Topología General

Primer semestre de 2016

Práctica 0: Repaso

Propiedades básicas de los conjuntos

Ejercicio 1. Demostrar las siguientes igualdades de conjuntos:

(*a*) $\Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big) \cap B = \bigcup_{i\in I}(A_i \cap B)$

(*b*) $\Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big) \cup B = \bigcap_{i\in I}(A_i \cup B)$

(*c*) $\Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big)^c = \bigcap_{i\in I} A_i^c$

(*d*) $\Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big)^c = \bigcup_{i\in I} A_i^c$

(*e*) $B - \bigcup_{i\in I} A_i = \bigcap_{i\in I}(B - A_i)$

(*f*) $B - \bigcap_{i\in I} A_i = \bigcup_{i\in I}(B - A_i)$

Ejercicio 2. Sea $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de conjuntos y sea $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Hallar una familia de conjuntos $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que verifique simultáneamente:

- $B_n \subseteq A_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$
- $B_k \cap B_j = \varnothing$ si $k \neq j$
- $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$

Ejercicio 3. Sean X e Y conjuntos, sea $f : X \to Y$ una función y sean A y B subconjuntos de X.

(*a*) Demostrar que:

(1) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
(2) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$

(*b*) Generalizar al caso de uniones e intersecciones infinitas.

(*c*) Exhibir un ejemplo donde la inclusión en i) (b) sea estricta.

Ejercicio 4. Sean X e Y conjuntos, sea $f : X \to Y$ una función y sean $A \subseteq X$ y $B, B_1, B_2 \subseteq Y$. Demostrar que:

(*a*) $A \subseteq f^{-1}(f(A))$

(*b*) $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$

(*c*) $f^{-1}(Y - B) = X - f^{-1}(B)$

(*d*) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$

(*e*) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$

Generalizar (iv) y (v) al caso de uniones e intersecciones infinitas.

Ejercicio 5. Sea $f : X \to Y$ una función. Demostrar que $f(f^{-1}(B)) = B$ para cada $B \subseteq Y$ si y sólo si f es suryectiva.

Ejercicio 6. Sea $f : X \to Y$ una función. Demostrar que las siguientes proposiciones son equivalentes:

(a) f es inyectiva.

(b) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ para todos $A, B \subseteq X$.

(c) $f^{-1}(f(A)) = A$ para todo $A \subseteq X$.

(d) $f(A) \cap f(B) = \varnothing$ para todo par de subconjuntos $A, B \subseteq X$ tales que $A \cap B = \varnothing$.

(e) $f(A - B) = f(A) - f(B)$ para todo par de subconjuntos $A, B \subseteq X$ tales que $B \subseteq A \subseteq X$.

Ejercicio 7. Sea A un conjunto. Para cada subconjunto $S \subseteq A$ se define la *función característica de* S, $\mathcal{X}_S : A \to \{0,1\}$, por

$$\mathcal{X}_S(a) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \in S \\ 0 & \text{si } a \notin S \end{cases}$$

Demostrar que:

(a) $\mathcal{X}_{S\cap T} = \mathcal{X}_S \cdot \mathcal{X}_T$ para todo par de subconjuntos $S, T \subseteq A$.

(b) $\mathcal{X}_{A-S} = 1 - \mathcal{X}_S$ para todo $S \subseteq A$.

(c) $\mathcal{X}_S \ + \ \mathcal{X}_T = \mathcal{X}_{S\cup T} \ + \ \mathcal{X}_{S\cap T}$ para todos $S, T \subseteq A$.

Espacios métricos

Generalidades

Ejercicio 8.

(a) Demostrar que las siguientes funciones son métricas en $\mathbb{R}^n$:

(1) $d_1(x,y) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$

(2) $d_\infty(x,y) = \displaystyle\sup_{1\le i\le n} |x_i - y_i|$.

(3) $d_2(x,y) = \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}$

(b) Para $n = 2$, dibujar las tres bolas abiertas $B_1(0,0)$.

