Cálculo I

Año 2010

Práctica 1: Conjuntos y Lógica

Ejercicio 1. Definir por extensión cada uno de los siguientes conjuntos, usando la notación "..." cuando sea necesario:

(*a*) $\{x \mid x \text{ es entero y } -3 < x < 4\}$

(*b*) $\{x \mid x \text{ es entero positivo y } x \text{ es múltiplo de } 3\}$

(*c*) $\{x \mid x \text{ es un número real y } (3x-1)(x+2) = 0\}$

(*d*) $\{x \mid x \text{ es un entero y } (3x-1)(x+2) = 0\}$

(*e*) $\{x \mid x \text{ es un número real y } 2x \text{ es entero positivo}\}$

Ejercicio 2. Enumerar cinco elementos de cada uno de los siguientes conjuntos.

(*a*) $\{n \mid n \text{ es natural y } n \text{ es divisible por } 5\}$

(*b*) $\{\frac{1}{n} \mid n \text{ es primo}\}$

(*c*) $\{2^n \mid n \text{ es natural}\}$

(*d*) $\{r \mid r \text{ es racional y } 0 < r < 1\}$

Ejercicio 3. Describir por extensión cada uno de los siguientes conjuntos o escribir "$\varnothing$" si son vacíos.

(*a*) $\{n \mid n \in \mathbb{N} \text{ y } n^2 = 9\}$

(*b*) $\{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ y } x^2 = 9\}$

(*c*) $\{n \mid n \in \mathbb{Z} \text{ y } 3 < |n| < 7\}$

(*d*) $\{x \mid x \in \mathbb{R},\ x < 1 \text{ y } x \geq 2\}$

(*e*) $\{x \mid x \in \mathbb{Q},\ x^2 = 3\}$

(*f*) $\{3n+1 \mid n \in \mathbb{N} \text{ y } n \leq 6\}$

Ejercicio 4. Sea $X = \{0, 1, 2\}$. Listar los elementos de cada uno de los siguientes conjuntos.

(*a*) $\{z \mid z = 2x \text{ y } x \in X\}$

(*b*) $\{z \mid z = x + y \text{ donde } x \text{ e } y \text{ son elementos de } X\}$

(*c*) $\{z \mid z \in X \text{ o } -z \in X\}$

(*d*) $\{z \mid x = z + y \text{ donde } x \text{ e } y \text{ son elementos de } X\}$

(*e*) $\{z \mid z \text{ es entero y } z^2 \in X\}$

Ejercicio 5. Determinar el cardinal de cada uno de los siguientes conjuntos.

(a) $\{x \mid x \text{ es entero y } 1/8 < x < 17/2\}$

(b) $\{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ y } \sqrt{x} \text{ es entero } \}$

(c) $\{x \mid x \in \mathbb{R},\ x^2 = 1 \text{ ó } 2x^2 = 1\}$

(d) $\{a, b, c, \{a, b, c\}\}$

(e) $\{a, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$

Ejercicio 6. Describir por comprensión los siguientes conjuntos.

(a) El conjunto de todos los enteros que pueden ser escritos como suma de cuadrados de dos enteros.

(b) El conjunto de todos los enteros menores que 1000 que son cuadrados perfectos.

(c) El conjunto de todos los números que son múltiplos enteros de 13.

(d) {a, e, i, o, u}

Ejercicio 7. En cada uno de los siguientes casos establecer si $x \in A$, $x \subseteq A$, ambas cosas o ninguna.

(a) $x = \{1\}$ $\quad A = \{1, 2, 3\}$

(b) $x = \{1\}$ $\quad A = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$

(c) $x = \{1\}$ $\quad A = \{1, 2, \{1, 2\}\}$

(d) $x = \{1, 2\}$ $\quad A = \{1, 2, \{1, 2\}\}$

(e) $x = \{1\}$ $\quad A = \{\{1, 2, 3\}\}$

(f) $x = 1$ $\quad A = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$

Ejercicio 8. Representar en la recta real cada uno de los siguientes intervalos, y describirlos por comprensión.

(a) $[1, 5]$

(b) $(-2, 4)$

(c) $[-1, \infty)$

(d) $(-\infty, 5]$

(e) $(2, 7]$

(f) $[-4, 0)$

Ejercicio 9. Si $X = \{1, 2, 3, 4\}$, listar los elementos de cada uno de los siguientes conjuntos.

