# Geometría Euclídea y no Euclídea

Segundo semestre de 2010

## Práctica 1: Axiomas de incidencia y de entreposición

**Ejercicio 1.** Para cada uno de los siguientes items analizar si el conjunto $\mathcal{G}$ satisface cada uno de los axiomas (I1), (I2), (I3) y decidir si $\mathcal{G}$ es una geometría de incidencia en $X$.

(*a*) $X = \{A, B, C, D\}$, $\mathcal{G} = \{\{A, B\}, \{B, C\}, \{A, C\}, \{B, D\}, \{A, D\}\}$.

(*b*) $X = \{A, B, C, D\}$, $\mathcal{G} = \{\{A, B\}, \{B, C\}, \{A, C\}, \{B, D\}, \{A, D\}, \{C, D, A\}\}$.

(*c*) $X = \{A, B, C, D\}$, $\mathcal{G} = \{\{A, B, C\}, \{B, D\}, \{A, C, D\}\}$.

(*d*) $X = \{A, B, C\}$, $\mathcal{G} = \mathcal{P}(X)$.

(*e*) $X = \{A, B, C, D, E, F\}$,
$\mathcal{G} = \{\{A, B, C\}, \{C, D, E\}, \{A, E, F\}, \{B, D, F\}, \{A, D\}, \{B, E\}, \{C, F\}\}$.

**Ejercicio 2.** Para cada uno de los items del ejercicio anterior analizar si el conjunto $\mathcal{G}$ satisface el axioma de las paralelas.

**Ejercicio 3.** Hallar todas las posibles geometrías de incidencia en el conjunto $X = \{A, B, C, D\}$. ¿Cuáles satisfacen el axioma de las paralelas?

**Ejercicio 4.** Sea $\mathcal{G}$ el conjunto de todas las rectas (usuales) de $\mathbb{R}^3$. Demostrar que $\mathcal{G}$ es una geometría de incidencia en $\mathbb{R}^3$.

**Ejercicio 5.** Sea $\mathbb{F}$ un cuerpo. Una recta en $\mathbb{F}^2$ es un subconjunto $L \subseteq \mathbb{F}^2$ que está definido por $L = \{(x, y) \in \mathbb{F}^2 \ / \ ax + by + c = 0\}$ para ciertos $a, b, c \in \mathbb{F}$ con $(a, b) \neq (0, 0)$. Demostrar que el conjunto de todas las rectas en $\mathbb{F}^2$ es una geometría de incidencia en $\mathbb{F}^2$.

**Ejercicio 6.** Sea $X$ el conjunto de las rectas de $\mathbb{R}^3$ que pasan por el origen. Sea $\mathcal{P}$ el conjunto de planos de $\mathbb{R}^3$ que pasan por el origen. Para cada plano $P \in \mathcal{P}$ definimos $l_P = \{A \in X \ / \ A \subseteq P\}$. Sea $\mathcal{G} = \{l_P \ / \ P \in \mathcal{P}\}$. Demostrar que $\mathcal{G}$ es una geometría de incidencia en $X$.

**Ejercicio 7.** Sean $X$ y $L$ conjuntos y sea $R$ una relación de $X$ en $L$ que satisface:

- Para todos $x, y \in X$ tales que $x \neq y$ existe un único $a \in L$ tal que $(x, a) \in R$ y $(y, a) \in R$.
- Para todo $a \in L$ existen $x, y \in X$ distintos tales que $(x, a) \in R$ y $(y, a) \in R$.

- Existen $x, y, z \in X$ distintos tales que no existe $a \in L$ tal que $(x,a) \in R$, $(y,a) \in R$ y $(z,a) \in R$.

Para cada $a \in L$ definimos $l_a = \{x \in X \ / \ (x,a) \in R\}$. Sea $\mathcal{G} = \{l_a \ / \ a \in L\}$.

($a$) Demostrar que $\mathcal{G}$ es una geometría de incidencia en $X$.

($b$) Comparar con el ejercicio anterior.

