 < ||\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x_0}|| < \delta_1$ entonces $|f(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{b}_1| < \epsilon/2$ y se elige δ_2 tal que si $0 < ||\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x_0}|| < \delta_2$ entonces $|g(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{b}_2| < \epsilon/2$. Definimos ahora $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\}$, entonces $0 < ||\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x_0}|| < \delta$ implica

$$\begin{aligned} |(f+g)(\boldsymbol{x}) - (\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2)| &= |(f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{b}_1) + (f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{b}_2)| \\ &\leq |f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{b}_1| + |f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{b}_2| \qquad (4.1) \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \qquad (4.2) \end{aligned}$$

5. ($\Rightarrow$): Tomemos $\epsilon > 0$, por el límite de $f(\boldsymbol{x})$ tenemos que existe un δ tal que si $0 < ||\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x_0}|| < \delta$ entonces $|f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{b}| < \epsilon$. Desarrollando esta expresión tenemos que

$$|f_i(\boldsymbol{x}) - b_i| = \sqrt{(f_i(\boldsymbol{x}) - b_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{m}(f_j(\boldsymbol{x}) - b_j)^2} < \epsilon,$$

y por lo tanto $\text{lím}_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x_0}} f_i(\boldsymbol{x}) = b_i$.
($\Leftarrow$): Tomemos $\epsilon > 0$, por el límite de las $f_i(\boldsymbol{x})$ tenemos que existen δ_i tal que si $0 < ||\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x_0}|| < \delta_i$ entonces $|f_i(\boldsymbol{x}) - b_i| < \epsilon/\sqrt{m}$. Tomemos $\delta = \text{mín}\{\delta_i\}$, entonces para $0 < ||\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x_0}|| < \delta$ tenemos que

$$\begin{aligned} |f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{b}| &= \sqrt{\sum_{j=1}^{m}(f_j(\boldsymbol{x}) - b_j)^2} \\ &< \sqrt{m \times \frac{\epsilon^2}{m}} = \epsilon. \qquad (4.3) \end{aligned}$$

□

En general no es una tarea sencilla calcular el valor numérico de un límite de una función multivariable. Con lo que hemos visto hasta el momento, sólo somos capaces de resolver algunos ejemplos simples, utilizando las propiedades 13 o algún resultado previo conocido. Como los ejemplos que desarrollamos a continuación.

Ejemplo 3. *Del resultado visto en funciones de una variable real,*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1 \tag{4.4}$$

se deduce que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x.y)}{x.y} = 1 \tag{4.5}$$

pues, razonando de una manera similar al límite en una variable, se puede ver que el argumento de la función seno, x.y tiende a cero "de la misma forma " que el denominador, por lo que si se lo compara con un cociente este da 1.

Ejemplo 4. *El límite* $\lim_{(x,y)\to(2,2)} \frac{x^2-y^2}{x-y}$ *tiene una indeterminación* $0/0$*, la cual se puede "salvar" factorizando el numerador y simplificando la expresión.*

$$\lim_{(x,y)\to(2,2)} \frac{x^2-y^2}{x-y} = \lim_{(x,y)\to(2,2)} \frac{(x-y)(x+y)}{x-y} \tag{4.6}$$

Luego, utilizando la propiedad 13[2.] y

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} x = a \qquad\qquad \lim_{(x,y)\to(a,b)} y = b \tag{4.7}$$

se deduce que

$$\lim_{(x,y)\to(2,2)} \frac{x^2-y^2}{x-y} = \lim_{(x,y)\to(2,2)} x+y = 4 \tag{4.8}$$

Ahora, al intentar calcular el límite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x.y}{x^2+y^2} \tag{4.9}$$

tenemos una indeterminación $0/0$ que no sabemos como "salvar". En las secciones siguientes veremos algunas herramientas útiles para poder determinar si límites, como el del ejemplo , existen o no. Y de existir, cómo poder calcularlo.