(a) $\{A \mid A \subseteq X \text{ y } A \text{ tiene 2 elementos } \}$

(b) $\{A \mid A \subseteq X \text{ y } A \text{ tiene 1 elemento}\}$

(c) $\{A \mid A \text{ es subconjunto propio de } X\}$

(d) $\{A \mid A \subseteq X \text{ y } 1 \in A\}$

Ejercicio 10. En cada uno de los siguientes casos, mostrar que $A \subseteq B$, es decir, que todo elemento de A es un elemento de B.

(*a*) $A = \{x \mid x \text{ es un número real y } 2x^2 + 5x = 3\}$,
$B = \{x \mid x \text{ es un número real y } 2x^2 + 17x + 27 = 18/x\}$.

(*b*) $A = \{x \mid x \text{ es entero positivo y } x \text{ es par }\}$,
$B = \{x \mid x \text{ es entero positivo y } x^2 \text{ es par }\}$.

(*c*) $A = \{x \mid x \text{ es entero y } x \text{ es un múltiplo de } 6\}$,
$B = \{x \mid x \text{ es entero y } x \text{ es múltiplo de } 3\}$.

Ejercicio 11. Describir por extensión el conjunto de partes de cada uno de los siguientes conjuntos y calcular su cardinal.

(*a*) $A = \{1\}$,

(*b*) $B = \{a, b\}$,

(*c*) $S = \{1, 2, 3\}$,

(*d*) $C = \{1, a, x, w\}$.

Ejercicio 12. Si $\mathcal{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ es el conjunto universal y $A = \{1, 4, 7, 10\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $C = \{2, 4, 6, 8\}$, definir por extensión los siguientes conjuntos.

(*a*) $A \cup B$

(*b*) $A - B$

(*c*) A^c

(*d*) $\mathcal{U}^c$

(*e*) $B \cap \mathcal{U}$

(*f*) $B^c \cap (C - A)$

(*g*) $(A \cap B)^c \cup C$

(*h*) $B \cap C$

(*i*) $A \cup \varnothing$

(*j*) $A \cap (B \cup C)$

(*k*) $(A \cap B) \cup C$

(*l*) $A \cap B) - C$

(*m*) $(A \cup B) - (C - B)$

Ejercicio 13. Sean $\mathcal{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots, 12\}$, $A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$, $B = \{2, 3, 5, 7, 11\}$, $C = \{2, 3, 6, 12\}$ y $D = \{2, 4, 8\}$. Determinar los siguientes conjuntos.

(*a*) $A \cup B$

(*b*) $A \cap C$

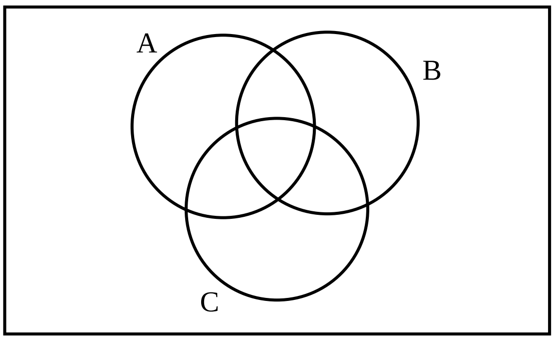
(*c*) $(A \cup B) \cap C^c$

(*d*) $A - B$

(*e*) $C - D$

(*f*) $(B - D) \cup (D - B)$

Ejercicio 14. En diagramas de Venn como el de la siguiente figura, sombrear los conjuntos indicados.



(*a*) $A \cup B$

(*b*) $A \cap B$

(*c*) $(A \cup C) \cap B$

(*d*) $A \cap B \cap C$

(*e*) $(A \cup C)^c$

(*f*) $(A - B) \cap C$

(*g*) $(A \cap C) \cup C^c$

(*h*) $(A \cap B \cap C)^c$

(*i*) $(A - B) - C$

(*j*) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$

Ejercicio 15. De un total de 60 alumnos de un colegio:

- 15 estudian francés solamente,
- 11 estudian francés e inglés,
- 12 estudian alemán solamente,
- 8 estudian francés y alemán,
- 10 estudian inglés solamente,
- 5 estudian inglés y alemán, y
- 3 los tres idiomas.

