Introducción al Algebra Lineal

Año 2020

Practica 3: Sistemas de ecuaciones lineales

➢ A desarrollar junto con el profesor en clase

Ejercicio 1. Calcule la longitud de cada lado de un triángulo isósceles cuyo perímetro es de 16 metros, sabiendo que la suma entre las longitudes de sus lados distintos es de 10 metros.

Ejercicio 2. Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ 4x - 2y = t \end{cases}$, determina, si existe, un valor de t de modo que el sistema posea infinitas soluciones.

Ejercicio 3. El aire puro está compuesto esencialmente por un 78 por ciento de nitrógeno, un 21 por ciento de oxígeno y un 1 por ciento de argón. Para poder realizar un experimento en el planeta Marte se dispone de una habitación que queremos llenar con 1000 litros de aire puro para los astronautas. Para ello, la habitación se encuentra alimentada por tres tanques T1, T2 y T3 llenos de estos elementos químicos, en la siguiente proporción:

T1: 50 por ciento de nitrógeno y 50 por ciento de oxígeno.

T2: 80 por ciento de nitrógeno y 20 por ciento de oxıgeno.

T3: 60 por ciento de nitrógeno, 30 por ciento de oxígeno y 10 por ciento de argón.

Calcular la cantidad de litros necesaria de cada tanque para que la mezcla resultante produzca la cantidad buscada de 1000 litros de aire puro dentro de la habitación.

Ejercicio 4. Dados los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

a) Determina su forma matricial.
b) Escribe su matriz ampliada.

I) $\begin{cases} 3x + 2y = -4 \\ y + 3x + 5 = 0 \end{cases}$ II) $\begin{cases} 2x + y + z = -1 \\ x + y + 2z = 0 \\ 3x + 2y + 3z = -1 \end{cases}$ III) $\begin{cases} x - 2y + z - t = 1 \\ 2x + y - z + t = 0 \\ 3y + z - 2t = 2 \end{cases}$ IV) $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ x - 6y = -1 \\ -7x - 3y = -2 \end{cases}$

Ejercicio 5. Dados los sistemas de ecuaciones lineales del ejercicio anterior, analiza el tipo de solución aplicando el teorema de Rouché- Frobenius.

Ejercicio 6. Encuentra los valores de ” a“ tales que el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x-3y+z=1 \\ 2x+y-z=-1 \\ 5x-8y+(a^2-2)z=a \end{cases}$

posea:

a) Infinitas soluciones.
b) Ninguna solución.
c) Única solución.

Ejercicio 7. Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} 2x+3y-z=11 \\ x-y+2z=-7 \\ 3x+2y+z=4 \end{cases}$ ¿Existe algún valor de r tal que x = 1, y = 2, z = r, sea una solución del sistema?

Ejercicio 8. Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales homogéneo $\begin{cases} 3x+2y-5z=0 \\ -4x+2y+2z=0 \\ x-6y-2z=0 \end{cases}$:

a) Define la matriz principal del sistema.

b) Calcula el det (A).

c) Analiza que tipo de solución admite.

Ejercicio 9. Aplicando el teorema de Rouché – Frobenius, determina si los siguientes sistemas de ecuaciones lineales homogéneos poseen solución no trivial:

a) $\begin{cases} x+3y=0 \\ 2x-y=0 \\ -3x+4y=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-2y+3z=0 \\ 2x+y-z=0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x-y+4z=0 \\ 2x-3y+z=0 \\ 3x+y-2z=0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x-2y-z=0 \\ 2x-3y+z=0 \\ -x+y-2z=0 \end{cases}$

Ejercicio 10. Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales homogéneo $\begin{cases} x+2y-z=0 \\ -x+ay+2z=0 \\ 2x-y-az=0 \end{cases}$.Indica para que valores de “a“ el sistema es:

a) Compatible determinado.

b) Compatible indeterminado.

Ejercicio 11. Dadas las siguientes matrices ampliadas asociadas a un sistema de ecuaciones lineales. Determina su conjunto solución aplicando el método de Gauss- Jordan.

a) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right]$ b) $\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{array}\right]$ c) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 1 & 2 \end{array}\right]$ d) $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 6 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$

Ejercicio 12. Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x+y+-z=6 \\ 2x-y-2z=-1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$, agrega una nueva ecuación, de manera que el sistema resulte:

a) Compatible determinado.
b) Compatible indeterminado.
c) Incompatible.

