Introducción al Algebra Lineal

Año 2020

Practica 1: Vectores geométricos del plano y del espacio

Ejercitación propuesta

Ejercicio 1. Colocar V o F según corresponda, justificando la respuesta:
a) La suma de dos vectores fijos del plano, es otro vector fijo que siempre tiene el mismo sentido y dirección que los sumandos.
b)La suma de un vector del plano IR^2 con su vector opuesto, es igual al vector nulo.
c) La multiplicación de un escalar no nulo, por un vector fijo del plano, es el vector nulo.
d) La multiplicación de un escalar por el vector nulo, es un vector nulo del plano.
e) Dado un vector del plano IR^2, su vector opuesto es único.

Ejercicio 2. Siendo los puntos $a = (3,-3)$, $b = (0,4)$, c = (-3,2) y d = (-3,0) de IR^2:

- **a)** Representar gráficamente en un sistema de coordenadas cartesianas los vectores geométricos: $v = \overrightarrow{ab}$ $w = \overrightarrow{cd}$.
- **b)** Determinar analíticamente las componentes del vector $\frac{2}{5}\overrightarrow{ab}$.
- **c)** Determinar analíticamente las componentes del vector $-3.\overrightarrow{ab} + 4.\overrightarrow{cd}$.

Ejercicio 3. Sean p = (1, 3), q = (1, -2), r = (5,3) y t = (5, -2) puntos de IR^2:

- **a)** Encontrar las coordenadas del punto medio del segmento que une a los puntos p y r.
- **b)** Encontrar las coordenadas del punto de intersección de las diagonales del rectángulo pqtr.

Ejercicio 4. Siendo los puntos a = (4, 3,-3), b = (-5, 0, 4), c = (1, 5, 3) y d= (2, 2,-1) de IR^3:

- **a)** Representar gráficamente en un sistema de coordenadas cartesianas los vectores geométricos: $v = \overrightarrow{ab}$ y $w = \overrightarrow{cd}$.
- **b)** Determinar analíticamente las componentes del vector $7.\overrightarrow{cd}$.
- **c)** Determinar analíticamente las componentes del vector $\frac{-4}{3}\overrightarrow{ab} + 5.\overrightarrow{cd}$.

Ejercicio 5. Sean p = (2,3, -2) y q = (7,−4,1) puntos de IR^3, encontrar las coordenadas del punto medio del segmento que une a p y q.

Ejercicio 6. Siendo u, v y w vectores de IR^2, demostrar que:

a) (u + v) + w = u + (v + w)
b) (u + v) = (v + u)
c) El vector nulo es único.

Ejercicio 7. Sean u = (3,2), v = (−1,5) y w = (2,2) vectores de IR^2, determinar las componentes de los vectores:

a) u + v
b) −2u + 2v
c) 3w + v
d) u + v − w

En un sistema de ejes cartesianos, graficar en cada caso los vectores y su resultante.

Ejercicio 8. Siendo u, v vectores de IR^3 y t y k escalares reales, demostrar que:

a) t • (u + v) = t • u + t • v
b) (t + k) • u = t • u + k • u
c) (t.k) • u = t.(k • u)
d) 1 • u = u

Ejercicio 9. Sean u = (3,-2, 4), v = (6,−1,5) y w = (0,2,3) vectores de IR^3, determinar analíticamente las componentes de los vectores:

a) u + v
b) −4u + 2v
c) u+3w + v
d) v − w

En un sistema de ejes cartesianos, graficar en cada caso sus resultantes.

Ejercicio 10. Determinar los valores de x e y de IR, que verifican: x (1, 2) + y (0, 3) = (4, -3).

Ejercicio 11. Probar que no existen los escalares c_1, c_2 y c_3 tales que:

c_1 (1,2,-3) + c_2 (5,7,1) + c_3 (6, 9,-2) = (4 ,5, 0).

