
Topología General

Primer semestre de 2016

Práctica 2: Topologías iniciales y finales

Ejercicio 1. Sea X un espacio topológico, sea $B \subseteq X$ un subespacio y sea $A \subseteq B$. Probar que la topología de A como subespacio de X coincide con la topología de A como subespacio de B .

Ejercicio 2. Sea X un conjunto y sea $A \subseteq X$. Sean \mathcal{T} y \mathcal{T}' topologías en X . Sean \mathcal{T}_A y \mathcal{T}'_A las topologías de subespacio en A respecto de (X, \mathcal{T}) y (X, \mathcal{T}') respectivamente.

(a) Demostrar que si $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$ entonces $\mathcal{T}_A \subseteq \mathcal{T}'_A$.

(b) ¿Es cierto que si $\mathcal{T} \subsetneq \mathcal{T}'$ entonces $\mathcal{T}_A \subsetneq \mathcal{T}'_A$?

Ejercicio 3. Sea X un espacio topológico y sea $A \subseteq X$ un subespacio. Sea $B \subseteq A$. Denotamos por \overline{B}^A a la clausura de B en A y por \overline{B}^X a la clausura de B en X . Demostrar que $\overline{B}^A = \overline{B}^X \cap A$.

Ejercicio 4. Sean X e Y espacios topológicos y sean $A \subseteq X$ y $B \subseteq Y$ subespacios. Le damos a $X \times Y$ la topología producto. Probar que la topología de $A \times B$ como subespacio de $X \times Y$ coincide con la topología producto de $A \times B$.

Ejercicio 5. Sea $X = \mathbb{R}$ con la topología usual y sea $Y = \mathbb{R}$ con la topología discreta. Probar que la topología del orden lexicográfico en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ coincide con la topología producto en $Y \times X$.

Ejercicio 6. Sea \mathbb{R}_l el espacio topológico cuyo conjunto subyacente es \mathbb{R} y cuya topología es la generada por la base $\mathcal{B} = \{[a, b) / a, b \in \mathbb{R}\}$. Sea $L \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ una recta. Describir la topología que hereda L como subespacio de $\mathbb{R}_l \times \mathbb{R}$ y como subespacio de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_l$.

Ejercicio 7. Sea $I = [0, 1]$ con la topología usual y sea I_d el espacio topológico discreto cuyo conjunto subyacente es $[0, 1]$. Comparar la topología producto en $I \times I$ con la topología del orden lexicográfico en $I \times I$ y con la topología producto de $I_d \times I$.

Ejercicio 8. Sean X e Y espacios topológicos. Le damos a $X \times Y$ la topología producto. Sean $A \subseteq X$ y $B \subseteq Y$. Probar que $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$. Concluir que si A es cerrado en X y B es cerrado en Y entonces $A \times B$ es cerrado en $X \times Y$.

Ejercicio 9. Sea $\{X_\alpha\}_{\alpha \in J}$ una familia de espacios topológicos. Le damos a $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ la topología producto. Sea $\beta \in J$. Probar que la proyección $p_\beta : \prod_{\alpha \in J} X_\alpha \rightarrow X_\beta$ es continua y abierta. Hallar un ejemplo en el que las proyecciones no sean cerradas.

Ejercicio 10. Sea $\{X_j\}_{j \in J}$ una familia de espacios topológicos. Para cada $j \in J$, sea $A_j \subseteq X_j$. Le damos a $\prod_{j \in J} X_j$ la topología producto.

(a) Demostrar que $\overline{\prod_{j \in J} A_j} = \prod_{j \in J} \overline{A_j}$.

(b) Demostrar que si A_j es cerrado en X_j para todo $j \in J$, entonces $\prod_{j \in J} A_j$ es cerrado en $\prod_{j \in J} X_j$.

(c) Demostrar que los items (a) y (b) también son ciertos si le damos a $\prod_{j \in J} X_j$ la topología caja.

Ejercicio 11. Sea $\{X_j\}_{j \in J}$ una familia de espacios topológicos y sea $X = \prod_{j \in J} X_j$ con la topología

producto. Para cada $i \in J$, sea $p_i : \prod_{j \in J} X_j \rightarrow X_i$ la proyección. Sea $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ una red en X y sea $x \in X$. Probar que $x_\alpha \rightarrow x$ si y sólo si $p_i(x_\alpha) \rightarrow p_i(x)$ para todo $i \in J$. ¿Es cierto esto si se toma en X la topología caja?