Ejercicio 9. Sea X un conjunto y sea $\delta : X \times X \to \mathbb{R}$ definida por

$$\delta(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ 1 & \text{si } x \neq y \end{cases}$$

Verificar que δ es una métrica y hallar los abiertos de (X, δ).
Nota: δ se llama *métrica discreta* y (X, δ) se llama *espacio métrico discreto.*

Ejercicio 10. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$. Definimos $C([a,b]) = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \ / \ f \text{ es continua}\}$.

(a) Sea $d_1 : C([a,b]) \times C([a,b]) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ definida por $d_1(f,g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| \, \mathrm{d}x$. Demostrar que d_1 es una métrica en $C([a,b])$.

(b) Sea $d_\infty : C([a,b]) \times C([a,b]) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ definida por $d_\infty(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)| \ / \ x \in [a,b]\}$. Demostrar que d_∞ es una métrica en $C([a,b])$.

Ejercicio 11. Sean (X_1, d_1) y (X_2, d_2) espacios métricos. Consideremos el conjunto $X_1 \times X_2$ y la aplicación $d : (X_1 \times X_2) \times (X_1 \times X_2) \to \mathbb{R}$ dada por $d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2)$.

(a) Demostrar que d define una métrica en $X_1 \times X_2$.

(b) Construir otras métricas en $X_1 \times X_2$.

Ejercicio 12. Sean d_∞ y d_2 las métricas en $\mathbb{R}^n$ definidas en el ejercicio 8. Mostrar que un conjunto es abierto para d_∞ si y sólo si lo es para d_2.

Ejercicio 13.

(a) Sea (X, d) un espacio métrico. Se define $d'(x, y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$. Demostrar que d' es una métrica en X topológicamente equivalente a d (o sea, que ambas dan lugar a una misma noción de conjunto abierto). Observar que $0 \leq d'(x, y) < 1$ para todo $x, y \in X$.

(b) Sea $(X_n, d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de espacios métricos tales que para cada $n \in \mathbb{N}$ vale $0 \leq d_n(x, y) \leq 1$ para todo par de elementos $x, y \in X_n$. Para cada $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definimos:

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n(x_n, y_n)}{2^n}$$

Demostrar que d es una métrica en el espacio producto $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$.

(c) Sea (X, d) un espacio métrico. Llamamos $X^{\mathbb{N}}$ al conjunto de las sucesiones de X. Mostrar que $X^{\mathbb{N}}$ es un espacio métrico con una distancia conveniente.

Ejercicio 14. Caracterizar los abiertos y los cerrados de $\mathbb{Z}$ considerado como espacio métrico con la métrica inducida por la usual de $\mathbb{R}$. Generalizar a un subespacio discreto de un espacio métrico X.

Ejercicio 15. Sea (X, d) un espacio métrico y sean $A, B \subseteq X$.

(a) Demostrar las siguientes propiedades del *interior* de un conjunto:

(1) $A^\circ = \bigcup_{\substack{G \text{ abierto} \\ G \subseteq A}} G$

(2) $\varnothing^\circ = \varnothing$ y $X^\circ = X$

(3) $A \subseteq B \implies A^\circ \subseteq B^\circ$

(4) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$. ¿Se puede generalizar a una intersección infinita?

(5) $(A \cup B)^\circ \supseteq A^\circ \cup B^\circ$. ¿Vale la igualdad?

(b) Demostrar las siguientes propiedades de la *clausura* de un conjunto:

(1) $\overline{A} = \bigcap_{\substack{F \text{ cerrado} \\ F \supseteq A}} F$

(2) $\overline{\varnothing} = \varnothing$ y $\overline{X} = X$

(3) $A \subseteq B \implies \overline{A} \subseteq \overline{B}$

(4) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$. ¿Se puede generalizar a una unión infinita?
(5) $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$
(6) $x \in \overline{A}$ si y sólo si existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ tal que $x_n \to x$.

