Topología General

Primer semestre de 2011

Práctica 1: Espacios topológicos

Bases y sub-bases de topologías

Ejercicio 1. Sea $\{\mathcal{T}_\alpha\}_{\alpha\in A}$ una colección de topologías en X.

(a) Probar que $\bigcap_{\alpha\in A} \mathcal{T}_\alpha$ es una topología en X. ¿Es $\bigcup_{\alpha\in A} \mathcal{T}_\alpha$ una topología en X?

(b) Probar que existe una única topología en X que es la menor de todas las topologías que contienen a todas las topologías $\mathcal{T}_\alpha$ $(\alpha \in A)$, y una única topología en X que es la mayor de todas las topologías contenidas en cada una de las topologías $\mathcal{T}_\alpha$ $(\alpha \in A)$.

(c) Si $X = \{a, b, c\}$,$\mathcal{T}_1 = \{\varnothing, X, \{a\}, \{a, b\}\}$ y $\mathcal{T}_2 = \{\varnothing, X, \{a\}, \{b, c\}\}$, encontrar las topologías mencionadas en (b).

Ejercicio 2. Probar que si $\mathcal{B}$ es base de una topología en X, entonces la topología generada por $\mathcal{B}$ es igual a la intersección de todas las topologías que contienen a $\mathcal{B}$. Probar que vale lo mismo si $\mathcal{B}$ es una sub-base.

Ejercicio 3. Sea $(X, \leq)$ un conjunto totalmente ordenado. Para cada $x \in X$, definimos los segmentos $S_x = \{y \in X : y < x\}$ y $R_x = \{y \in X : x < y\}$. Sean $\mathcal{S} = \{S_x : \ x \in X\}$ y $\mathcal{R} = \{R_x : \ x \in X\}$. Probar que $\mathcal{S} \cup \mathcal{R}$ es una sub-base para la topología del orden en X.

Ejercicio 4. Considerar las siguientes colecciones de subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$\mathcal{B}_1 \ = \{(a, b) : \ a < b\}$,

$\mathcal{B}_2 \ = \{[a, b) : \ a < b\}$,

$\mathcal{B}_3 \ = \{(a, b] : \ a < b\}$,

$\mathcal{B}_4 \ = \mathcal{B}_1 \cup \{B \setminus K : \ B \in \mathcal{B}_1\}$, donde $K = \{1/n : \ n \in \mathbb{N}\}$,

$\mathcal{B}_5 \ = \{(a, +\infty) : \ a \in \mathbb{R}\}$, donde $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : \ x > a\}$,

$\mathcal{B}_6 \ = \{(-\infty, a) : \ a \in \mathbb{R}\}$, donde $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} : \ x < a\}$,

$\mathcal{B}_7 \ = \{B : \ \mathbb{R} \setminus B \text{ es finito}\}$.

(a) Probar que cada $\mathcal{B}_i$ es una base para una topolología en $\mathbb{R}$.

Notación: Notaremos $\mathbb{R}_l$ al espacio topológico $\mathbb{R}$ con la topología definida por $\mathcal{B}_2$.

(b) Comparar las siete topologías entre si.

(c) Probar que $\mathcal{B}_5 \cup \mathcal{B}_6$ es una sub-base que genera la misma topología que $\mathcal{B}_1$.

Ejercicio 5. Topología definida por filtro de entornos. Supongamos que tenemos para cada $x \in X$ un subconjunto (no vacío) $\mathscr{F}_x \subset \mathscr{P}(X)$ con las siguientes propiedades:

E1: Dado $A \in \mathscr{F}_x$, entonces $x \in A$.

E2: Dado $B \subset A$, si $B \in \mathscr{F}_x$ entonces $A \in \mathscr{F}_x$.

E3: Dados A, $B \in \mathscr{F}_x$, entonces $A \cap B \in \mathscr{F}_x$.