Determinar:

(*a*) ¿Cuántos no estudian ningún idioma?

(*b*) ¿Cuántos estudian alemán?

(*c*) ¿Cuántos estudian alemán e inglés solamente?

(*d*) ¿Cuántos estudian francés?

Ejercicio 16. Describir por comprensión el conjunto que resulta de las siguientes operaciones y graficarlo en la recta real. Indicar si el conjunto obtenido es un intervalo, y en tal caso representarlo en la notación de intervalos.

(*a*) $[-1, \infty] \cap (-3, 2)$

(*b*) $(-\infty, 2) \cup [0, \infty)$

(*c*) $(-3, 1] \cap (2, \infty)$

(*d*) $(-2, 3] \cup (-\infty, 1)$

(*e*) $[-3, 0) \cap (-2, 3)$

Ejercicio 17. Utilizando las propiedades de asociatividad, conmutatividad y distributividad de la unión y la intersección, y las Leyes de de Morgan, comprobar las siguientes identidades. Ilustrar cada caso con un diagrama de Venn. Recordar que $A - B = A \cap B^c$.

(a) $(A^c \cap B)^c = A \cup B^c$

(b) $A \cap (B \cup A)^c = \varnothing$

(c) $(A - B) - C = (A - C) - (B - C)$

(d) $(A \cap B) \cup (A \cap B^c) = A$

(e) $(A \cup B) \cap (A \cup B^c) = A$

Ejercicio 18. Simplificar la expresión de modo que A, B y C aparezcan a lo sumo una vez:

(a) $((A^c \cup C^c) \cap B)^c \cup (A \cup (C \cap B)^c \cup C)^c$

(b) $(A \cup (B \cup C)^c)^c \cap (A^c \cup (B \cap C)^c)^c$

Ejercicio 19. Sea $A = \{a, b, c\}$ y $B = \{a, b, d\}$.

(a) Listar los pares ordenados de $A \times A$.

(b) Listar los pares ordenados de $A \times B$.

(c) Listar los elementos del conjunto $\{(x, y) \mid (x, y) \in A \times B \text{ y } x = y\}$

Ejercicio 20. Sea $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ y $T = \{0, 2, 4\}$.

(a) ¿Cuántos pares ordenados hay en $S \times T$? ¿Y en $T \times S$?

(b) Listar los elementos de cada uno de los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned}
A &= \{(m, n) \mid (m, n) \in S \times T \text{ y } m < n\} \\
B &= \{(m, n) \mid (m, n) \in T \times S \text{ y } m < n\} \\
C &= \{(m, n) \mid (m, n) \in S \times T \text{ y } m + n \geq 3\} \\
D &= \{(m, n) \mid (m, n) \in S \times T \text{ y } m.n \geq 4\} \\
E &= \{(m, n) \mid (m, n) \in S \times T \text{ y } m + n = 10\}
\end{aligned}$$

(c) Para cada uno de los items anteriores, representar el conjunto en un diagrama de ejes cartesianos.

Ejercicio 21. Graficar en los ejes cartesianos los siguientes conjuntos.

(a) $\{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2,\ -2 < y < 3\}$

(b) $\{(x, y) \mid x = 2\}$

(c) $\{(x, y) \mid x \leq y\}$

(d) $\{(x, y) \mid x > 2\}$

(e) $\{(x, y) \mid y < 3\}$

(f) $\{(x, y) \mid 0 < x < y\}$

Ejercicio 22. Describir por comprensión los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

(a) El eje de las ordenadas.

(b) El eje de las abcisas.

(c) El segundo cuadrante.

(d) El conjunto de puntos interiores al rectángulo con vértices en $(-1, -1)$, $(-1, 3)$, $(2, -1)$ y $(2, 3)$.

(e) El borde del rectángulo dado en el ítem 4.

Ejercicio 23. Elegir escalas adecuadas en cada uno de los ejes como así también el punto de intersección de los mismos para representar los siguientes conjuntos.