4.1.2. Límites Sucesivos, Iterados o Reiterados

Para la función $f : A \subset \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}$ se puede definir el concepto de límite respecto a una variable x_k, siendo fijos los valores de las demás variables. En esta situación surge el concepto de límite iterado. Sin pérdida de generalidad y con el objeto de que se comprenda el método de resolución lo desarrollaremos para una función de dos variables reales. La función $w = f(x,y)$ está definida en un entorno rectangular del punto (x_0, y_0) de la forma

$$\{(x,y) \in A : |x-x_0| < d_1 \wedge |y-y_0| < d_2\},$$

a excepción, quizas del propio (x_0, y_0). Supongamos que para todo y fijo que satisface la condición $0 < |y-y_0| < d_2$, existe el límite

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ y \text{ fijo}}} f(x,y) = g(y)$$

y que además existe el límite

$$\lim_{y \to y_0} g(y) = b$$

En este caso, decimos que existe el límite reiterado b para la función $f(x, y)$ en el punto (x_0, y_0). Lo notamos

$$\lim_{y \to y_0} \lim_{x \to x_0} f(x, y) = b$$

En forma análoga se puede definir

$$\lim_{x \to x_0} \lim_{y \to y_0} f(x, y) = b$$

Teorema 14. *Sea $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $(x_0, y_0) \in barA$ una función definida en un entorno rectangular $|x - x_0| < d_1$,$|y - y_0| < d_2$ del punto (x_0, y_0). Si*

- $\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x, y) = b$,
- *para cualquier x fijo, $0 < |x - x_0| < d_1$, existe $\lim_{y \to y_0} f(x, y) = h(x)$, y*
- *para cualquier y fijo, $0 < |y - y_0| < d_2$, existe $\lim_{x \to x_0} f(x, y) = g(y)$.*

Entonces existen los límites reiterados $\lim_{y \to y_0} \lim_{x \to x_0} f(x, y)$ y $\lim_{x \to x_0} \lim_{y \to y_0} f(x, y)$, y son iguales a b.

Recordemos que un límite existe si la función tiende a un valor b cuando $\boldsymbol{x}$ tiende a $\boldsymbol{a}$, con lo cual si probamos que los límites iterados son distintos entonces el límite doble no existe. En cambio, si los límites iterados coinciden, no podemos afirmar la existencia del límite doble, puede o no existir. Más aún, la existencia del límite doble no implica la existencia de los iterados.

Ejercicio 43. Calcular los límites iterados de la función $f(x, y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}$ en el punto $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

4.1.3. Límite Direccional

Vamos a establecer la definición precisa de límite a través de una curva. Supongamos que una curva C en $\mathbb{R}^n$ pasa por el punto $\boldsymbol{x}_0$ y tiene por ecuaciones paramétricas

$$C : \boldsymbol{x} = (x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)), \qquad t \in [a, b]$$

Sea $t_0 \in [a, b]$ tal que $\boldsymbol{x}_0 = (x_1(t_0), x_2(t_0), ..., x_n(t_0))$. El límite a través de la curva se define por

$$\lim_{\substack{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0 \\ x \in C}} f(\boldsymbol{x}) = \lim_{t \to t_0} f(x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t))$$

Teorema 15. *Sea $f : A \subset \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^m$, donde A es un conjunto abierto. Sea $\boldsymbol{x}_0 \in \bar{A}$. Si $\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0} f(\boldsymbol{x}) = b$ entonces $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in C}} f(x) = b$ para toda curva C que pase por $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$.*

De este teorema se deduce que si probamos que dos límites direccionales no coinciden, el límite no existe.

Ejercicio 44. Calcular los límites direccionales de la función $f(x, y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}$ en el punto $(x_0, y_0) = (0, 0)$ con respecto al haz de rectas $y = mx$.

Ahora bien, si muchos límites direccionales coinciden, no podemos asegurar que el límite exista.

Ejercicio 45. Calcular los límites direccionales de la función $f(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^4}$ en el punto $(x_0, y_0) = (0,0)$ con respecto al haz de rectas $y = mx$ y a la curva $x = y^2$.

Es evidente que si existe el límite, todos los límites direccionales existen y tienen el mismo valor que el límite. Ahora, que muchos límites direccionales sean iguales, no indican nada sobre el límite. En cuyo caso, para asegurar que existe el límite, es necesario probarlo por definición o se prueba, si es posible, con el siguiente tipo de límite.

4.1.4. Límites dobles en coordenadas polares.

Sea la función $z = f(x,y)$ y consideremos el cambio de coordenadas

$$\begin{aligned} x &= x_0 + r\cos\theta \\ y &= y_0 + rsen\theta \end{aligned}$$

Entonces $f(x,y) = f(x_0 + r\cos\theta, y_0 + rsen\theta) = \widetilde{f}(r,\theta)$.

