Topología General

Primer semestre de 2011

Práctica 3: Conexión, axiomas de separabilidad y compacidad

Conexión.

Ejercicio 1. Sean $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$ dos topologías en X. Si $\mathcal{T}' \supseteq \mathcal{T}$, ¿qué puede implicar la conexión de X en una de las topologías respecto de la conexión en la otra?

Ejercicio 2.

(a) Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subespacios conexos de X tales que $A_n \cap A_{n+1} \neq \varnothing$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Demostrar que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ es conexo.

(b) Sean $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ una colección de subespacios conexos de X y A un subespacio conexo de X. Demostrar que si $A \cap A_\alpha \neq \varnothing$ para todo $\alpha \in \Lambda$, entonces $A \cup \bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$ es conexo.

Ejercicio 3. Sea X un espacio topológico y sea $A \subseteq X$ un subconjunto. Definimos la *frontera de* A como $\partial A = \overline{A} - A^\circ$.
¿Es cierto que si X es conexo, entonces para todo subconjunto A de X propio no vacío se tiene $\partial A \neq \varnothing$? ¿Vale la recíproca?

Ejercicio 4. Considere los siguientes conjuntos con el órden lexicográfico y la topología del orden. Decidir cuáles son conexos.

(a) $\mathbb{N} \times [0,1)$ (b) $[0,1) \times \mathbb{N}$ (c) $[0,1) \times [0,1]$ (d) $[0,1] \times [0,1)$

Ejercicio 5. Sea X un espacio topológico conexo y sea Y un espacio topológico totalmente disconexo. Demostrar que si $f : X \to Y$ es una función continua entonces f es constante.

Ejercicio 6.

(a) Mostrar que entre los espacios $(0,1), (0,1]$ y $[0,1]$ no hay dos homeomorfos.

(b) Supongamos que $f : X \to Y$, $g : Y \to X$ son subespacios (es decir, son iniciales e inyectivas). Mostrar que no necesariamente X e Y son homeomorfos.

Ejercicio 7.

(a) ¿Es el producto de espacios arcoconexos arcoconexo?

(b) Si $A \subseteq X$ y A es arcoconexo, ¿es $\overline{A}$ arcoconexo?

(c) Si $f : X \to Y$ es continua y X es arcoconexo, ¿es $f(X)$ arcoconexo?

(d) Si $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ es una colección de subconjuntos arcoconexos de X y $\bigcap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha \neq \varnothing$, ¿es $\bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$ arcoconexo?

Ejercicio 8. Mostrar que $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}$ no son homeomorfos si $n > 1$.

Ejercicio 9. Sea $K = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ y notemos por $-K$ al conjunto $\{-1/n : n \in \mathbb{N}\}$. Determinar las componentes conexas y las arcoconexas de los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^2$.

$A = \ (K \times [0,1]) \cup (\{0\} \times [0,1])$.

$B = \ (A \setminus \{(0, 1/2)\})$.

$C = \ B \cup ([0,1] \times \{0\})$.

$D = \ (K \times [0,1]) \cup (-K \times [-1,0]) \cup ([0,1] \times -K) \cup ([-1,0] \times K)$.

Ejercicio 10. Sea X localmente arcoconexo. Mostrar que todo abierto conexo de X es arcoconexo.

Axiomas de separación.

Ejercicio 11. Sea X un espacio topológico. Definimos en X la relación de equivalencia $\sim$ por $x \sim y$ si y sólo si para todo $U \subseteq X$ abierto vale que $x \in U \Leftrightarrow y \in U$. Demostrar que el espacio cociente $X/\sim$ es T_0.

Ejercicio 12. (**L**) Decimos que un espacio topológico X es un *espacio de Alexandroff* si cumple que toda intersección de abiertos de X es un abierto en X.
Sea X un espacio de Alexandroff.

(a) Demostrar que para todo $x \in X$ existe un abierto minimal $U_x \subseteq X$ que contiene a x (es decir, demostrar que para todo $x \in X$ existe $U_x \subseteq X$ abierto tal que $x \in U_x$ y que cumple que para todo $U \subseteq X$ abierto tal que $x \in U$ vale que $U_x \subseteq U$).

(b) Demostrar que el conjunto de abiertos minimales $\{U_x : x \in X\}$ es una base para la topología de X.

(c) Si X es T_0 demostrar que la relación $\leq$ en X definida por $x \leq y$ si y sólo si $U_x \subseteq U_y$ es una relación de orden.