E4: Dado $A \in \mathscr{F}_x$, existe $B \subset A$ tal que $B \in \mathscr{F}_x$, y $B \in \mathscr{F}_y$ para cada $y \in B$.

Probar:

(a) $\mathcal{T} = \{B \in \mathscr{P}(X) : B \in \mathscr{F}_x \ \forall x \in B\} \cup \{\varnothing\}$ es una topología en X (observar que no se necesita la propiedad $E4$). Esta topología se llama la topología definida por los filtros de entornos de sus puntos.

(b) Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico, los conjuntos

$$\mathscr{F}_x = \{A \in \mathscr{P}(X) : x \in U \subset A \text{ para algún } U \in \mathcal{T}\}$$

verifican los axiomas E1-E4. Los conjuntos $\mathscr{F}_x$ se llaman filtros de entornos del punto x.

(c) El filtro de entornos de una topología definida por filtro de entornos coincide con éste.

(d) Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico, la topología definida por los filtros de entornos de X coincide con $\mathcal{T}$.

Ejercicio 6. Topologías definidas por operador de clausura.
Un operador $\overline{(\cdot)} : \mathscr{P}(X) \to \mathscr{P}(X)$ que verifica las siguientes propiedades:

C1: $\overline{\varnothing} = \varnothing$,

C2: $A \subseteq \overline{A}$, $\forall A \in \mathscr{P}(X)$,

C3: $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$, $\forall A \in \mathscr{P}(X)$,

C4: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$, $\forall A, B \in \mathscr{P}(X)$, se llama un operador de clausura.

(a) Probar que si se tiene un operador de clausura, se tiene en X una topología definida por

$$U \in \mathcal{T} \Leftrightarrow \overline{X - U} = X - U.$$

Observación: Lo que estamos haciendo es definir la topología por sus cerrados, esto es,

$$F \text{ es cerrado } \iff \overline{F} = F.$$

(b) Probar que si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico, la fórmula

$$\overline{A} = \bigcap_{\substack{F \supseteq A \\ F \text{ cerrado}}} F$$

define un operador de clausura.

(c) Probar que si se parte de un operador clausura en un espacio X y se construye una topología como en (a), el operador clausura definido a partir de esta topología (como en (b)) es el original.

(d) Probar que si se parte de un espacio topológico X y se define un operador clausura como en (b), la topología definida a partir de este operador (como en (a)) es la original de X.

Ejercicio 7. Probar que si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico, la fórmula

$$\overline{A} = \{x \in X : \ U \cap A \neq \varnothing \ \ \forall\, U \in \mathcal{T} \text{ tal que } x \in U\}$$

define un operador de clausura. Probar que este operador de clausura coincide con el definido en la parte (b) del ejercicio anterior. Es decir, probar que para todo $A \subset X$,

$$\{x \in X : \ U \cap A \neq \varnothing \ \ \forall\, U \in \mathcal{T},\ x \in U\} = \bigcap_{\substack{F \supseteq A \\ F \text{ cerrado}}} F.$$

Ejercicio 8. Probar que $\bigcup\limits_{\alpha \in I} \overline{A_\alpha} \subseteq \overline{\bigcup\limits_{\alpha \in I} A_\alpha}$ y mostrar que la inclusión puede ser estricta.

Ejercicio 9. Decidir cuáles de las siguientes igualdades son ciertas, y en caso de ser falsas determinar si se verifica alguna de las inclusiones.

(a) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

(b) $\overline{\bigcap\limits_{\alpha \in I} A_\alpha} = \bigcap\limits_{\alpha \in I} \overline{A_\alpha}$.

(c) $\overline{A - B} = \overline{A} - \overline{B}$.