Teorema 16. *Sea* $f : A \subset \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}$. $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = b$ *si y sólo y si* $\forall\epsilon > 0 / \, \exists\delta = \delta(\epsilon) > 0$ *tal que si* $0 < r < \delta$*, para todo* $\theta \in [0, 2\pi)$ *se cumple que* $|\tilde{f}(r,\theta) - b| < \epsilon$. *Se dice que* $\lim\limits_{r\to 0^+} \widetilde{f}(r,\theta) = b$ *uniformemente en* θ.

En la práctica, si al expresar $f(x,y)$ en coordenadas polares obtenemos que la función f se puede escribir como producto de dos funciones: una acotada y otra que tienda a cero, entonces el límite es cero. Es decir, $f(x,y) = F(r).G(r,\theta)$ donde G una función acotada y $\lim\limits_{r\to 0^+} F(r) = 0$, entonces $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$. La demostraci"on es sencilla y se deduce inmediatamente del teorema del emparedado de Cálculo en una variable real y de la desigualdad

$$0 < |f(x,y) - 0| \leq M.|F(r)| \tag{4.10}$$

donde M es una constante tal que $|G(r,\theta)| < M$. Más aún, si $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = b$,aplicamos lo anterior para $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) - b = 0$.

Ejercicio 46. Calcular, utilizando el cambio a coordenadas polares, los siguientes límites.

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^2+y^2}$,
2. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

4.2. Continuidad

Ahora llegamos al concepto de continuidad. Intuitivamente pensamos que una función es continua cuando los valores que toma no varían abruptamente. En este sentido, de lo que estamos hablando es de la continuidad de la función, y no de propiedades del dominio o codominio de la misma. Si intentamos formalizar esta idea, nos encontramos con que de alguna manera tiene que utilizar el concepto de límite, por lo siguiente. Si tomamos dos puntos cualesquiera del dominio, en general la función tomará valores distinto, y no importa qué tan distintos sean, esto no nos dice si la función es continua o no. Por otro lado, la función en un punto tiene un valor definido, y por lo tanto esto tampoco nos dice si la función es continua o no. Necesitamos algo que nos diga que si nos "acercamos" a un punto, entonces el valor de la función también se “acerca” al valor de la función en ese punto. Algo así como que cuanto más “cerca” nos encontramos de un punto más “cerca” tiene que estar el valor de la función del valor que toma la función en ese punto. Esto de alguna manera nos dice que si tomamos un camino que une dos puntos, y nos fijamos cuánto vale la función en los puntos de ese camino, entonces pasaremos “suavemente” del valor en un punto al valor en el otro punto. Sin embargo aquí aparece una complicación, porque tendríamos que decir qué es un camino que une dos puntos, y pensándolo un poco sólo tendríamos que aceptar caminos “continuos”, con lo que de alguna manera estamos donde empezamos. Todo esto podría dar la impresión de que es muy complicado definir “continuidad”, y parte de la elegancia de la definición de límite es que permite definir continuidad, englobando todas las ideas intuitivas, de manera sencilla.

Definición 52. *Sean $f : A \subset \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^m$ y $\boldsymbol{x}_0 \in A$. Decimos que f es continua en $\boldsymbol{x}_0$ si*

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_0).$$

Si f es continua en todos los puntos de A, decimos que f es continua en A.

En particular, la definición incluye el hecho de que la función tiene que estar definida en $\boldsymbol{x}_0$, que si el límite no existe la función no es continua y que si no coinciden, la función no es continua.

Del ejercicio 41 se desprende que la función identidad de $\mathbb{E}^n$ en $\mathbb{E}^n$, $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$, es continua.

Al igual que en el caso del límite, nos interesa poder tratar con funciones continuas, por lo menos en lo que a las operaciones más comunes se refiere, de forma general, sin tener que volver siempre a la defínción. Del teorema 13 podemos obtener directamente el siguiente teorema.