Ejercicio 12. Determinar en cada caso, si el vector w es una combinación lineal de los vectores de la familia F:

a) F = $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}$ y w = $\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$

b) F = { $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$ } y w = $\begin{pmatrix}-3\\5\\0\end{pmatrix}$

Ejercicio 13. Determinar si las siguientes familias de vectores son libres o ligadas:

a) En IR^2 (IR): F = {(2,3), (3,0), (4, 7)}
b) En IR^2 (IR): F = {(1,0), (-2,0)}
c) En IR^2 (IR): F = {(2,3), (0,0)}
d) En IR^2 (IR): F = {(1,3), (-4,0)}
e) En IR^3 (IR): F= {(4,-1,0), (3,-1,0), (2,0,3)}

Ejercicio 14. Colocar V o F según corresponda:

a) Una familia ligada posee todos sus vectores linealmente independientes.
b) Si el vector nulo pertenece a una familia de vectores, entonces es una familia ligada.
c) Dada una familia de vectores F = {u_1, u_2, …, u_n}, linealmente independientes, entonces se puede afirmar que todos sus vectores se pueden expresar como combinación lineal de los demás vectores de la familia.

Ejercicio 15. Sean los vectores u = (-2, 3) y v = (-3,5) de IR^2, verificar que:

a) II u II $\geq$ 0
b) II -5. u II = I -5 I . II u II
c) II u + v II $\leq$ II u II + II v II

Ejercicio 16. Sea u = (1, k, 0) un vector de IR^3. Hallar todos los valores de k reales, tal que II u II = 2.

Ejercicio 17. Sean u = (1, 2, -3) , v = (1,1,0) y w = (2,2,1) vectores de IR^3, hallar:

a) II u + v II b) II 3.u II + II w II c) II -2. u II + 2. II u II

Ejercicio 18. Normalizar el vector $u = \overrightarrow{ab}$ en los siguientes casos:

a) a= (1,-2) y b= (-2,1) de IR^2.
b) a= (1,0,2) y b= (2,-4,5) de IR^3.

Ejercicio 19. Hallar el producto escalar u • v para los vectores:

a) u = (-2, 5) y v= (9, -3) de IR^2.
b) u= (0, 3, 2) y v = (8, 0, 6) de IR^3.

Ejercicio 20. Siendo los vectores u = (3, -2, 9), v = (4, -1, 3) y w= (0, 3, 5) de IR^3, encontrar si es posible:

a) u • (v • w) b) u • (v + w) c) (u • v) w d) II (v • w) II e) II 4(v + w) • u II

Ejercicio 21. Encontrar todos los vectores:

a) u = (x, y) de IR^2 ortogonales a v = (-2, 3).
b) u = (x, y, z) de IR^3 ortogonales a v = (1,-1,-1) y w = (0, 1,-1).

Ejercicio 22. Demostrar que:

a) $\|u-v\|^2 + \|u+v\|^2 = 2 (\|u\|^2 + \|v\|^2)$, siendo u y v vectores.
b) Si u y v son vectores ortogonales entonces $\| u+v \|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$
c) Dos vectores u, v son ortogonales si y sólo si $\| u+v \| = \| u- v \|$

Ejercicio 23. Comprobar que las diagonales del romboide abdc, son perpendiculares, siendo a = (2, 3), b = (0, 5), c = (4, 5) y d = (2, 8) puntos de IR^2.

Ejercicio 24. En cada uno de los siguientes casos hallar el ángulo que forman los vectores u y v:

a) u = (1,1), v = (−1,0) de IR^2
b) u = (1,2), v= (−2,1) de IR^2
c) u = (2,1,1), v = (1,−1,2) de IR^3

Ejercicio 25. Determinar si el triángulo abc es acutángulo en el vértice b, siendo a = (-2, 3), b = (5, 3) y c = (-2, 4).

Ejercicio 26. Determinar la longitud de los lados de un cuadrilátero abcd si se sabe que: a = (-2, 2), b = (-2, 7), c = (3, 7) y d = (6, 2) de IR^2.

a) ¿Es abcd un rectángulo? Justificar analíticamente tu respuesta.
b) Calcular su área y la longitud de las diagonales.