Ejercicio 10. Considerar el conjunto $X = [0,1] \times [0,1]$ con la topología del orden del diccionario. Determinar la clausura de los siguientes subconjuntos de X.

$$A = \{(1/n, 0) : n \in \mathbb{N}\},$$

$$B = \{(1 - 1/n, 1/2) : n \in \mathbb{N}\},$$

$$C = \{(x, 0) : 0 < x < 1\},$$

$$D = \{(x, 1/2) : 0 < x < 1\},$$

$$E = \{(1/2, y) : 0 < y < 1\}.$$

Ejercicio 11. Determinar la clausura del conjunto $K = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ en cada una de las siete topologías definidas en el ejercicio 4.

Redes

Ejercicio 12. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Probar que las redes convergentes verifican las siguientes propiedades:

R1: Si $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ es eventualmente constante, entonces $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ converge a la constante.

R2: Si $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ converge a x, entonces toda sub-red de $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ converge a x.

R3: Si $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ verifica que toda sub-red tiene una sub-sub-red que converge a x, entonces $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ converge a x.

R4: Sean Λ un conjunto dirigido, y para cada $\alpha \in \Lambda$ sea Γ_α un conjunto dirigido. Supongamos que para cada $\alpha \in \Lambda$ se tiene una red $(x_k^\alpha)_{k\in\Gamma_\alpha}$, que converge a $x^\alpha \in X$, y además $(x^\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ converge a $x \in X$. Consideremos $\Phi = \Lambda \times \prod_{\alpha\in\Lambda} \Gamma_\alpha$ ordenado por el orden producto, esto es,

$$(\alpha, (k_\beta)_{\beta\in\Lambda}) \geq (\alpha', (k'_\beta)_{\beta\in\Lambda}) \iff \alpha \geq \alpha' \text{ y } k_\beta \geq k'_\beta \; \forall \beta \in \Lambda.$$

Entonces la red $(\alpha, (k_\beta)_{\beta\in\Lambda}) \mapsto x_{k_\alpha}^\alpha$ converge a x.

Ejercicio 13. Si $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ es una red, decimos que $x \in X$ es un punto de acumulación de la red si para todo $A \in \mathscr{F}_x$, el conjunto $\{\alpha \in \Lambda : x_\alpha \in A\}$ es cofinal en Λ. Probar que x es un punto de acumulación de la red si y sólo si existe una subred de $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ que converge a x.
Sugerencia: Para la ida, considerar Γ el conjunto de pares (α, U) con $\alpha \in \Lambda$, U entorno abierto de x que contiene a x_α, con el orden $(\alpha, U) \preceq (\beta, V)$ si $\alpha \leq \beta$ y $V \subseteq U$.

Funciones continuas

Ejercicio 14. Sean X, Y espacios topológicos. Probar que cada una de las siguientes condiciones sobre $f : X \to Y$ es equivalente a pedir que f sea continua.

(a) Para todo $x \in X$, y para todo $A \in \mathscr{F}_{f(x)}$ existe $B \in \mathscr{F}_x$ tal que $f(B) \subseteq A$.

(b) Para toda red $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} \subset X$ tal que $x_\alpha \to x$, se tiene que $f(x_\alpha) \to f(x)$.

(c) Para todo $A \subseteq X$, $f\left(\overline{A}\right) \subseteq \overline{f(A)}$.

(d) Si $\mathcal{B}$ es una base para la topología de Y, $f^{-1}(B)$ es abierto en X para todo $B \in \mathcal{B}$.

(e) Si $\mathcal{S}$ es una sub-base para la topología de Y, $f^{-1}(S)$ es abierto en X para todo $S \in \mathcal{S}$.

Ejercicio 15.

(a) Sean X, Y conjuntos totalmente ordenados con la topología del orden. Demostrar que si $f : X \to Y$ es biyectiva y preserva el orden, entonces f es un homeomorfismo.

(b) Sea $n \in \mathbb{N}$. Sea $g : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $g(x) = \sqrt[n]{x}$. Probar que g es un homeomorfismo.

