Topología General

Primer semestre de 2011

Práctica 4: Axiomas de separación, axiomas de numerabilidad, metrizabilidad y teorema de Tietze.

Axiomas de separación.

Ejercicio 1. Sea X un espacio topológico regular. Demostrar que todo par de puntos de X tienen entornos cuyas clausuras son disjuntas.

Ejercicio 2. Sea X un espacio topológico normal. Demostrar que todo par de cerrados disjuntos de X tienen entornos cuyas clausuras son disjuntas.

Ejercicio 3. Sea X un conjunto totalmente ordenado y sea τ la topología del orden en X. Demostrar que (X, τ) es regular.

Ejercicio 4. Demostrar que un subespacio cerrado de un espacio topológico normal es normal.

Ejercicio 5. Sea X un espacio topológico T_1. Demostrar que X es normal si y sólo si para todo $A \subseteq X$ cerrado y para todo $U \subseteq X$ abierto tal que $A \subseteq U$ existe $V \subseteq X$ abierto tal que $A \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.

Ejercicio 6. Sea $\{X_j\}_{j \in J}$ una familia de espacios topológicos. Demostrar que si $\prod_{j \in J} X_j$ es Hausdorff, o regular o normal, entonces cada X_j lo es.

Ejercicio 7. Sea X un conjunto con dos topologías $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$. Supongamos que $\mathcal{T} \supseteq \mathcal{T}'$. Si X es regular o normal con alguna de las topologías, ¿qué se puede decir sobre la otra?

Ejercicio 8. (**L**) Sea X un espacio topológico completamente regular y sean $A, B \subseteq X$ cerrados. Demostrar que si A es compacto existe una función continua $f : X \to [0, 1]$ tal que $f(A) = \{0\}$ y $f(B) = \{1\}$.

Ejercicio 9. (**L**) Sea J un conjunto de índices. Demostrar que $\prod_{j \in J} \mathbb{R}$ con la topología caja es completamente regular.

Ejercicio 10. (**L**) Demostrar que todo espacio topológico localmente compacto y Hausdorff es completamente regular.

Axiomas de numerabilidad.

Ejercicio 11. Sea X un espacio topológico N_1 y sea Y un espacio topológico. Sea $f : X \to Y$ una función. Demostrar que f es continua si y sólo si para toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ vale que si $x_n \to x$ entonces $f(x_n) \to f(x)$.

Ejercicio 12.

(a) Demostrar que los subespacios de espacios N_2 son N_2.

(b) Demostrar que un producto contable de espacios N_2 es N_2.

Ejercicio 13. Sea X un espacio topológico Lindelöf y sea $A \subseteq X$ un subespacio cerrado. Demostrar que A es Lindelöf.

Ejercicio 14. Sean X e Y espacios topológicos y sea $f : X \to Y$ una función continua.

(a) Demostrar que si X es Lindelöf entonces $f(X)$ también lo es.

(b) Demostrar que si X es separable entonces $f(X)$ también lo es.

Ejercicio 15. Demostrar que un producto contable de espacios topológicos separables es separable.

Ejercicio 16. Sea X un espacio topológico separable. Demostrar que toda familia de conjuntos abiertos de X disjuntos dos a dos es contable.

Ejercicio 17. Sea X un espacio topológico N_2 y sea $A \subseteq X$ un subespacio discreto. Demostrar que A es contable.

Ejercicio 18. (**L**) Dar un ejemplo de una familia de espacios N_2 tal que su producto no sea N_2.

Ejercicio 19. (**L**) Sea X un espacio topológico N_2. Demostrar que toda base de la topología de X contiene una base contable para dicha topología.

Ejercicio 20. (**L**) Demostrar que todo espacio topológico compacto y metrizable es N_2.

Ejercicio 21. (**L**) Demostrar que un espacio topológico regular y Lindelöf es normal.

Ejercicio 22. (**L**)

(a) Demostrar que un espacio topológico conexo y normal con más de un punto es no numerable.

(b) Demostrar que un espacio topológico conexo y regular con más de un punto es no numerable.

Sugerencia: Todo espacio topológico contable es Lindelöf.

Metrizabilidad.

Ejercicio 23. (**L**) Sea X un espacio topológico compacto y Hausdorff. Demostrar que X es metrizable si y sólo si X es N_2.

Ejercicio 24. (**L**) Dar un ejemplo de un espacio normal que sea N_1, Lindelöf y separable y que no sea metrizable.

Teorema de extensión de Tietze.

Ejercicio 25. (**L**) Sea X un espacio topológico metrizable. Demostrar que son equivalentes:

(a) X es acotado para cualquier métrica que induzca la topología de X.

(b) Toda función continua $\phi : X \to \mathbb{R}$ es acotada.

(c) Todo conjunto infinito contenido en X tiene algún punto de acumulación.