Ejercicio 12. Comparar las topologías caja, producto y uniforme en \mathbb{R}^ω . Rehacer el ejercicio 24 de la práctica 1 tomando en \mathbb{R}^ω la topología producto y la topología caja. Comparar con lo obtenido para la topología uniforme.

Ejercicio 13. Sea X un espacio topológico y sean $\{X_j / j \in J\}$ una familia de espacios topológicos y $\{f_j : X \rightarrow X_j / j \in J\}$ una familia inicial de funciones. Le damos a $\prod_{j \in J} X_j$ la topología producto.

Sea $f : X \rightarrow \prod_{j \in J} X_j$ definida por $f(x) = (f_j(x))_{j \in J}$ y sea Z la imagen de f . Le damos a Z la topología de subespacio. Probar que $f : X \rightarrow Z$ es abierta.

Ejercicio 14. Sean X e Y espacios topológicos y sean $x_0 \in X$ e $y_0 \in Y$. Probar que las funciones $i : X \rightarrow X \times Y$ y $j : Y \rightarrow X \times Y$ definidas por $i(x) = (x, y_0)$ y $j(y) = (x_0, y)$ son subespacios.

Ejercicio 15. Sea (X, d) un espacio métrico. Probar que la topología inducida por d es la topología menos fina en X tal que $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ es continua.

Sugerencia: Si d es continua también lo es $d_{x_0} : X \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $d_{x_0}(x) = d(x_0, x)$.

Ejercicio 16. Sea X un espacio topológico y sea S el espacio de Sierpinski.

(a) Probar que $A \subseteq X$ es abierto si y sólo si $\chi_A : X \rightarrow S$ es continua.

(b) Probar que la familia $\{\chi_U / U \text{ es abierto en } X\}$ es una familia inicial para la topología de X .

Ejercicio 17. Sea $\{X_j / j \in J\}$ una familia de espacios topológicos. Demostrar que existe un espacio topológico X junto con funciones continuas $i_j : X_j \rightarrow X$ con la siguiente propiedad universal: ‘Para todo espacio topológico Z y para toda familia de funciones continuas $f_j : X_j \rightarrow Z$, existe una única función continua $f : X \rightarrow Z$ tal que $f \circ i_j = f_j$ para todo $j \in J$ ’. Demostrar también que X es único salvo homeomorfismos.

Ejercicio 18. Sea $\{X_j / j \in J\}$ una familia de espacios topológicos y sea $X = \coprod_{j \in J} X_j$ el coproducto.

Para cada $\alpha \in J$, sea $i_\alpha : X_\alpha \rightarrow \coprod_{j \in J} X_j$ la inclusión.

(a) Probar que i_α es subespacio para todo $\alpha \in J$.

(b) Probar que las funciones i_α , $\alpha \in J$, son abiertas y cerradas.

Ejercicio 19. Sean X e Y espacios topológicos y sea $f : X \rightarrow Y$. Probar que si f es final e inyectiva entonces es inicial.

Ejercicio 20. Sean X e Y espacios topológicos y sea $f : X \rightarrow Y$. Probar que si f es inicial y sobreyectiva entonces es cociente.

Ejercicio 21. Sean X e Y espacios topológicos y sea $f : X \rightarrow Y$ continua. Probar que si existe $g : Y \rightarrow X$ continua tal que $f \circ g = \text{Id}_Y$ entonces f es un cociente.

Ejercicio 22. Sea $p_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la proyección a la primer coordenada.

(a) Sea $X = (\{0\} \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times \{0\}) \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ con la topología de subespacio y sea $f = p_1|_X$. Probar que f es cerrada pero no abierta.

(b) Sea $Y = (\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times \{0\}) \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ con la topología de subespacio y sea $g = p_1|_Y$. Probar que g no es abierta ni cerrada pero es cociente.

Ejercicio 23. Caracterizar el espacio cociente \mathbb{R}^2 / \sim en cada uno de los siguientes casos.

(a) \sim es la relación de equivalencia definida por $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ si y sólo si $x_1 + y_1^2 = x_2 + y_2^2$.

(b) \sim es la relación de equivalencia definida por $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ si y sólo si $x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2$.

Ejercicio 24. Sea $X = (\{0\} \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times \{0\}) \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ con la topología de subespacio. Definimos $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow X$ por

$$g(x, y) = \begin{cases} (x, 0) & \text{si } x \neq 0 \\ (0, y) & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

(a) ¿Es g continua?

(b) Hallar una base para la topología cociente en X inducida por g .