Topología General

Primer semestre de 2011

Práctica 5: Espacios de funciones

Ejercicio 1. Sean X e Y espacios topológicos. Sea $(f_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ una red en $\mathcal{C}(X,Y)$ y sea $f \in \mathcal{C}(X,Y)$. Demostrar que $f_\alpha \to f$ en la topología de convergencia puntual si y sólo si $f_\alpha(x) \to f(x)$ para todo $x \in X$.

Ejercicio 2. Sean X e Y espacios topológicos. Le damos a Y^X la topología producto. ¿Es $\mathcal{C}(X,Y)$ cerrado en Y^X?

Ejercicio 3. Sea X un espacio topológico y sea (Y,d) un espacio métrico. Dada $f \in Y^X$, un compacto $C \subseteq X$ y un número $\epsilon > 0$, sea

$$B_C(f,\epsilon) = \{g \in Y^X : \sup\{d(f(x),g(x)) : x \in C\} < \epsilon\}$$

Mostrar que el conjunto $\mathcal{B} = \{B_C(f,\epsilon) \ / \ \epsilon > 0,\ f \in Y^X \text{ y } C \subseteq X \text{ compacto}\}$ es una base para una topología en Y^X. La topología generada por $\mathcal{B}$ se llama la *topología de convergencia sobre compactos*.

Ejercicio 4. Sea X un espacio topológico y sea (Y,d) un espacio métrico. Probar que una sucesión de funciones continuas $f_n : X \to Y$ converge a una función f en la topología de convergencia sobre compactos si y sólo si para cada compacto $C \subseteq X$, la sucesión $f_n|_C : C \to Y$ converge uniformemente a $f|_C$.

Ejercicio 5. Similarmente a como se definió la topología uniforme en $\mathbb{R}^\omega$, definimos en Y^X la topología uniforme, para (Y,d) métrico. Primero tomamos la métrica acotada $\overline{d} : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que se define por $\overline{d}(y_1,y_2) = \min\{d(y_1,y_2),1\}$. Luego tomamos en Y^X la métrica d' definida por $d'(f,g) = \sup\{\overline{d}(f(x),g(x)) : x \in X\}$. La *topología uniforme* en Y^X es la topología inducida por la métrica d'.

(a) Probar que la topología uniforme es más fina que la topología de convergencia sobre compactos, y que ésta es más fina que la topología de convergencia puntual.

(b) Probar que si X es compacto las dos primeras coinciden, y que si X es discreto la dos últimas coinciden.

Ejercicio 6. Considerar la sucesión de funciones $f_n : (-1, 1) \to \mathbb{R}$, definidas por

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^k.$$

(a) Probar que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en la topología de convergencia sobre compactos. Deducir que el límite es continuo.

(b) Mostrar que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no converge en la topología uniforme.

Ejercicio 7. Probar que si (Y, d) es un espacio métrico, la topología compacto abierta en $\mathcal{C}(X, Y)$ y la de convergencia sobre compactos en $\mathcal{C}(X, Y)$ coinciden.

Ejercicio 8. Sea C un subespacio de X. Mostrar que la restricción $f : \mathcal{C}(X, Y) \to \mathcal{C}(C, Y)$ es continua si en ambos espacios tomamos la topología de convergencia puntual o la compacto abierta.

Ejercicio 9. Mostrar que en la topología compacto abierta, $\mathcal{C}(X, Y)$ es Hausdorff si Y lo es, y regular si Y lo es.
Sugerencia: Notar que si $\overline{U} \subset V$, entonces $\overline{S(K, U)} \subset S(K, V)$.

Ejercicio 10. Notemos con $\mathcal{C}'(X, Y)$ al conjunto $\mathcal{C}(X, Y)$ con alguna topología $\mathcal{T}$. Mostrar que si la evaluación

$$ev : X \times \mathcal{C}'(X, Y) \to Y$$

es continua, entonces $\mathcal{T}$ es más fina que la topología compacto abierta.

Ejercicio 11. Sean X e Y espacios topológicos y sea $q : X \to Y$ una función continua. Sea $I = [0, 1]$ con la topología usual y sea $q \times \mathrm{Id}_I : X \times I \to Y \times I$ definida por $q \times \mathrm{Id}_I(x, t) = (q(x), t)$. Demostrar que si q es una función cociente entonces $q \times \mathrm{Id}_I$ también es una función cociente.
Sugerencia: Utilizar la ley exponencial.