Sugerencias: Para $i) \Rightarrow ii)$ demostrar que si $\phi : X \to \mathbb{R}$ es una función continua entonces la función $f : X \to X \times \mathbb{R}$ definida por $f(x) = (x, \phi(x))$ es inyectiva e inicial.
Para $ii) \Rightarrow iii)$, demostrar que si A es un subconjunto infinito de X que no tiene puntos de acumulación entonces existe una función continua y sobreyectiva $\phi : A \to \mathbb{N}$.

Ejercicio 26. (**L**) Sea Z un espacio topológico y sea $Y \subseteq Z$. Decimos que Y es un *retracto* de Z si existe una función continua $r : Z \to Y$ tal que $r(y) = y$ para todo $y \in Y$.

(a) Demostrar que si Z es Hausdorff e Y es un retracto de Z entonces Y es cerrado en Z.

(b) Sea $A \subseteq \mathbb{R}^2$ un subconjunto formado por dos puntos. Demostrar que A no es un retracto de $\mathbb{R}^2$.

(c) Demostrar que la circunferencia S^1 es un retracto de $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

Ejercicio 27. (**L**) Decimos que un espacio topológico Y tiene la *propiedad de extensión universal* si para todo espacio normal X, para todo $A \subseteq X$ cerrado y para toda función continua $f : A \to Y$ existe una extensión de f a una función continua $\overline{f} : X \to Y$.
Sea J un conjunto.

(a) Demostrar que $\mathbb{R}^J$ tiene la propiedad de extensión universal.

(b) Demostrar que si Y es homeomorfo a un retracto de $\mathbb{R}^J$ entonces Y tiene la propiedad de extensión universal.

Ejercicio adicional: (**L**) Ejemplo de un espacio regular que no es completamente regular.

Para cada número entero par m, sea $L_m = \{m\} \times [-1,0] \subseteq \mathbb{R}^2$.
Sea $J = \{(n,k) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \ / \ n \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 2) \text{ y } k \geq 2\}$. Para cada $(n,k) \in J$ sean

$$L'_{n,k} = \big(\{n+1-\tfrac{1}{k}\} \times [-1,0]\big) \cup \big(\{n-1+\tfrac{1}{k}\} \times [-1,0]\big)$$

y

$$C_{n,k} = L'_{n,k} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ (x-n)^2 + y^2 = (1-\tfrac{1}{k})^2 \text{ y } y \geq 0\}.$$

Sea $X = \left(\bigcup_m L_m\right) \cup \left(\bigcup_{n,k} C_{n,k}\right) \cup \{(0,-2),(0,2)\}$. Sean, además, $A = (0,2)$, $B = (0,-2)$ y $p_{n,k} = (n, 1-\frac{1}{k})$ para $(n,k) \in J$. Llamemos $P = \{p_{n,k} \ / \ (n,k) \in J\}$.

(a) Representar X en el plano cartesiano.

Sean
$\mathcal{B}_1 = \{X \cap ((a,b) \times \{y\}) \ / \ a,b,y \in \mathbb{R} \text{ y } P \cap ((a,b) \times \{y\}) = \varnothing\}$,
$\mathcal{B}_2 = \{C_{n,k} - F \ / \ (n,k) \in J \text{ y } F \text{ es un conjunto finito}\}$,
$\mathcal{B}_3 = \{(X \cap ((-\infty,m) \times \mathbb{R})) \cup \{A\} \ / \ m \text{ es entero par}\}$ y
$\mathcal{B}_4 = \{(X \cap ((m,+\infty) \times \mathbb{R})) \cup \{B\} \ / \ m \text{ es entero par}\}$.
Sea $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \mathcal{B}_3 \cup \mathcal{B}_4$.

(b) Demostrar que $\mathcal{B}$ es base para una topología en X.

(c) Sea Z un espacio topológico. Sea $g : Z \to \mathbb{R}$ una función continua y sea $r \in \mathbb{R}$. Demostrar que $g^{-1}(r)$ es un conjunto de tipo G_δ (es decir, es intersección contable de conjuntos abiertos).

Le damos a X la topología generada por la base $\mathcal{B}$. Sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función continua. Para cada $(n,k) \in J$ sea $S_{n,k} = \{p \in C_{n,k} \ / \ f(p) \neq f(p_{n,k})\}$.

(d) Deducir del item anterior que $X - S_{n,k}$ es un conjunto de tipo G_δ para todo $(n,k) \in J$.

(e) Concluir que $S_{n,k}$ es un conjunto contable para todo $(n,k) \in J$.

Por lo tanto, existe $d \in [-1,0]$ tal que la recta de ecuación $y = d$ no interseca ninguno de los conjuntos $S_{n,k}$.

(f) Demostrar que para todo n entero impar $f(n-1,d) = \lim_{k \to +\infty} f(p_{n,k}) = f(n+1,d)$.

(g) Concluir que $f(A) = f(B)$.

(h) Demostrar que X es regular pero no completamente regular.