Ejercicio 13. Resuelve, si es posible, por el método de Cramer, los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

a) $\begin{cases} 3x-2y-4=0 \\ 4x+y-3=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x+7y=8 \\ 10x+14y=3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -3x-2y+2z=1 \\ 2x+4y-6z=3 \\ 4x+2z=-1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x+y+3z=2 \\ -2x+y+3z=-1 \\ x+2y-z=0 \end{cases}$

➢ <u>Ejercitación adicional propuesta para el alumno</u>

Ejercicio 14. Dado el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} 4x-7y=10 \\ x+3y=t \end{cases}$

a) Determina un valor de **t** de modo que el sistema sea compatible.
b) Determina un valor de **t** de modo que el sistema sea incompatible.

Ejercicio 15. Analiza los siguientes sistemas de ecuaciones, determina qué tipo de solución tiene cada uno y encuentra el conjunto solución.

a) $\begin{cases} x \quad\quad +z=3 \\ 4x+y+6z=-1 \\ -2x+y+3z=2 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x+y+3z=-1 \\ 4x+2y+6z=0 \\ x-2y+7z=-1 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} -2y+z-t=1 \\ 4x+y-z+3t=0 \\ 5y+z-2t=8 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 4x+9y=1 \\ 2x-6y=-1 \\ -8x-3y=-5 \end{cases}$

Ejercicio 16. Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales: $\begin{cases} 2x + y - 3z = 0 \\ -3x + ay + 4z = 1 \\ 5x - 2y - az = -3 \end{cases}$

a) Define las matrices A (matriz del sistema) y A' (matriz ampliada).
b) Calcula el determinate de A.
c) Indica para que valores de a el sistema es:
- **c1)** Compatible determinado
- **c2)** Compatible indeterminado
- **c3)** Incompatible.

Ejercicio 17. Sabiendo que a, b y c son tres números naturales consecutivos y que a > b > c, resuelve el siguiente Sistema utilizando la regla de Cramer:

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ x - z = -c \\ x + z = b \end{cases}$$

Ejercicio 18. Verifica que el vector **u** = (1, -2, 0) puede escribirse como combinación lineal de los vectores: $\mathbf{u_1}$ = (2, 1, 2), $\mathbf{u_2}$ = (3, -1; 2) y $\mathbf{u_3}$ = (1, -2, 1).

Ejercicio 19. Expresa un sistema de ecuaciones que permita determinar si los siguientes vectores son linealmente independientes o no, y en el caso que sean linealmente dependientes encuentra una combinación lineal entre ellos:

a) $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$; $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$; $w = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$; $w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $z = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

Ejercicio 20. analiza para cuales valores de λ, el siguiente Sistema homogéneo posee solución no trivial:

$$\begin{cases} (1-\lambda)x + 2y = 0 \\ -x + (1+\lambda)y = 0 \end{cases}$$

Ejercicio 21. Tres tipos de acero contienen los siguientes porcentajes de carbón, hierro y cromo:

Tipo	Carbón	Cromo	Hierro
A	1%	0%	99%
B	1%	15%	84%
C	4%	3%	93%

Se dispone de 15t de carbón, 39t de cromo y 546t de hierro. ¿Cuántas toneladas de cada tipo de acero pueden obtenerse?

Ejercicio 22. Para preparar un insecticida se deben mezclar 3 litros del producto A, 4 litros del B y 6,5 litros del C. En el mercado se encuentran las marcas X, Y, y Z que contienen, por envase, las siguientes cantidades (en litros) de los productos A, B y C:

Marcas	A	B	C
X	1	2	2
Y	-	-	1
Z	1	1	-

¿Cuántos envases y de cada tipo se deben mezclar para obtener la cantidad deseada de insecticida?

Ejercicio 23. Un nutricionista está preparando una dieta que consta de los alimentos A, B y C. Cada onza del alimento A contiene 2 unidades de proteína, 3 unidades de grasa y 4 unidades de carbohidratos. Cada onza del alimento B contiene 3 unidades de proteína, 2 unidades de grasa y 1 unidad de carbohidratos. Cada onza del alimento C contiene 3 unidades de proteína, 3 unidades de grasa y 2 unidades de carbohidratos. Si la dieta debe proporcionar exactamente 25 unidades de proteína, 24 unidades de grasa y 21 unidades de carbohidratos, ¿cuántas onzas de cada comida se necesitan?

Ejercicio 24. Los 32 alumnos de una clase tienen 18, 19 y 20 años. Si el promedio de sus edades es 18,5 años, ¿cuántos alumnos hay de cada edad, si se sabe que de 18 años hay 6 más que de entre 19 y 20 años?