(c) Sea $X = (-\infty, -1) \cup [0, +\infty)$ con la topología euclídea. Definimos $f : X \to \mathbb{R}$ por:

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si} \quad x < -1 \\ x & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Probar que f es biyectiva y preserva el orden. ¿Es f un homeomorfismo? ¿Contradice esto lo demostrado en el item (a)? ¿Por qué?

Ejercicio 16. Sea X un espacio topológico y sea Y un conjunto totalmente ordenado con la topología del orden. Sean $f, g : X \to Y$ funciones continuas.

(a) Probar que el conjunto $\{x \in X : \ f(x) \leq g(x)\}$ es cerrado en X.

(b) Sea $h : X \to Y$ la función $h(x) = \text{mín}\{f(x), g(x)\}$. Probar que h es continua.

Ejercicio 17. Sea $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ una colección de subconjuntos del espacio topológico X tal que $X = \displaystyle\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} A_\alpha$. Sea $f : X \to Y$ y supongamos que $f|_{A_\alpha}$ es continua para cada $\alpha \in \mathcal{A}$.

(a) Probar que si cada A_α es abierto, entonces f es continua.

(b) Probar que si $\mathcal{A}$ es finito y cada conjunto A_α es cerrado, entonces f es continua.

(c) Encontrar un ejemplo donde la colección $\mathcal{A} = \mathbb{N}$, cada A_α es cerrado, pero f no es continua.

(d) Una familia $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ se dice localmente finita si para cada $x \in X$ existe un abierto $U \subseteq X$, $x \in U$, tal que $U \cap A_\alpha \neq \varnothing$ sólo para finitos valores de α. Mostrar que si la familia $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ es localmente finita y cada A_α es cerrado, entonces f es continua.

Topologías dadas por una métrica

Ejercicio 18. Mostrar que $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ con la topología del orden del diccionario es metrizable (i.e. existe una métrica tal que la topología que induce la métrica coincide con la dada).

Ejercicio 19. Sea $\mathbb{R}^\omega$ el conjunto de las sucesiones de números reales. Se define en $\mathbb{R}^\omega$ la topología uniforme de la siguiente manera:
Primero se define en $\mathbb{R}$ la métrica acotada $\overline{d}(a,b) = \min\{|a-b|, 1\}$ (nota: induce la misma topología que la usual). Luego se define en $\mathbb{R}^\omega$ la métrica uniforme como

$$d((a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \overline{d}(a_n, b_n).$$

(a) Verificar que la métrica uniforme es efectivamente una métrica.

(b) Decidir si las siguientes funciones $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^\omega$ son continuas tomando en $\mathbb{R}$ la topología usual, y en $\mathbb{R}^\omega$ la topología uniforme.

$$\begin{aligned} f(t) &= (t, 2t, 3t, \ldots), \\ g(t) &= (t, t, t, \ldots), \\ h(t) &= (t, \tfrac{1}{2}t, \tfrac{1}{3}t, \ldots). \end{aligned}$$

(c) Decidir si las siguientes sucesiones convergen en $\mathbb{R}^\omega$ con la topología uniforme.

$$\begin{array}{llll} w_1 = (1,1,1,1,\ldots), & x_1 = (1,1,1,1,\ldots), & y_1 = (1,0,0,0,\ldots), & z_1 = (1,1,0,0,\ldots), \\ w_2 = (0,2,2,2,\ldots), & x_2 = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots\right), & y_2 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, \ldots), & z_2 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, \ldots), \\ w_3 = (0,0,3,3,\ldots), & x_3 = \left(0, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \ldots\right), & y_3 = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, \ldots), & z_3 = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0, \ldots), \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

(d) Calcular la clausura del conjunto de las sucesiones eventualmente cero con respecto a la topología uniforme de $\mathbb{R}^\omega$.

Ejercicio 20. Sea X un conjunto, y sea d una métrica en X. Probar que la topología inducida por d es la mínima con la propiedad que la función $d : X \times X \to \mathbb{R}$ es continua.