**Ejercicio 8.** Sean $X$ el conjunto de planos de $\mathbb{R}^3$ que pasan por el origen y sea $L$ el conjunto de las rectas de $\mathbb{R}^3$ que pasan por el origen. Definimos una relación $R$ de $X$ en $L$ de la siguiente manera: $R = \{(x,a) \in X \times L \ / \ a \subseteq x\}$. Como en el ejercicio anterior, para cada $a \in L$ definimos $l_a = \{x \in X \ / \ (x,a) \in R\}$ y $\mathcal{G} = \{l_a \ / \ a \in L\}$.

($a$) Demostrar que $\mathcal{G}$ es una geometría de incidencia en $X$.

($b$) Comparar con el ejercicio 6.

**Ejercicio 9.** Sea $X$ un conjunto y sea $\mathcal{G}$ una geometría de incidencia en $X$. Sean $A, B, C \in X$ alineados distintos dos a dos. Demostrar que si una recta $l$ contiene a $A$ y a $B$ entonces contiene a $C$.

**Ejercicio 10.** Sea $X$ un conjunto y sea $\mathcal{G}$ una geometría de incidencia en $X$. Sean $A, B, C, D \in X$ distintos dos a dos. Demostrar que si $A$, $B$ y $C$ están alineados y $B$, $C$ y $D$ están alineados, entonces los cuatro puntos $A$, $B$, $C$ y $D$ están alineados.

**Ejercicio 11.** Sea $X$ un conjunto y sea $\mathcal{G}$ una geometría de incidencia en $X$. Sea $R$ la relación de paralelismo de $\mathcal{G}$ en $\mathcal{G}$, es decir $R$ está definida por $R = \{(l, l') \in \mathcal{G} \times \mathcal{G} \ / \ l \text{ es paralela a } l'\}$.

($a$) Dar un ejemplo que muestre que $R$ puede no ser una relación de equivalencia.

($b$) Demostrar que si $\mathcal{G}$ satisface el axioma de las paralelas, entonces $R$ es una relación de equivalencia.

($c$) Demostrar que si $R$ es una relación de equivalencia entonces $\mathcal{G}$ satisface el axioma de las paralelas.

**Ejercicio 12.** Sea $X$ un conjunto y sea $\mathcal{G}$ una geometría de incidencia en $X$. Supongamos que $X$ es un conjunto finito. Demostrar que $\#\mathcal{G} \geq \#X$ (es decir, el número de rectas es mayor o igual que el número de puntos).

**Ejercicio 13.** Sea $X$ un conjunto y sea $(\mathcal{G}, \mathcal{S})$ una geometría con segmentos en $X$. Sean $A$, $B$, $C$, $D$ y $E$ puntos distintos de $X$ y sean $l, l' \in \mathcal{G}$ tales que $A, B, C \in l$, $A, D, E \in l'$, $l \cap l' = \{A\}$. Demostrar que si $(A, B, C) \in \mathcal{S}$ y $(A, D, E) \in \mathcal{S}$ entonces $\overline{BE} \cap \overline{CD} \neq \varnothing$.

**Ejercicio 14.** Sea $X$ un conjunto y sea $(\mathcal{G},\mathcal{S})$ una geometría con segmentos en $X$. Sean $A,B\in X$ puntos distintos. Demostrar que existe $C\in X$ tal que $(A,C,B)\in\mathcal{S}$.

**Ejercicio 15.** Sea $X$ un conjunto y sea $(\mathcal{G},\mathcal{S})$ una geometría con segmentos en $X$. Sean $A$, $B$ y $C$ puntos de $X$ tales que $(A,B,C)\in\mathcal{S}$. Demostrar que $\overline{AB}\cup\overline{BC}=\overline{AC}$ y que $\overline{AB}\cap\overline{BC}=\{B\}$.

**Ejercicio 16.** Sea $X$ un conjunto y sea $(\mathcal{G},\mathcal{S})$ una geometría con segmentos en $X$. Sean $A$ y $B$ puntos distintos de $X$ y sea $l$ la recta que contiene a $A$ y a $B$. Demostrar que $\overrightarrow{AB}\cup\overrightarrow{BA}=l$ y que $\overrightarrow{AB}\cap\overrightarrow{BA}=\overline{AB}$.