Teorema 17. *Sean $f : A \subset \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^m$, $g : A \subset \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^m$ y $c \in \mathbb{R}$; entonces*

1. *Si f es continua en $\boldsymbol{x}_0$ entonces también lo es $c \cdot f$.*
2. *Si f y g son continuas en $\boldsymbol{x}_0$, también lo es $f + g$.*
3. *Si $m = 1$ y f y g son continuas en $\boldsymbol{x}_0$, entonces $f \cdot g$ también lo es.*
4. *Si $m = 1$, f es continua en $\boldsymbol{x}_0$ y $f(\boldsymbol{x}) \neq 0 \forall \boldsymbol{x} \in A$, entonces $1/f$ es continua en $\boldsymbol{x}_0$.*
5. *Si $f(\boldsymbol{x}) = (f_1(\boldsymbol{x}), \cdots, f_m(\boldsymbol{x}))$, entonces f es continua en $\boldsymbol{x}_0$ si y sólo si cada una de las funciones con valores reales $f_1, \cdots, f_m$ es continua en $\boldsymbol{x}_0$.*

Demostración. Este teorema se prueba directamente utilizando la definición de continuidad y el teorema 13. □

El punto 5 en particular nos permite tratar la continuidad de funciones de $\mathbb{E}^n$ en $\mathbb{E}^m$ en términos de la continuidad de funciones de $\mathbb{E}^n$ en $\mathbb{R}$. Además, del punto 5 y del ejercicio 41 se desprende que la función de $\mathbb{E}^n$ en $\mathbb{R}$ que devuelve la componente i-ésima del punto en $\mathbb{E}^n$ es continua. O sea, la función

$$f(x_1, \cdots, x_n) = x_i,\ i = 1, \cdots, n,$$

es continua. Esto se muestra de la siguiente manera: sabemos que $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0$, y por lo tanto la función $f(x_1, \cdots, x_n) = (x_1, \cdots, x_n)$ es continua; además, por el punto 5 tenemos que esto implica que $f_i(x)$ es continua, pero $f_i(x) = x_i$.

El hecho de poder analizar la continuidad de funciones en términos de sus funciones componentes, el que la función que devuelve una componente del punto sea continua, y el teorema 17, nos permitiría tratar una gran cantidad de funciones, sólo falta un ingrediente, cuya necesidad será evidente en el siguiente ejemplo. Sea $f : \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$ dada por $f(x, y) = (x + y, \operatorname{sen}(x + y))$. Las funciones componentes de f son $f_1 : \mathbb{E}^2 \to \mathbb{R}$, $f_1(x, y) = x + y$ y $f_2 : \mathbb{E}^2 \to \mathbb{R}$, $f_2(x, y) = \operatorname{sen}(x + y)$. La función f será continua si f_1 y f_2 lo son. Analicemos primero f_1. La función $g_1(x, y) = x$ es continua, y también lo es $g_2(x, y) = y$, por lo tanto $g_1 + g_2 = f_1$ también es continua. ¿Qué pasa con f_2? De lo anterior tenemos que $f_2 = \operatorname{sen}(g_1 + g_2)$, esto es, es composición de las funciones continuas $g_1 + g_2 : \mathbb{E}^2 \to \mathbb{R}$ y $\operatorname{sen} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Con lo que sabemos hasta ahora no podemos determinar si f_2 es continua, nos falta mostrar que la composición de funciones continuas da una función continua, lo que se hace en el siguiente teorema (ver figura con1).

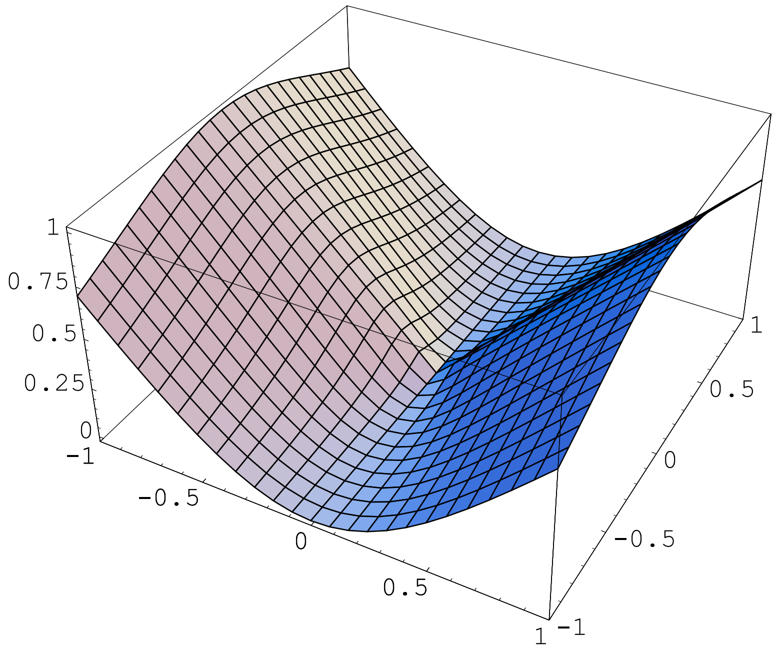
Teorema 18. *Sean $g : A \subset \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^m$ y $f : B \subset \mathbb{E}^m \to \mathbb{E}^p$ tales que $g(A) \subset B$. Si g es continua en $\boldsymbol{x}_0 \in A$ y f es continua en $\boldsymbol{y}_0 = g(\boldsymbol{x}_0)$, entonces $f \circ g$ es continua en $\boldsymbol{x}_0$.*