Ejercicio 27. Sean los vectores u = (1,2,2), v = (−1,1,2) y w = (−2,2,−1) de IR^3. Calcular:

a) $u \times w$
b) $3v \times w$
c) $(u \times v) \times (-4)w$
d) $\| 2w \times u \|$

Ejercicio 28. Siendo u, v y w vectores de IR^3, demostrar que:

a) $u \times v = - (v \times u)$
b) $u \times (v+w) = (u \times v) + (u \times w)$
c) $k (u \times v) = (ku) \times v = u \times (kv)$
d) $u \times \vec{0} = \vec{0} \times u = 0$
e) $u \times u = 0$

Ejercicio 29. Sean u = (2,−1,−2) y v = (−3,2,4) vectores de IR^3. Hallar un vector de IR^3 que sea ortogonal a u y a v, y que tenga longitud 5. ¿Es único ese vector?

Ejercicio 30. Calcular el volumen del paralelepípedo determinado por los vectores u = (-1, 4,−3), v = (3,-2,0) y w = (3,1,−3) de IR^3.

Ejercicio 31. Calcular el área del triángulo abc, siendo a = 2,2,0, b = (-1, 0, 2) y c = (0, 4, 3) puntos de IR^3.

➢ Ejercitación adicional

Ejercicio 32. . Determinar los vectores u y v de IR^2, tales que verifican el siguiente sistema:

$$\begin{cases} u+v=(5,0) \\ 2u-3v=(-10,15) \end{cases}$$

Ejercicio 33. Determinar los vectores u y v de IR^3, tales que verifican el siguiente sistema:

$$\begin{cases} u+v=(4,-2,-2) \\ u-5v=(-2,-2,10) \end{cases}$$

Ejercicio 34. Determinar si existen los escalares x, y de IR tales que: x . (-2,1) + y. (-4, 2) = (0 ,0)

Ejercicio 35. Determinar todos los escalares c_1, c_2 y c_3 tales que:

c_1 (2,7,8) + c_2 (1,-1,3) + c_3 (3,6,1) = (0 ,0, 0).

Ejercicio 36. Determinar el valor de k para que la familia F= { (1,1,1), (0,1,1), (1,0,k)} sea ligada.

Ejercicio 37. Sea w = k.(2,2,1) un vector de IR^3. Hallar todos los valores de k reales, tal que ||w|| = 1.

Ejercicio 38. Sean los puntos del espacio tridimensional: a= (1,1,1), b = (1,−1,0) y c = (2,−1,−1).
Calcular:

a) $\| \overrightarrow{ab} \|$
b) $\| 2\,\overrightarrow{ab} - 3\,\overrightarrow{ac} \|$

Ejercicio 39. Sean los vectores u = (1, 2) , v = (4, -2) y w = (6,0) de IR^2 . Determinar:

a) u • (7 v+ w)
b) || (u • w) w ||
c) || u || (v • w)

Ejercicio 40. Sea u = (1,1) un vector de IR^2. Hallar todos los vectores w de IR^2 tal que el ángulo entre u y w sea igual a $\frac{\pi}{4}$ y $\|w\| = 1$.

Ejercicio 41. Dado el triángulo $\overset{\Delta}{abc}$, donde a = (2, 1), b = (3, 3) y c = (4, 1), determinar la amplitud de sus ángulos interiores.

Ejercicio 42. Sean los puntos del espacio tridimensional: p = (1,1,1) y q = (k,−k,2). Hallar todos los valores de k reales, tales que d(p, q) = 2.

Ejercicio 43. Hallar el perímetro del triángulo determinado por los puntos: a= (-2, 0, -1), b = (-2, -1, 3) y c = (-1, 1, 1) de IR^3. Clasificar dicho triángulo según la medida de sus lados y según sus ángulos.

Ejercicio 44. Sea el vector u = (2,1,5) de IR^3

(a) Determinar si existe el vector w de IR^3, tal que uxw = (2,1,−1).

(b) Determinar si existe el vector w de IR^3, tal que uxw = (3,1,−1).

(c) Para cada uno de los ítems anteriores responder las siguientes preguntas.

1) En caso de existir, ¿es única la solución?
2) ¿Se puede determinar la existencia o no existencia del vector w sin calcularlo? ¿Como?

Ejercicio 45. Hallar el área del paralelogramo determinado por los vectores: u = (-2, 0, 3) y w = (-1, 3, -5) de IR^3.

Ejercicio 46. Calcular el área del triángulo de vértices en los puntos a = (5,3,−2), b = (1,5,0) y c = (1,1,−3) de IR^3.