**Ejercicio 17.** Sea $X$ un conjunto y sea $(\mathcal{G},\mathcal{S})$ una geometría con segmentos en $X$. Demostrar que toda recta contiene infinitos puntos.

**Ejercicio 18.**

($a$) Sea $A=\{0,1,2,3,4\}$. Hallar $S\subseteq A\times A\times A$ que satisfaga (simultáneamente) las siguientes propiedades:

(1) Si $(a,b,c)\in S$ entonces $a$, $b$ y $c$ son distintos dos a dos y $(c,b,a)\in S$.

(2) Dados $a,b\in A$ distintos existe $c\in A$ tal que $(a,b,c)\in S$.

(3) Dados $a,b,c\in A$ distintos se satisface una y sólo una de las siguientes proposiciones:

- $(a,b,c)\in\mathcal{S}$
- $(b,c,a)\in\mathcal{S}$
- $(c,a,b)\in\mathcal{S}$

($b$) Para el conjunto $S$ hallado definimos para cada $a\in A$ una relación $\sim_a$ de $A-\{a\}$ en $A-\{a\}$ de la siguiente manera: $b\sim_a c$ si y sólo si $(b,a,c)\notin S$. Hallar $a\in A$ tal que $\sim_a$ no sea una relación de equivalencia.

($c$) A partir de los items anteriores y del ejercicio 5 hallar un conjunto $X$, una geometría de incidencia $\mathcal{G}$ en $X$ y un conjunto $\mathcal{S}\subseteq X\times X\times X$ que satisfaga los axiomas (E1), (E2) y (E3) y tal que para algún $A\in X$ la relación $\sim_A$ no sea una relación de equivalencia.

($d$) Concluir que los axiomas (E1), (E2) y (E3) no son suficientes para definir semirrectas.

**Ejercicio 19.** Sea $X$ un conjunto y sea $(\mathcal{G},\mathcal{S})$ una geometría con segmentos en $X$. Demostrar que el interior de un triángulo en $X$ es no vacío.

**Ejercicio 20.** Sea $X$ un conjunto y sea $(\mathcal{G},\mathcal{S})$ una geometría con segmentos en $X$. Sean $A$, $B$ y $C$ puntos distintos y no alineados de $X$. Sea $D$ un punto interior al triángulo $\triangle ABC$ y sea $l$ una recta que contiene a $D$. Demostrar que $l$ interseca alguno de los lados del triángulo $\triangle ABC$.

**Ejercicio 21.** Sea $X$ un conjunto y sea $(\mathcal{G}, \mathcal{S})$ una geometría con segmentos en $X$. Demostrar que el interior de un triángulo en $X$ es convexo.

**Ejercicio 22.** Sea $X$ un conjunto y sea $(\mathcal{G}, \mathcal{S})$ una geometría con segmentos en $X$. Demostrar que el exterior de un triángulo en $X$ es conexo por segmentos.

**Ejercicio 23.** Sea $X$ un conjunto y sea $(\mathcal{G}, \mathcal{S})$ una geometría con segmentos en $X$. Sea $\triangle ABC$ un triángulo en $X$. Sean $a$, $b$ y $c$ rectas en $X$ y $D$, $E$, $F$ puntos distintos de $X$ e interiores al triángulo $\triangle ABC$ tales que $A \in a$, $B \in b$, $C \in c$, $a \cap c = \{D\}$, $a \cap b = \{E\}$ y $b \cap c = \{F\}$. Demostrar que es cierta una y sólo una de las siguientes dos proposiciones:

- $(A, D, E) \in \mathcal{S}$, $(B, E, F) \in \mathcal{S}$ y $(C, F, D) \in \mathcal{S}$.
- $(A, E, D) \in \mathcal{S}$, $(B, F, E) \in \mathcal{S}$ y $(C, D, F) \in \mathcal{S}$.