(d) Sea $(A, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado. Para cada $a \in A$, sea $S_a = \{b \in A : b \leq a\}$. Sea $\mathcal{B} = \{S_a : a \in A\}$. Demostrar que $\mathcal{B}$ es base para una topología en A.

(e) Demostrar que existe una correspondencia biunívoca entre espacios de Alexandroff T_0 y conjuntos parcialmente ordenados.

Ejercicio 13.

(a) Demostrar que los subespacios de espacios T_1 son T_1.

(b) Demostrar que un producto de espacios T_1 es T_1.

Ejercicio 14.

(a) Demostrar que los subespacios de espacios T_2 son T_2.

(b) Demostrar que un producto de espacios T_2 es T_2.

Ejercicio 15. Sean X e Y espacios topológicos y sean $f, g : X \to Y$ funciones continuas. Sea $E = \{x \in X \ / \ f(x) = g(x)\}$. Supongamos que Y es T_2.

(a) Demostrar que E es cerrado en X.

(b) Demostrar que si existe $A \subseteq X$ denso en X tal que $f|_A = g|_A$ entonces $f = g$.

(c) Dar ejemplos que muestren que los resultados anteriores no son ciertos si Y no es T_2.

Compacidad.

Ejercicio 16.

(a) Sean $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}'$ dos topologías en X. Supongamos que $\mathcal{T}' \supseteq \mathcal{T}$. ¿La compacidad de X respecto de alguna de estas topologías implica la compacidad de X respecto de la otra?

(b) Demostrar que si X es compacto y Hausdorff tanto para $\mathcal{T}$ como para $\mathcal{T}'$ entonces $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$ o no son comparables.

Ejercicio 17.

(a) Mostrar que todo subconjunto de $\mathbb{R}$ es compacto en la topología del complemento finito.

(b) ¿Es $[0,1]$ compacto como subespacio de $\mathbb{R}$ con la topología $\mathcal{T}_c$ definida por

$$\mathcal{T}_c = \{U : \mathbb{R} \setminus U \text{ es numerable o todo } \mathbb{R}\}?$$

Ejercicio 18. Sea X un espacio topológico T_2.

(a) Sea $K \subseteq X$ un subespacio compacto y sea $x_0 \in X - K$. Demostrar que existen $U, V \subseteq X$ abiertos disjuntos tales que $x_0 \in U$ y $K \subseteq V$.

(b) Sean $A, B \subseteq X$ subespacios compactos tales que $A \cap B = \varnothing$. Demostrar que existen $U, V \subseteq X$ abiertos disjuntos tales que $A \subseteq U$ y $B \subseteq V$.

Ejercicio 19. (**L**) Sean X e Y espacios topológicos, con Y compacto y Hausdorff. Sea $f : X \to Y$ una función. Demostrar que f es continua si y sólo si el gráfico de f, $G_f = \{(x, f(x)) : x \in X\}$, es cerrado en $X \times Y$.
Sugerencia: Si G_f es cerrado y V es un entorno abierto de $f(x_0)$, encontrar un entorno abierto U de x_0 tal que $U \times (Y \setminus V)$ no corte a G_f.

Ejercicio 20. Mostrar que $\mathbb{Q}$ no es localmente compacto.

Ejercicio 21. Mostrar que si $\prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$ es localmente compacto, entonces cada X_α es localmente compacto y todos los X_α, salvo una cantidad finita, son compactos.

Ejercicio 22. Sea X un espacio localmente compacto y sea $f : X \to Y$ una función continua.

(a) Demostrar que si f es abierta entonces $f(X)$ es localmente compacto.

(b) (**L**) Dar un ejemplo que muestre que el item anterior puede no ser cierto si f no es abierta.

Ejercicio 23. Sea X un espacio topológico y sea X^* su compactificación a un punto. Demostrar que:

(a) X^* es compacto.

(b) $X \subseteq X^*$ es un subespacio.

(c) $\infty \in \overline{X}$ si y sólo si X no es compacto.

(d) Si X es T_2 y localmente compacto entonces X^* es T_2.

Ejercicio 24. Probar que la compactificación a un punto de $\mathbb{N}$ es homeomorfa a $\{0\} \cup \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ con la topología que hereda como subespacio de $\mathbb{R}$.

Ejercicio 25. (**L**) Probar que la compactificación a un punto de $\mathbb{R}^n$ es homeomorfa a S^n.
Sugerencia: Considerar la proyección estereográfica $p : S^n - \{(0, 0, \ldots, 0, 1)\} \to \mathbb{R}^n$ definida por $p(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \frac{1}{1 - x_{n+1}}(x_1, \ldots, x_n)$.