(c) Demostrar las siguientes propiedades que relacionan interior y clausura:

(1) $(X - A)^\circ = X - \overline{A}$
(2) $\overline{X - A} = X - A^\circ$

¿Son ciertas las igualdades: $\overline{A} = \overline{A^\circ}$, $A^\circ = (\overline{A})^\circ$?

(d) Demostrar las siguientes propiedades de la *frontera* de un conjunto:

(1) $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X - A}$
(2) ∂A es cerrado
(3) $\partial A = \partial(X - A)$

Ejercicio 16. Sea (X, d) un espacio métrico y sean $G \subseteq X$ abierto y $F \subseteq X$ cerrado. Demostrar que $F - G$ es cerrado y que $G - F$ es abierto.

Ejercicio 17. Sea (X, d) un espacio métrico. Dados $a \in X$ y $r \in \mathbb{R}_{>0}$, llamamos *bola cerrada de centro a y radio r* al conjunto $\overline{B}(a, r) = \{x \in X \ / \ d(x, a) \leq r\}$.

(a) Demostrar que $\overline{B}(a, r)$ es un conjunto cerrado y que $\overline{B(a, r)} \subseteq \overline{B}(a, r)$.

(b) Dar un ejemplo de un espacio métrico y una bola abierta $B(a, r)$ cuya clausura no sea $\overline{B}(a, r)$.

Ejercicio 18. Sean (X, d_1) e (Y, d_2) espacios métricos. Se considera el espacio métrico $(X \times Y, d)$, donde d es la métrica definida en el ejercicio 11. Demostrar que para $A \subseteq X$ y $B \subseteq Y$ valen:

(a) $(A \times B)^\circ = A^\circ \times B^\circ$

(b) $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$

Ejercicio 19. Sea (X, d) un espacio métrico y sean A, B subconjuntos de X.

(a) Demostrar las siguientes propiedades del *derivado* de un conjunto:

1) A' es cerrado
2) $A \subseteq B \implies A' \subseteq B'$
3) $(A \cup B)' = A' \cup B'$
4) $\overline{A} = A \cup A'$
5) $(\overline{A})' = A'$

(b) Demostrar que $x \in X$ es un punto de acumulación de $A \subseteq X$ si y sólo si existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ tal que $x_n \to x$ y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no es casi constante.

Ejercicio 20. Sea (X, d) un espacio métrico. Dados $A \subseteq X$ no vacío y $x \in X$, se define la *distancia de x a A* como $d_A(x) = \text{ínf}\{d(x, a) \ / \ a \in A\}$. Demostrar que

(a) $\big|d_A(x) - d_A(y)\big| \leq d(x, y)$ para todo par de elementos $x, y \in X$

(b) $x \in A \implies d_A(x) = 0$

(c) $d_A(x) = 0 \iff x \in \overline{A}$

(d) $B_A(r) = \{x \in X \;/\; d_A(x) < r\}$ es abierto para todo $r > 0$

(e) $\overline{B}_A(r) = \{x \in X \;/\; d_A(x) \leq r\}$ es cerrado para todo $r > 0$

Ejercicio 21. Sea (X, d) un espacio métrico. Dados $A, B \subseteq X$ no vacíos se define la *distancia entre A y B* por $d(A, B) = \text{ínf}\{d(a, b) \;/\; a \in A\;,\; b \in B\}$. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

(a) $d(A, B) = d(\overline{A}, B)$.

(b) $d(A, B) = 0 \iff A \cap B \neq \varnothing$.

(c) $d(A, B) = 0 \iff \overline{A} \cap \overline{B} \neq \varnothing$.

(d) $d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$.

Continuidad

Ejercicio 22. Decidir cuáles de las siguientes funciones son continuas:

(a) $f : (\mathbb{R}^2, d) \to (\mathbb{R}, |\;|)$, $f(x, y) = x^2 + y^2$, donde d representa la métrica euclídea.