Demostración. Ver figura con2. Sea $\epsilon > 0$. Tenemos que mostrar que existe $\delta > 0$ tal que si $0 < |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0}| < \delta$ entonces $|(f \circ g)(\boldsymbol{x}) - (f \circ g)(\boldsymbol{x}_0)| < \epsilon$. Como g es continua en $f(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{y}_0 \in B$, entonces existe $\gamma > 0$ tal que para $\boldsymbol{y} \in B$, $|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}_0| < \gamma$ implica $|g(\boldsymbol{y}) - g(\boldsymbol{y}_0)| < \epsilon$. Como f es continua en $\boldsymbol{x}_0 \in A$, existe, para este γ, un $\delta > 0$ tal que si $\boldsymbol{x} \in A$ y $|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0| < \delta$ entonces $|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}_0)| < \gamma$, lo cual a su vez implica que $|g(f(\boldsymbol{x})) - g(f(\boldsymbol{x}_0))| < \epsilon$. $\square$

Vamos a analizar tres ejemplos. Tomemos primero la función $f : \mathbb{E}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

El gráfico de la función se muestra en la figura ().



Sabemos que las siguientes funciones son continuas: $(x, y) \to x$, $(x, y) \to y$, $\alpha \to \sqrt{\alpha}$ si $\alpha > 0$. Por lo tanto, usando las propiedades del teorema 17, tenemos que $f(x, y)$ es continua si $(x, y) \neq (0, 0)$. Queda por ver si existe el límite en el origen y su valor, que para que sea continua tendría que ser 0. Como un primer tanteo de si es posible que el límite tenga el valor 0, restringimos el dominio a los puntos $x = 0$. En este caso $f(0, y) = 0$ y $\lim_{y\to 0} f(0, y) = 0$.Quizás tendría que poner un teorema que diga que estos límites tienen que coincidir. Tomemos también el subconjunto $y = 0$, donde $f(x, 0) = |x|$ y $\lim_{x\to 0} f(x, 0) = 0$. Por lo tanto parece plausible que el límite sea 0. Para demostrar esto vamos a usar la siguiente desigualdad:

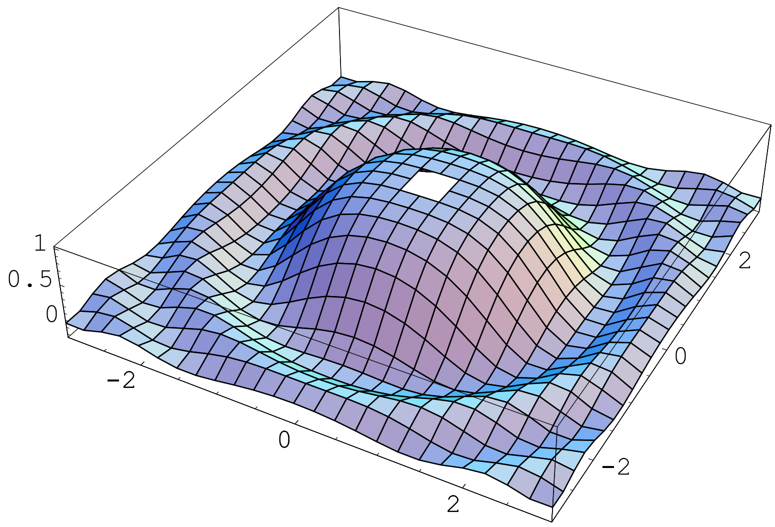
$$0 \leq \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Por lo tanto, dado un $\epsilon > 0$ definimos $\delta = \epsilon$, y si $0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta$ entonces $|f(x,y) - 0| = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} < \epsilon$. Así, la función es continua en todo su dominio.