(a) $\{(x, y) \mid -5000 \leq x \leq 500,\ y \leq 1\}$

(b) $\{(x, 10^4) \mid -200 < x < 500\}$

(c) $\{(10^4, 10^4 + 1), (10^4, 10^4 + 2), (10^4 + 1, 10^4 - 3), (10^4 - 2, 10^4 - 6)\}$

(d) $\{(0{,}5, 0{,}6), (0{,}5, 0{,}7), (0{,}2, -0{,}3), (0{,}05, -0{,}125)\}$

Ejercicio 24. Sean
$A = \{(x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ 2x - y = 4\}$,
$B = \{(x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x + 3y = 9\}$ y
$C = \{(x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ y = 2x\}$.
Describir y graficar los siguientes conjuntos.
(a) $A \cap B$ (b) $A \cap C$ (c) $B \cap C$ (d) $A^c \cup C^c$.

Ejercicio 25. Evaluar cada una de las proposiciones dadas teniendo en cuenta los siguientes valores de verdad: $p = F$, $q = V$, $r = F$.

(a) $p \vee q$

(b) $\neg p \vee \neg q$

(c) $\neg p \vee q$

(d) $p \vee \neg (q \wedge r)$

(e) $\neg (p \vee q) \wedge (\neg p \vee r)$

(f) $\neg p \wedge (q \vee r)$

Ejercicio 26. En la columna de la izquierda hay una lista de proposiciones. Para cada una de ellas, indicar si la correspondiente proposición a la derecha es o no su negación. Si no lo es, escribir correctamente la negación.

(a) El pizarrón es verde.	(a) El pizarrón es negro.
(b) 4 es múltiplo de 8.	(b) 4 no es múltiplo de 8.
(c) El conjunto A tiene un solo elemento.	(c) El conjunto A es vacío.
(d) A es un conjunto vacío.	(d) A tiene al menos un elemento.
(e) $a \leq b$	(e) $a > b$
(f) $a \geq b$	(f) $a \leq b$
(g) $a < b \leq c$	(g) $a > b \geq c$
(h) $a < b \leq c$	(h) $a \geq b$ o $b > c$
(i) $a \in A \cup B$	(i) $a \in A^c \cup B^c$
(j) $b \in A \cap B$	(j) $b \in (A \cap B)^c$
(k) $c \in A^c$	(k) $c \in A$
(l) $d \notin G^c$	(l) $d \in G$

Ejercicio 27. Sean a, b y c números reales y sean p, q y r las siguientes proposiciones: $p : a < b$, $\quad q : b < c$, $\quad r : a < c$. Representar en forma simbólica en términos de p, q y r los siguientes enunciados:

(a) $a < b < c$.

(b) ($a \geq b$ y $b < c$) o $a \geq c$.

(c) No es cierto que ($a < b$ y $a < c$).

(d) (No es verdad que ($a < b$ y ($a < c$ o $b < c$))) o ($a \geq b$ y $a < c$).

Ejercicio 28. Sabiendo que p y q son verdaderos, y que r y s son falsos, indicar los valores de verdad de las siguientes expresiones.

(a) $p \vee (q \wedge r)$

(b) $(p \wedge (q \wedge r)) \vee \neg((p \vee q) \wedge (r \vee s))$

(c) $(\neg(p \wedge q) \vee \neg r) \vee (((\neg p \wedge q) \vee \neg r) \wedge s)$

Ejercicio 29. Comprubear a través de las tablas de verdad, las propiedades distributivas de la disyunción y de la conjunción, y las leyes de Morgan.

Ejercicio 30. Para cada una de las siguientes proposiciones analizar su valor de verdad y escribir, en forma simbólica, su negación. Asumir que las variables toman valores en el conjunto de los números reales.
Por ejemplo, dada la proposición $\exists x \mid \; 3 \cdot x - 2 = -4x + 1$, la misma es verdadera puesto que para $x = 3/7$ se verifica $3 \cdot \frac{3}{7} - 2 = -4\frac{3}{7} + 1$, y la negación de la proposición es $(\forall x), \; 3 \cdot x - 2 \neq -4x + 1$.