(b) $\text{id}_{\mathbb{R}^2} : (\mathbb{R}^2, \delta) \to (\mathbb{R}^2, d_\infty)$, la función identidad, donde δ representa la métrica discreta.

(c) $\text{id}_{\mathbb{R}^2} : (\mathbb{R}^2, d_\infty) \to (\mathbb{R}^2, \delta)$, la función identidad, donde δ representa la métrica discreta.

(d) $i : (E, d) \to (X, d)$, la inclusión, donde $E \subset X$

Ejercicio 23. Demostrar que un espacio métrico X es discreto si y sólo si toda función de X en un espacio métrico arbitrario es continua.

Ejercicio 24. Consideramos las funciones $E, I : C([0, 1]) \to \mathbb{R}$ definidas por:

$$E(f) = f(0) \qquad \text{y} \qquad I(f) = \int_0^1 f(x)\,dx$$

(a) Demostrar que si utilizamos en $C([0, 1])$, la distancia d_∞ ambas resultan continuas.

(b) Demostrar que si, en cambio, utilizamos en $C([0, 1])$ la distancia d_1, I es una función continua pero E no lo es.

(c) Analizar si es posible que una función $F : C([0, 1]) \to \mathbb{R}$ sea continua para la distancia d_1 pero no para d_∞.

Ejercicio 25. Sean X, Y espacios métricos y sea $f : X \to Y$ una función continua. Demostrar que el gráfico de f, definido por

$$G(f) = \{(x, f(x)) \in X \times Y : x \in X\}$$

es cerrado en $X \times Y$. ¿Es cierta la afirmación recíproca?

Ejercicio 26. Sea (X, d) un espacio métrico y sea $f : X \to \mathbb{R}$. Demostrar que f es continua si y sólo si para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, los conjuntos $\{x \in X : f(x) < \alpha\}$ y $\{x \in X : f(x) > \alpha\}$ son abiertos.

Ejercicio 27. Sea (X, d) un espacio métrico y sea A un subconjunto de X. Demostrar que la función $d_A : X \to \mathbb{R}$ definida por $d_A(x) = d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a)$ es continua.

Ejercicio 28.

(*a*) Sean (X, d) e (Y, d') espacios métricos y sea $D \subset X$ denso. Sean $f, g : X \to Y$ funciones continuas. Demostrar que si $f|_D = g|_D$, entonces $f = g$.

(*b*) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(x + y) = f(x) + f(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{Q}$. Demostrar que existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \alpha\, x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Separabilidad y completitud

Ejercicio 29. Sea $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})} = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R} \;/\; \exists\, n_0 : a_n = 0 \;\forall\, n \geq n_0\}$. Se considera la aplicación $d_\infty : \mathbb{R}^{(\mathbb{N})} \times \mathbb{R}^{(\mathbb{N})} \to \mathbb{R}$ definida por $d_\infty((a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n - b_n|$. Demostrar que $(\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}, d_\infty)$ es un espacio métrico separable.

Ejercicio 30. Sea (X, d) un espacio métrico y sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$. Demostrar que

(*a*) $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ si y sólo si para toda subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$

(*b*) Si existe $x \in X$ para el cual toda subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión $(x_{n_{k_j}})_{j\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim_{j\to\infty} x_{n_{k_j}} = x$, entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge y $\lim_{n\to\infty} x_n = x$

(*c*) Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente, entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy. ¿Vale la recíproca?

(*d*) Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, entonces es acotada.

(*e*) Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy y tiene una subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x \in X$, entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge y $\lim_{n\to\infty} x_n = x$

Ejercicio 31. Demostrar que si toda bola cerrada de un espacio métrico X es un subespacio completo de X, entonces X es completo.

Ejercicio 32. Sea (X, d) un espacio métrico.