Pasemos ahora a considerar la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 1, & (x,y) = (0,0). \end{cases} .$$

La gráfica de esta función está dada en la figura ().



Por los teoremas 17 y 18 sabemos que esta función es continua en $(x,y) \neq (0,0)$, sólo queda analizar si también lo es en $(x,y) = (0,0)$. Para esto podríamos intentar demostrar si el límite toma el valor 1. En lugar de ello usaremos el teorema en composición de funciones, 18. Sabemos que la función

$$g(\alpha) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\alpha}, & \alpha \neq 0, \\ 1, & \alpha = 0. \end{cases}$$

es continua, y sabemos también que la función $h(x,y) = x^2 + y^2$ es continua, por lo tanto $f = g \circ h$ es continua.

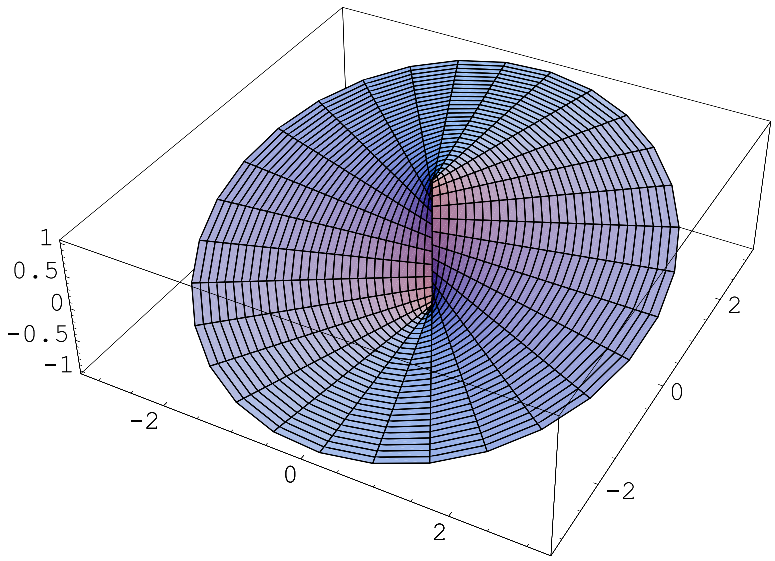
Como último ejemplo tomemos la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

En coordenadas polares, para $(x,y) \neq 0$, la función tiene la expresión en coordenadas polares

$$f(r,\theta) = \sin(\theta),$$

y la gráfica de esta función se muestra en la figura ().



En esta gráfica los rayos $\theta = constante$ son curvas de nivel. De los teoremas 17 y 18 esta función es continua en todos los puntos excepto en $(x, y) = (0, 0)$, donde vemos que el límite depende de cómo nos acerquemos, esto es, depende de sobre que rayo $\theta = constante$ nos encontremos. Por lo tanto no existe el límite en el origen. Otra forma de ver esto es a través del hecho de que en cualquier entorno de $(x, y) = (0, 0)$ la función toma todos los valores en el intervalo $[-1, 1]$, por lo tanto para los ϵ menores que 1 no existe ningún δ posible.

Esta sección tendría que cerrarla con el algoritmo para analizar continuidad, quizás incluir el diagrama de flujo.

Bibliografía

[1] Boothby,W., *An introduction to differentiable manifolds and Riemannian geometry*, Academic Press, INC., USA, 1975.

[2] Feferman, S., *The number systems. Fundations of Algebra and Analysis.* Addison-Wesley Publishing Company, Inc., USA, 1964.

[3]

[4] Gentile, E., *Notas de Álgebra*, EUDEBA, Buenos Aires, Argentina, 1984.

[5] Hoffman, K. and Kunze, R., *Linear Algebra*, 2ed., Prentice-Hall, Inc.,Englewood Cliffs, New Jersey, 1971.

[6] Rudin, W., *Principles of mathematical Analysis*, 3^{th} ed. McGraw-Hill Inc., 1976.

[7] Spivak, M., *Calculus*, 3ed., Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1994.