(a) $\exists x \mid x^2 + x + 1 = 0$

(b) $\forall x, \; (x - 1) \cdot (x + 1) = x^2 - 1$

(c) $\exists x \mid x^2 + 1 \geq 0$

(d) $\forall x, \; x^2 + 3x + 2 = 0$

(e) $\exists x \mid x = -x$

(f) $\exists x \mid x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = (x + 3) \cdot (x + 1)$

(g) $\forall x, \; x + x = 0$

(h) $\forall x, \; (\exists y \mid x^2 + y^2 = (x + y)^2)$

(i) $\forall x, \; (\forall y, \; x + y = y + x)$

(j) $\exists x \mid (\forall y, \; x + y = 0)$

Ejercicio 31. Escribir las siguientes frases con notación lógica y escribir también sus negaciones. En caso de utilizar cuantificadores especificar los universos y utilizar $\mathbb{R}$ si no se especifica ningún universo.

(a) Para todo $x > 0$, existe n en $\mathbb{N}$ tal que $n > x$ y $x > 1/n$.

(b) Para todos $m, n \in \mathbb{N}$ existe p en $\mathbb{N}$ tal que $m < p$ y $p < n$.

(c) Existe $u \in \mathbb{N}$ tal que $un = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(d) Para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $m < n$.

(e) Para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $2^m \leq n$ y $n < 2^{m+1}$.

Ejercicio 32. Sean p, q, r las proposiciones siguientes:
p: "está lloviendo"
q: "el sol está brillando"
r: "hay nubes en el cielo".
Traducir los siguientes enunciados a notación lógica, utilizando p, q, r y conectivos lógicos.

(a) Está lloviendo y el Sol está brillando.

(b) Si está lloviendo , entonces hay nubes en el cielo.

(c) Si no está lloviendo, entonces el Sol no está brillando y hay nubes en el cielo.

(d) El Sol está brillando si y sólo si no está lloviendo.

(e) Si no hay nubes en el cielo, entonces el Sol está brillando.

Ejercicio 33. Sean p, q y r como en el ejercicio anterior. Traducir las siguientes proposiciones a oraciones en español.

(a) $(p \wedge q) \Rightarrow r$

(b) $\neg\, p \Leftrightarrow (q \vee r)$

(c) $(p \Rightarrow r) \Rightarrow q$

(d) $\neg\,(p \Leftrightarrow (q \vee r))$

(e) $\neg\,(p \vee q) \wedge r$

Ejercicio 34. Supongamos que todos los días que llueve Juan usa paraguas. ¿Cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas y en cuáles no puede asegurarse nada?

(a) Si llueve entonces Juan usa paraguas.

(b) Si Juan usa paraguas entonces llueve.

(c) Si Juan no usa paraguas entonces no llueve.

(d) Si no llueve entonces Juan no usa paraguas.

(e) Si no llueve entonces Juan usa paraguas.

Ejercicio 35. Escribir la recíproca, la contrarrecíproca y la inversa de cada una de las siguientes implicaciones.

(a) Si 4 es par entonces $1 > 0$.

(b) $2 + 3 = 5$ si $1 + 1 < 3$.

(c) Si 4 es impar entonces $1 > 0$.

(d) Si $1 + 1 < 3$ entonces $2 = 4$.

Ejercicio 36. Determinar los valores de verdad de las siguientes proposiciones compuestas.

(a) Si $2 + 2 = 4$ entonces $2 + 4 = 8$.

(b) Si $2 + 2 = 5$ entonces $2 + 4 = 8$.

(c) Si $2 + 2 = 4$ entonces $2 + 4 = 6$.

(d) Si $2 + 2 = 5$ entonces $2 + 4 = 6$.

Ejercicio 37. Suponiendo que $p \Rightarrow q$ es falso, indicar los valores de verdad para

(a) $p \wedge q$ (b) $p \vee q$ (c) $q \Rightarrow p$

Ejercicio 38. Para las siguientes proposiciones compuestas, elaborar las tablas de verdad correspondientes.

(a) $\neg (p \wedge q)$

(b) $\neg (p \vee q)$

(c) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow [(p \vee \neg q) \Rightarrow (p \wedge q)]$

(d) $[(p \vee q) \wedge r] \Rightarrow (p \wedge \neg q)$

(e) $[(p \Leftrightarrow q) \vee (p \Rightarrow r)] \Rightarrow (\neg q \wedge p)$

(f) $\neg (p \wedge q) \vee (r \wedge \neg p)$

(g) $(p \vee q) \wedge (\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$