(*a*) Demostrar que todo subespacio completo de (X, d) es un subconjunto cerrado de X.

(*b*) Demostrar que si X es completo, entonces todo subconjunto $F \subseteq X$ cerrado, es un subespacio completo de X.

Ejercicio 33. Demostrar que todo espacio métrico con la métrica discreta es completo.

Ejercicio 34. Sea (X, d) un espacio métrico y sea $\mathcal{D} \subset X$ un subconjunto denso con la propiedad que toda sucesión de Cauchy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}$ converge en X. Demostrar que X es completo.

Ejercicio 35. Sean X e Y espacios métricos y sea $f : X \to Y$ una función continua y sobreyectiva.

(*a*) Demostrar que si X es separable entonces Y es separable.

(*b*) ¿Es cierto que si X es completo, entonces Y es completo?

Compacidad

Ejercicio 36.

(*a*) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Demostrar que el conjunto $\{0\} \cup \{a_n \;/\; n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ es compacto.

(*b*) Mostrar que el intervalo $(0,1] \subset \mathbb{R}$ no es compacto.

(*c*) Sea $S = (a,b) \cap \mathbb{Q}$ con $a, b \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Demostrar que S es un subconjunto cerrado y acotado pero no compacto de $(\mathbb{Q}, d)$, donde d es la métrica euclídea de $\mathbb{R}$.

Ejercicio 37. Dado un cubrimiento por abiertos $(U_i)_{i\in I}$ de un espacio métrico (X,d), un número $\epsilon > 0$ se llama *número de Lebesgue* de $(U_i)_{i\in I}$ si para todo $x \in X$ existe $j \in I$ tal que $B(x,\epsilon) \subset U_j$. Demostrar que todo cubrimiento por abiertos de un espacio métrico compacto tiene un número de Lebesgue.

Ejercicio 38. Sea (X,d) un espacio métrico. Demostrar que:

(*a*) Toda unión finita y toda intersección (finita o infinita) de subconjuntos compactos de X es compacta.

(*b*) Si (X,d) es compacto, todo subconjunto cerrado de X es compacto.

(*c*) Un subconjunto $F \subset X$ es cerrado si y sólo si $F \cap K$ es cerrado para todo compacto $K \subset X$.

Ejercicio 39. Sea $c_0 = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} \;/\; \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0\}$. Se define en c_0 la métrica

$$d(x,y) = \sup\{|x_n - y_n| \;/\; n \in \mathbb{N}\}$$

(*a*) Demostrar que la bola cerrada $\overline{B}(x,1) = \{y \in c_0 \;/\; d(x,y) \leq 1\}$ no es compacta.

(*b*) Demostrar que (c_0, d) es separable.

Ejercicio 40. Sean (X,d) e (Y,d') espacios métricos. Se considera $(X \times Y, d_\infty)$, donde

$$d_\infty((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \text{máx}\{d(x_1,x_2), d'(y_1,y_2)\}$$

Demostrar que $(X \times Y, d_\infty)$ es compacto si y sólo si (X,d) e (Y,d') son compactos.

Ejercicio 41. Sea (X,d) un espacio métrico.

(*a*) Sean $K \subset X$ un compacto y sea $x \in X - K$. Demostrar que existe $y \in K$ tal que $d(x,K) = d(x,y)$; es decir, la distancia entre x y K "se realiza".

(*b*) Sean F, $K \subset X$ dos subconjuntos disjuntos de X tales que F es cerrado y K es compacto. Demostrar que la distancia $d(F,K)$ entre F y K es positiva.

(*c*) Sean $K_1, K_2 \subset X$ dos subconjuntos compactos de X tales que $K_1 \cap K_2 = \varnothing$. Demostrar que existen $x_1 \in K_1$ y $x_2 \in K_2$ tales que $d(K_1,K_2) = d(x_1,x_2)$; es decir, la distancia entre K_1 y K_2 "se realiza".